Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

I



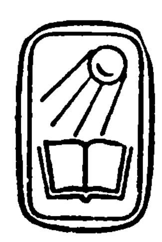
Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ I

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для университетов и педагогических институтов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

517.2
Ф 65
УДК 517 (075.8)

$\frac{2-2-3}{18-69}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

ГЛАВА ВТОРАЯ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

ГЛАВА ПЯТАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ; ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ

ДОПОЛНЕНИЕ
ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФУНКЦИЙ

ВВЕДЕНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Область рациональных чисел

1. Предварительные замечания. Из школьного курса читателю хорошо знакомы рациональные числа и их свойства. В то же время, уже потребности элементарной математики приводят к необходимости расширения этой числовой области. Действительно, среди рациональных чисел не существует зачастую корней даже из целых положительных (натуральных) чисел, например, $\sqrt{2}$, т. е. *нет такой рациональной дроби* $\frac{p}{q}$ *(где p и q — натуральные числа), квадрат которой был бы равен 2.*

Для доказательства этого допустим противное: пусть существует такая дробь $\frac{p}{q}$, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Мы вправе считать эту дробь несократимой, т. е. p и q лишенными общих множителей. Так как $p^2 = 2q^2$, то p есть число четное: $p = 2r$ (r — целое) и, следовательно, q — нечетное. Подставляя вместо p его выражение, найдем: $q^2 = 2r^2$, откуда следует, что q — четное число. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Одновременно с этим, если бы мы оставались в области одних лишь рациональных чисел, в геометрии заведомо не все отрезки могли бы быть снабжены длинами. В самом деле, рассмотрим квадрат со стороной, равной единице длины. *Его диагональ не может иметь рациональной длины* $\frac{p}{q}$, ибо, в противном случае, по теореме Пифагора, квадрат этой длины был бы равен 2, что, как мы видели, невозможно.

В настоящем введении мы ставим себе задачей расширить область рациональных чисел, присоединив к ним числа новой природы — иррациональные. Вместе с тем мы покажем, что в расширенной области останутся справедливыми все привычные свойства рациональных чисел, относящиеся к арифметическим действиям над ними и к сочетанию их с помощью знаков равенства и неравенства. Для того чтобы сделать реально возможной проверку упомянутых свойств для

расширенной числовой области, очень важно выделить наименьшее количество основных свойств, из которых все остальные вытекали бы уже как формально-логические следствия: тогда проверке будут подлежать лишь эти основные свойства.

В связи с этим мы приводим ниже перечень основных свойств области рациональных чисел. Попутно мы на ряде примеров показываем, как другие известные их свойства выводятся из основных совершенно формально. Говоря о «числах», мы здесь всегда имеем в виду рациональные числа: буквы a, b и т. д. обозначают именно их.

2. Упорядочение области рациональных чисел. Условимся с самого начала, что равные числа мы будем рассматривать, как одно и то же число в разных формах. Иными словами, для нас понятие «равно» ($=$) означает «тождественно». Поэтому мы не перечисляем свойств равных чисел.

Упорядочение рациональных чисел достигается с помощью понятия «больше» ($>$), с которым связана первая группа свойств:

I 1° *для каждой пары чисел a и b имеет место одно, и только одно, из соотношений*

$$a=b,\quad a>b,\quad b>a;$$

I 2° *из $a>b$ и $b>c$ следует $a>c$ (транзитивное свойство знака $>$)*;

I 3° *если $a>b$, то найдется также такое число c, что*

$$a>c \text{ и } c>b^{*})$$

(свойство плотности).

Понятие «меньше» ($<$) вводится уже как производное. Именно, говорят, что $a<b$ в том, и только в том, случае, если $b>a$. Легко видеть, что из $a<b$ и $b<c$ следует, что $a<c$ (транзитивное свойство знака $<$). Действительно, неравенства $a<b$ и $b<c$ равносильны, по условию, неравенствам $b>a$ и $c>b$; отсюда следует $c>a$ (I 2°) или, что то же, $a<c$.

Дальнейшие свойства понятия «больше», связанные с арифметическими действиями над рациональными числами, будут указаны ниже.

3. Сложение и вычитание рациональных чисел. Вторая группа свойств связана со сложением, т. е. с операцией нахождения суммы двух чисел. Для каждой пары чисел a и b существует (единственное) число, называемое суммой a и b (его обозначают $a+b$). Это понятие обладает свойствами:

II 1° $a+b=b+a$ *(переместительное свойство сложения)*;

---

*) В этих условиях говорят также, что число c лежит между числами a и b; очевидно, таких чисел будет бесчисленное множество.

II 2° $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*сочетательное свойство сложения*).

Особая роль нуля характеризуется свойством:

II 3° $a+0=a$;

кроме того,

II 4° *для каждого числа a существует число* $-a$ (*симметричное ему*), *такое, что* $a+(-a)=0$.

На основе этих свойств, прежде всего, исчерпывается вопрос о вычитании, как действии, обратном сложению. Если разностью чисел a и b, как обычно, называть такое число c, для которого $c+b=a$ *), то встает вопрос о существовании такого числа и о его единственности.

Положив $c=a+(-b)$, получим [II 2°, 1°, 4,° 3°]:

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=$$
$$=a+[b+(-b)]=a+0=a,$$

так что это число c удовлетворяет определению разности.

Пусть, обратно, c' есть разность чисел a и b, так что $c'+b=a$. Прибавив к обеим частям этого равенства по $(-b)$ и преобразуя левую часть [II 2°, 4°, 3°]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

заключим, что $c'=a+(-b)=c$.

Таким образом, доказаны существование и однозначность разности чисел a и b; обозначают ее $a-b$.

Из однозначности разности вытекает ряд следствий. Прежде всего, из II 3° следует $0=a-a$, и мы заключаем, что, кроме числа 0, не существует числа, которое обладало бы свойством, аналогичным II 3°. Далее, отсюда же вытекает единственность числа, симметричного данному: $-a=0-a$.

Так как из $a+(-a)=0$ следует $(-a)+a=0$ [II 1°], то оказывается, что $a=-(-a)$, т. е. числа a и $-a$ являются взаимно симметричными. Установим еще такое свойство симметричных чисел:

$$-(a+b)=(-a)+(-b);$$

для этого достаточно доказать, что

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

а это вытекает из II 1°, 2°, 4°, 3°.

Наконец, приведем еще одно свойство, связывающее знак $>$ со знаком суммы:

II 5° *из* $a>b$ *следует* $a+c>b+c$.

---

*) Ввиду II 1°, это равенство, определяющее разность, можно написать и так: $b+c=a$.

Оно устанавливает право к обеим частям неравенства прибавлять поровну; с его помощью доказывается равносильность неравенств

$$a > b \text{ и } a - b > 0.$$

Далее, из $a > b$ следует $-a < -b$. Действительно, $a > b$ влечет за собой $a - b > 0$; но

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) + [-(-a)] = \\ = (-b) - (-a),$$

так что неравенство это можно переписать так: $(-b)-(-a) > 0$, откуда $-b > -a$ или $-a < -b$.

В частности, из $a > 0$ следует $-a < 0$, и из $a < 0$ следует $-a > 0$. Если $a \neq 0$, то из двух взаимно симметричных чисел a, $-a$ одно (и только одно) будет больше 0; его именно и называют абсолютной величиной как числа a, так и числа $-a$, и обозначают символом

$$|a| = |-a|.$$

Абсолютную величину числа нуль полагают равной нулю: $|0| = 0$.

На свойстве II 5° основывается возможность почленного складывания неравенств: из $a > b$ и $c > d$ следует $a + c > b + d$. В самом деле, из $a > b$ следует $a + c > b + c$; в свою очередь, из $c > d$ следует $c + b > d + b$ или [II 1°] $b + c > b + d$, а тогда, в силу I 2°, окончательно получаем $a + c > b + d$.

4. Умножение и деление рациональных чисел. Третья группа свойств связана с умножением, т. е. с операцией нахождения произведения двух чисел. Для каждой пары чисел a и b существует (единственное) число, называемое произведением a и b (его обозначают $a \cdot b$ или просто ab). Это понятие обладает свойствами:

III 1° $ab = ba$ (*переместительное свойство умножения*);

III 2° $(ab)c = a(bc)$ (*сочетательное свойство умножения*).

Особая роль единицы характеризуется свойством:

III 3° $a \cdot 1 = a$;

кроме того,

III 4° *для каждого числа a, отличного от 0, существует число $\frac{1}{a}$ (обратное ему), такое, что* $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Вопрос о делении, как о действии, обратном умножению, решается на основе свойств умножения так же, как выше был решён вопрос о вычитании на основе свойств сложения. Обратное число здесь будет играть ту же роль, какую там играло симметричное число.

Назовем частным чисел a и b (где делитель b всегда предполагается отличным от 0) такое число c, что *)

$$c \cdot b = a.$$

Этому определению можно удовлетворить, положив $c = a \cdot \frac{1}{b}$, так как [III 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

Обратно, если число c' удовлетворяет определению частного чисел a и b, так что $c' \cdot b = a$, то, умножив обе части этого равенства на $\frac{1}{b}$ и преобразуя левую часть [III 2°, 4°, 3°]:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

получим, что $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$.

Таким образом, доказаны существование и однозначность частного чисел a и b (при условии, что $b \neq 0$); обозначают его $a : b$ или $\frac{a}{b}$.

Из однозначности частного выводим, что, кроме числа 1, нет числа, которое обладало бы свойством, аналогичным III 3°. Затем отсюда, как и выше, вытекает единственность обратного числа (как частного 1 и a); кроме того, легко устанавливается, что числа a и $\frac{1}{a}$ являются взаимно обратными.

Следующее свойство связывает оба основных арифметических действия — умножение и сложение:

III 5° $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (*распределительное свойство умножения относительно суммы*).

Отсюда легко вывести и распределительное свойство умножения относительно разности:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

По определению разности, это прямо следует из того, что

$$(a - b) \cdot c + b \cdot c = [(a - b) + b] \cdot c = a \cdot c.$$

Применим еще свойство III 5° к доказательству того, что

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

В самом деле [II 3°]

$$a + 0 = a, \quad (a + 0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

откуда следует $0 \cdot b = 0$, а также [III 1°] $b \cdot 0 = 0$.

*) Ввиду III 1°, это равенство, определяющее частное, можно написать и так: $b \cdot c = a$.

Обратно, если $a \cdot b = 0$, и $b \neq 0$, то необходимо $a = 0$. Действительно, $a = \frac{0}{b}$, но одновременно и $0 = \frac{0}{b}$ (так как $b \cdot 0 = 0$), а частное единственно.

Наконец, укажем свойство, связывающее знак $>$ со знаком произведения:

III 6° *из* $a > b$ *и* $c > 0$ *следует* $a \cdot c > b \cdot c$.

На этом основывается почленное перемножение неравенств с положительными членами. Отсюда же получается, что при $a > 0$ и $b > 0$ также и $a \cdot b > 0$.

Заметим, что $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$; это следует из того, что

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Теперь нетрудно видеть, что, если $a < 0$, $b > 0$, так что $a = -|a|$, $b = |b|$, то

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0;$$

то же будет при $a > 0$, $b < 0$. Если же $a < 0$, $b < 0$, то

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot (-|b|) = -[|a \cdot|(-|b|)] = \\ = -[-(|a| \cdot |b|)] = |a| \cdot |b| > 0.$$

Таким образом, мы полностью восстановили известное правило знаков при умножении, которое является логическим следствием перечисленных свойств рациональных чисел. Иными словами, *правило знаков принудительно навязывается нам, если мы хотим соблюдения упомянутых свойств. То же можно сказать* (как это выяснено выше) *и относительно правила умножения на* 0.

Имея в своем распоряжении свойства сложения и умножения, мы теперь могли бы доказать то свойство плотности области рациональных чисел, которое мы сформулировали выше в числе основных свойств [I 3°]. Именно, с помощью их можно показать, например, что из $a > b$ следует $a > \frac{a+b}{2} > b$.

5. Аксиома Архимеда. Заключим наш перечень основных свойств рациональных чисел следующим простым и важным утверждением, которое не вытекает из перечисленных свойств:

IV 1° *каково бы ни было число* $c > 0$, *существует натуральное число* n, *которое больше* c (*«аксиома Архимеда»*).

В действительности Архимедом было высказано геометрическое предложение, которое и известно под именем «аксиомы Архимеда»:

если на прямой даны любые два отрезка A *и* B, *то можно* A *повторить слагаемым столько раз, чтобы сумма была больше* B:

$$\underbrace{A + A + \ldots + A}_{n \text{ раз}} = A \cdot n > B.$$

Если перефразировать это утверждение для положительных чисел a и b, то оно сведется к существованию такого натурального числа n, что

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ раз}}=a\cdot n>b.$$

Это неравенство, если использовать уже изученные свойства рациональных чисел, оказывается равносильным такому: $n>\frac{b}{a}$; обозначив частное $\frac{b}{a}$ через c, мы и получим ту формулировку, которая дана выше.

§ 2. Введение иррациональных чисел. Упорядочение области вещественных чисел

6. Определение иррационального числа. Множество рациональных чисел, со всеми их свойствами, перечисленными в § 1, считается данным.

Мы изложим теорию иррациональных чисел, следуя Дедекинду (R. Dedekind). В основе этой теории лежит понятие о сечении в области рациональных чисел. Рассмотрим разбиение множества всех рациональных чисел на два не пустые (т. е. действительно содержащие хоть по одному числу) множества A, A'. Мы будем называть такое разбиение сечением, если выполняются условия:

1° *каждое рациональное число попадает в одно, и только в одно* *), *из множеств A или A'*;

2° *каждое число a множества A меньше каждого числа a' множества A'*.

Множество A называется нижним классом сечения, множество A' — верхним классом. Сечение будем обозначать $A|A'$.

Из определения сечения следует, что всякое рациональное число, меньшее числа a нижнего класса, также принадлежит нижнему классу. Аналогично, всякое рациональное число, большее числа a' верхнего класса, и само принадлежит верхнему классу.

Пример 1. Определим A как множество всех рациональных чисел a, удовлетворяющих неравенству $a<1$, а к множеству A' причислим все числа a', для которых $a'\geqslant 1$.

Легко проверить, что таким образом мы действительно получим сечение. Число 1 принадлежит классу A' и является, очевидно, в нем наименьшим числом. С другой стороны, нет наибольшего числа в классе A, так как, какое бы число a из A мы ни взяли, всегда можно

---

*) То обстоятельство, что каждое рациональное число попадает только в один из классов, вытекает, впрочем, из требования 2°.

указать рациональное число a_1, лежащее между ним и единицей, следовательно, большее a и тоже принадлежащее классу A.

Пример 2. К нижнему классу A отнесем все рациональные числа a, меньшие или равные $1: a \leqslant 1$; к верхнему — рациональные числа a', бо́льшие $1: a' > 1$.

Это также будет сечение, причем здесь в верхнем классе нет наименьшего числа, а в нижнем есть наибольшее (именно, 1).

Пример 3. Отнесем к классу A все положительные рациональные числа a, для которых $a^2 < 2$, число 0 и все отрицательные рациональные числа, а к классу A' — все положительные рациональные числа a' для которых $a'^2 > 2$.

Как легко убедиться, мы опять получили сечение. Здесь ни в классе A нет наибольшего числа, ни в классе A' — наименьшего. Докажем, например, первое из этих утверждений (второе доказывается аналогично). Пусть a — любое положительное число класса A, тогда $a^2 < 2$. Покажем, что можно подобрать такое целое положительное n, что

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

так что и число $a+\frac{1}{n}$ будет принадлежать классу A.

Это неравенство равносильно таким:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < 2-a^2.$$

Последнее неравенство и подавно будет выполнено, если n удовлетворит неравенству $\frac{2a+1}{n} < 2-a^2$, для чего достаточно взять

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2},$$

а это всегда возможно [по «аксиоме Архимеда», IV 1°]. Итак, каково бы ни было положительное число a из класса A, в этом же классе A найдется большее его число; так как для чисел $a \leqslant 0$ это утверждение непосредственно очевидно, то никакое число класса A не является в нем наибольшим.

Легко понять, что *не может существовать сечение, для которого одновременно в нижнем классе нашлось бы наибольшее число a_0, а в верхнем классе — наименьшее a'_0.* Пусть, в самом деле, такое сечение существует. Возьмем тогда, пользуясь плотностью области рациональных чисел [I 3°], любое рациональное число c, заключающееся между a_0 и $a'_0: a_0 < c < a'_0$. Число c не может принадлежать классу A, ибо иначе a_0 не было бы наибольшим числом в этом классе, и по аналогичной причине c не может принадлежать классу A', а это противоречит свойству 1° сечения, входящему в определение этого понятия.

Таким образом, сечения могут быть только трех видов, иллюстрируемых как раз примерами 1, 2, 3:

1) либо в нижнем классе A нет наибольшего числа, а в верхнем классе A' есть наименьшее число r;

2) либо в нижнем классе A имеется наибольшее число r, а в верхнем классе A' нет наименьшего;

3) либо, наконец, ни в нижнем классе нет наибольшего числа, ни в верхнем классе — наименьшего.

В первых двух случаях мы говорим, что сечение производится рациональным числом r (которое является пограничным между классами A и A') или что сечение определяет рациональное число r. В примерах 1, 2 таким числом r была 1. В третьем случае пограничного числа не существует, сечение не определяет никакого рационального числа. Введем теперь новые объекты — иррациональные числа, условившись говорить, что *всякое сечение вида* 3) *определяет некоторое иррациональное число* α. Это число α заменяет недостающее пограничное число, мы как бы вставляем его между всеми числами a класса A и всеми числами a' класса A'. В примере 3) это вновь созданное число, как легко догадаться, и будет $\sqrt{2}$.

Не вводя для иррациональных чисел никаких однотипных обозначений *), мы неизменно будем связывать иррациональное число α с тем сечением $A|A'$ в области рациональных чисел, которое его определяет.

Для однообразия нам часто удобно будет то же сделать и по отношению к рациональному числу r. Но для каждого числа r существует два определяющих его сечения: в обоих случаях числа $a<r$ относятся к нижнему классу, числа же $a'>r$ — к верхнему, но само число r можно по произволу включить либо в нижний класс (тогда r там будет наибольшим), либо в верхний (и r там будет наименьшим). Для определенности мы условимся раз навсегда, говоря о сечении, определяющем рациональное число r, включать это число в верхний класс.

Числа рациональные и иррациональные получили общее название вещественных (или действительных) чисел. Понятие вещественного числа является одним из основных понятий математического анализа.

7. Упорядочение области вещественных чисел. *Два иррациональных числа α и β, определяемых соответственно сечениями $A|A'$ и $B|B'$, считаются равными в том и только в том*

---

*) Речь идет о конечных обозначениях; со своего рода бесконечными обозначениями иррациональных чисел читатель познакомится в 9. Чаще всего индивидуально заданные иррациональные числа обозначают в зависимости от их происхождения и роли: $\sqrt{2}$, $\log 5$, $\sin 10°$ и т. п.

случае, если эти сечения тождественны; впрочем, достаточно потребовать совпадения нижних классов A и B, ибо верхние классы A' и B' тогда совпадут сами собой. Это определение можно сохранить и в случае, когда числа α и β рациональны. Иными словами, *если два рациональных числа α и β равны, то определяющие их сечения совпадают, и, обратно, — из совпадения сечений вытекает равенство чисел* α и β. При этом разумеется, следует учесть условие, заключенное выше насчет рациональных чисел *).

Перейдем теперь к установлению понятия «больше» по отношению к вещественным числам. Для рациональных чисел это понятие уже установлено. Для рационального числа r и иррационального числа α понятие «больше» было, собственно, установлено в **6**: именно, если α определяется сечением $A|A'$, мы считаем, что α больше всех рациональных чисел, входящих в класс A, и в то же время все числа класса A' больше α.

Пусть теперь имеем два иррациональных числа α и β, причём α определяется сечением $A|A'$, а β — сечением $B|B'$. Мы будем считать то число бо́льшим, у которого нижний класс больше. Точнее говоря, *мы будем считать $\alpha > \beta$, если класс A целиком содержит в себе класс B, не совпадая с ним.* (Это условие, очевидно, равносильно тому, что класс B' целиком содержит в себе класс A', не совпадая с ним.) Легко проверить, что *это определение может быть сохранено и для случаев, когда одно из чисел α, β или даже оба — рациональны.*

Покажем, что для вещественных чисел выполняются свойства I 1° и 2°.

I 1° *Для каждой пары (вещественных) чисел α и β имеет место одно, и только одно, из соотношений:*

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \beta > \alpha.$$

Если сечение $A|A'$, определяющее число α, совпадает с сечением $B|B'$, определяющим число β, то $\alpha = \beta$. Если эти сечения не совпадают, то либо A целиком содержит в себе B, и тогда $\alpha > \beta$, либо этого нет. В последнем случае существует элемент b_0 класса B, попадающий в класс A'. Тогда для любого элемента a класса A имеем $a < b_0$. Поэтому класс B содержит класс A, не совпадая с ним, и мы имеем $\beta > \alpha$.

I 2° *Из $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ следует, что $\alpha > \gamma$.*

Пусть числа α, β, γ (среди которых могут быть и рациональные) определяются сечениями $A|A'$, $B|B'$, $C|C'$. Если $\alpha > \beta$, то по определению понятия «больше» класс A содержит в себе класс B, не совпадая с ним. В свою очередь, раз $\beta > \gamma$, класс B содержит в себе

---

*) Без этого условия, например, сечения, рассмотренные в примерах 1 и 2 [**6**], оба определяли бы одно и то же число 1, не будучи тождественными.

класс C, не совпадая с ним. Следовательно, класс A целиком содержит в себе класс C, не совпадая с ним, т. е. $\alpha > \gamma$.

Понятие «меньше» устанавливается теперь, как и в **2**: мы говорим, что $\alpha < \beta$, если $\beta > \alpha$. Точно так же знак $<$ обладает транзитивным свойством, подобно знаку $>$.

8. Вспомогательные предложения. Установим теперь свойство плотности области всех вещественных чисел (ср. I 3°); точнее, мы докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Каковы бы ни были два вещественных числа α и β, причём $\alpha > \beta$, всегда найдётся рациональное число r, заключённое между ними: $\alpha > r > \beta$* (а следовательно — бесчисленное множество таких рациональных чисел).

Так как $\alpha > \beta$, то нижний класс A сечения, определяющего число α, целиком содержит в себе нижний класс B для числа β, не совпадая с B. Поэтому в A найдется такое рациональное число r, которое не содержится в B и, следовательно, принадлежит B'; для него

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(равенство могло бы иметь место, лишь если β рационально). Но так как в A нет наибольшего числа, то, в случае надобности, увеличив r, можно исключить равенство.

Замечание. Установив, что между вещественными числами α и β (если $\alpha > \beta$) необходимо содержится рациональное (а не только вещественное) число, мы фактически доказали более сильное свойство области вещественных чисел, чем плотность. В дальнейшем нам придётся пользоваться этой усиленной плотностью.

Отсюда непосредственно получается

Лемма 2. *Пусть даны два вещественных числа α и β. Если, какое бы ни взять число $e > 0$, числа α и β могут быть заключены между одними и теми же рациональными границами s и s':*

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \quad s' \geqslant \beta \geqslant s,$$

разность которых меньше e:

$$s' - s < e,$$

то числа α и β необходимо равны.

Доказательство будем вести от противного. Пусть, например, $\alpha > \beta$. По лемме 1, между α и β можно вставить два рациональных числа r и $r' > r$:

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

Тогда для любых двух чисел s и s', между которыми содержатся α и β, будут, очевидно, выполняться неравенства

$$s' > r' > r > s,$$

откуда

$$s' - s > r' - r > 0,$$

так что разность $s'-s$, вопреки условию леммы, не может быть сделана, например, меньшей числа $e=r'-r$. Это противоречие доказывает лемму.

9. Представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью. Мы имеем в виду такое представление, при котором дробная часть (мантисса) положительна, в то время, как целая часть может оказаться как положительной, так и отрицательной или нулем.

Предположим сначала, что рассматриваемое вещественное число α не является ни целым числом, ни какой-либо конечной десятичной дробью. Станем искать его десятичные приближения. Если оно определяется сечением $A|A'$, то прежде всего легко убедиться, что в классе A найдется целое число M, а в классе A' — целое же число $N>M$. Прибавляя к M по единице, необходимо придем к таким двум последовательным целым числам C_0 и C_0+1, что

$$C_0<\alpha<C_0+1.$$

При этом число C_0 может оказаться положительным, отрицательным или нулем.

Далее если разделить промежуток между C_0 и C_0+1 на десять равных частей числами

$$C_0{,}1;\ C_0{,}2;\ \ldots;\ C_0{,}9,$$

то α попадет в один (и только в один) из частичных промежутков, и мы придем к двум числам, разнящимся на $\frac{1}{10}$: $C_0{,}c_1$ и $C_0{,}c_1+\frac{1}{10}$, для которых

$$C_0{,}c_1<\alpha<C_0{,}c_1+\frac{1}{10}.$$

Продолжая этот процесс дальше, после определения цифр $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, мы n-ю цифру c_n определим неравенствами

$$C_0{,}c_1c_2\ldots c_n<\alpha<C_0{,}c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

Таким образом, в процессе нахождения десятичных приближений числа α мы построили целое число C_0 и бесконечный ряд цифр $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. Составленную из них *бесконечную десятичную дробь, т. е. символ*

$$C_0{,}c_1c_2\ldots c_n\ldots \qquad (2)$$

можно рассматривать как представление вещественного числа α.

В исключенном случае, когда α само является целым числом или, вообще, конечной десятичной дробью, можно подобным же образом последовательно определить число C_0 и цифры $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, исходя из более общих, чем (1), соотношений

$$C_0{,}c_1c_2\ldots c_n\leqslant\alpha\leqslant C_0c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1a)$$

Дело в том, что в некий момент число α совпадет с одним из концов промежутка, в который мы его заключаем, с левым или с правым — по нашему произволу; начиная с этого момента, соответственно, слева или справа в (1а) уже постоянно будет иметь место равенство. Смотря по тому, какая из этих возможностей осуществляется, последующие цифры окажутся все нулями или все девятками. Таким образом, на этот раз число α имеет двоякое представление — одно с нулём в периоде, а другое — с девяткой в периоде, например,

$$3,826 = 3,826000\ldots = 3,825999\ldots,$$
$$-3,826 = \overline{4},174000\ldots = \overline{4},173999\ldots.$$

Пусть теперь, наоборот, по произволу задана бесконечная десятичная дробь (2); покажем, что всегда найдется вещественное число α, для которого именно эта дробь и служит представлением. С этой целью рассмотрим отрезки дроби (2):

$$C_n = C_0,c_1c_2\ldots c_n, \tag{3}$$

которые служат как-бы «приближенными значениями по недостатку» для искомого числа, а также его «приближенные значения по избытку»

$$C'_n = C_0,c_1c_2\ldots c_n + \frac{1}{10^n}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что каждое C_n меньше каждого C'_m (не только при $m = n$, но и при $m \gtrless n$). Теперь мы следующим образом произведём сечение в области рациональных чисел: к верхнему классу A' отнесем такие рациональные числа a', которые больше всех C_n (например, все числа C'_n), а к нижнему A — все остальные (например, сами числа C_n). Легко проверить, что это — сечение; оно определяет вещественное число α, которое и будет искомым.

Действительно, так как α является пограничным числом между двумя классами, то, в частности,

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n,$$

т. е. число α удовлетворяет всем неравенствам вида (1а). Этим и доказано, что взятая по произволу дробь (2) является представлением найденного числа.

Разность между десятичными приближениями (4) и (3) по избытку и по недостатку, равная $\frac{1}{10^n}$, с возрастанием n может быть сделана меньшей любого рационального числа $e > 0$. Действительно, так как натуральных чисел, не превосходящих числа $\frac{1}{e}$, существует лишь конечное число, то неравенство $10^n \leqslant \frac{1}{e}$ или равносильное ему:

$\frac{1}{10^n} \geq e$ может выполняться лишь для конечного числа значений n; для всех же остальных будет

$$\frac{1}{10^n} < e.$$

Это замечание, ввиду леммы 2, позволяет заключить, что число β, отличное от α, не может удовлетворять всем тем же неравенствам (1) или (1a), что и α, и следовательно имеет представление в виде бесконечной десятичной дроби, отличное от представления числа α.

Отсюда, в частности, следует, что представление числа, не равного никакой конечной десятичной дроби, не имеет ни нуля, ни девятки в периоде — поскольку каждая дробь с нулем или с девяткой в периоде явно выражает конечную десятичную дробь.

Отныне читатель может представлять себе вещественные числа как бесконечные десятичные дроби. Из школьного курса известно, что периодическая бесконечная дробь изображает рациональное число и, обратно, каждое рациональное число разлагается именно в периодическую дробь. Таким образом, *изображениями вновь введенных нами иррациональных чисел служат непериодические бесконечные дроби.* (Это представление также может быть отправной точкой для построения теории иррациональных чисел.)

Замечание. В последующем нам не раз придется пользоваться рациональными приближениями a и a' к вещественному числу α:

$$a < \alpha < a',$$

разность которых произвольно мала. Для рационального α существование чисел a и a' очевидно; для иррационального же α в качестве a и a' можно было бы, например, использовать десятичные приближения C_n и C_n' при достаточно большом n.

10. Непрерывность области вещественных чисел. Обратимся теперь к рассмотрению одного весьма важного свойства области всех вещественных чисел, которое ее существенно отличает от области чисел рациональных. Рассматривая сечения в области рациональных чисел, мы видели, что иной раз для такого сечения в этой области не находилось пограничного числа, про которое можно было бы сказать, что оно производит сечение. Именно эта неполнота области рациональных чисел, наличие в ней этих пробелов и послужили основанием для введения новых чисел — иррациональных. Станем теперь рассматривать сечения в области всех вещественных чисел. Под таким сечением мы понимаем разбиение этой области на два непустых множества A, A', при котором:

1° *каждое вещественное число попадает в одно, и только одно**), *из множеств* A, A';

*) Ср. сноску на стр. 17.

2° *каждое число α множества A меньше каждого числа α' множества A'.*

Возникает вопрос: всегда ли для такого сечения $A|A'$ найдется — среди вещественных чисел — пограничное число, производящее это сечение, или в этой области существуют пробелы (которые могли бы послужить основанием для введения еще новых чисел)?

Оказывается, что на деле таких пробелов нет:

Основная теорема (Дедекинда). *Для всякого сечения $A|A'$ в области вещественных чисел существует вещественное число β, которое производит это сечение. Это число β будет* 1) *либо наибольшим в нижнем классе A,* 2) *либо наименьшим в верхнем классе A'.*

Это свойство области вещественных чисел называют ее полнотой, а также — непрерывностью (или сплошностью).

Доказательство. Обозначим через A множество всех рациональных чисел, принадлежащих к A, а через A' — множество всех рациональных чисел, принадлежащих к A'. Легко убедиться, что множества A и A' образуют сечение в области всех рациональных чисел.

Это сечение $A|A'$ определяет некоторое вещественное число β. Оно должно попасть в один из классов A, A'; предположим, что β попадает, например, в нижний класс A, и докажем, что тогда осуществляется случай 1), а именно, β является в классе A наибольшим. В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы другое число α_0 этого класса, большее β. Вставим (опираясь на лемму 1) между α_0 и β рациональное число r:

$$\alpha_0 > r > \beta.$$

r также принадлежит классу A и, следовательно, принадлежит классу A. Мы пришли к противоречию: рациональное число r, принадлежащее нижнему классу сечения, определяющего число β, больше этого числа! Этим доказано наше утверждение.

Аналогичное рассуждение показывает, что если β попадает в верхний класс A', то осуществится случай 2).

Замечание. Одновременное существование в классе A наибольшего числа и в классе A' наименьшего — невозможно; это устанавливается так же, как и для сечений в множестве рациональных чисел (с помощью леммы 1).

11. Границы числовых множеств. Мы используем основную теорему [10], чтобы здесь же установить некоторые понятия, играющие важную роль в современном анализе. (Они понадобятся нам уже при рассмотрении арифметических действий над вещественными числами.)

Представим себе произвольное бесконечное множество вещественных чисел; оно может быть задано любым образом. Такими

множествами являются, например, множество натуральных чисел, множество всех правильных дробей, множество всех вещественных чисел между 0 и 1, множество корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, и т. п.

Любое из чисел множества обозначим через x, так что x есть типовое обозначение чисел множества; само же множество чисел x будем обозначать через $\mathscr{X} = \{x\}$.

Если для рассматриваемого множества $\{x\}$ существует такое число M, что все $x \leqslant M$, то будем говорить, что наше множество ограничено сверху (числом M); само число M в этом случае есть верхняя граница множества $\{x\}$. Например, множество правильных дробей ограничено сверху числом 1 или любым числом >1; натуральный ряд сверху не ограничен.

Аналогично этому: если найдётся такое число m, что все $x \geqslant m$, то, говорят, что множество $\{x\}$ ограничено снизу (числом m), а само число m называют нижней границей множества $\{x\}$. Например, натуральный ряд ограничен снизу числом 1 или любым числом <1; множество правильных дробей ограничено снизу числом 0 или любым числом <0.

Ограниченное сверху (снизу) множество может быть при этом как ограничено так и неограничено снизу (сверху). Так, множество правильных дробей ограничено и сверху, и снизу, а натуральный ряд ограничен снизу, но не ограничен сверху.

Если множество сверху (снизу) не ограничено, то за его верхнюю (нижнюю) границу принимают «несобственное число» $+\infty$ $(-\infty)$. Относительно этих «несобственных» или «бесконечных» чисел мы считаем, что

$$-\infty < +\infty \quad \text{и} \quad -\infty < a < +\infty,$$

каково бы ни было вещественное («конечное») число a.

Знаки $+\infty$ и $-\infty$ читаются так: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность».

Если множество ограничено сверху, т. е. имеет конечную верхнюю границу M, то одновременно оно имеет и бесконечное множество верхних границ (так как, например, любое число $>M$, очевидно, также будет верхней границей). Из всех верхних границ особый интерес представляет наименьшая, которую мы будем называть *точной верхней границей*. Аналогично, если множество ограничено снизу, то наибольшую из всех нижних границ будем называть *точной нижней границей*. Так, для множества всех правильных дробей точными границами будут, соответственно, 0 и 1.

Является вопрос: всегда ли для ограниченного сверху (снизу) множества существует точная верхняя (нижняя) граница? Действительно, так как верхних (нижних) границ в этом случае бесконечное множество, а среди бесконечного множества чисел не всегда

найдется наименьшее или наибольшее*), то самое существование такого наименьшего (наибольшего) числа из всех верхних (нижних) границ рассматриваемого множества требует доказательства.

Теорема. *Если множество $\mathscr{X}=\{x\}$ ограничено сверху (снизу), то оно имеет и точную верхнюю (нижнюю) границу.*

Доказательство. Проведем рассуждение по отношению к верхней границе. Рассмотрим два случая:

1° Среди чисел x множества $\mathscr{X}$ найдется наибольшее $\bar{x}$. Тогда все числа множества будут удовлетворять неравенству $x \leqslant \bar{x}$, т. е. $\bar{x}$ будет верхней границей для $\mathscr{X}$. С другой стороны, $\bar{x}$ принадлежит $\mathscr{X}$; следовательно, для любой верхней границы M выполняется неравенство $\bar{x} \leqslant M$. Отсюда заключаем, что $\bar{x}$ есть точная верхняя граница множества $\mathscr{X}$.

2° Среди чисел x множества $\mathscr{X}$ нет наибольшего. Произведём сечение в области всех вещественных чисел следующим образом. К верхнему классу A' отнесём все верхние границы α' множества $\mathscr{X}$, а к нижнему классу A — все остальные вещественные числа α. При этом разбиении все числа x множества $\mathscr{X}$ попадут в класс A, ибо ни одно из них — по допущению — не будет наибольшим. Таким образом, оба класса A, A' непусты. Это разбиение действительно является сечением, так как все вещественные числа распределены по классам и каждое число из класса A' больше любого числа из класса A. По основной теореме Дедекинда [10], должно существовать вещественное число β, производящее сечение. Все числа x, как принадлежащие классу A, не превосходят этого «пограничного» числа β, т. е. β служит верхней границей для x, следовательно, само принадлежит классу A' и является там наименьшим. Таким образом, β как наименьшая из всех верхних границ и есть искомая точная верхняя граница множества $\mathscr{X}=\{x\}$.

Совершенно так же доказывается и вторая половина теоремы (относящаяся к существованию точной нижней границы).

Если M^* есть точная верхняя граница числового множества $\mathscr{X}=\{x\}$, то для всех x будет

$$x \leqslant M^*.$$

Возьмем теперь произвольное число α, меньшее M^*. Так как M^* — наименьшая из верхних границ, то число α наверное не будет верхней границей для множества $\mathscr{X}$, т. е. найдется такое число x' из $\mathscr{X}$, что

$$x' > \alpha.$$

Этими двумя неравенствами вполне характеризуется точная верхняя граница множества $\mathscr{X}$.

*) Как их нет, например, среди всех правильных дробей.

Аналогично, точная нижняя граница m^* множества $\mathcal{X}$ характеризуется тем, что для всех x из $\mathcal{X}$

$$x \geqslant m^*$$

и, каково бы ни было число β, большее m^*, найдется число x'' из $\mathcal{X}$ такое, что

$$x'' < \beta.$$

Для обозначения точной верхней границы M^* и точной нижней границы m^* множества чисел $\mathcal{X}$ употребляют символы

$$M^* = \sup \mathcal{X} = \sup \{x\}, \qquad m^* = \inf \mathcal{X} = \inf \{x\}$$

(по-латыни: supremum — наивысшее, infimum — наинизшее).

Отметим одно очевидное умозаключение, которое часто будет встречаться в дальнейшем:

если все числа x некоторого множества удовлетворяют неравенству $x \leqslant M$, то и $\sup \{x\} \leqslant M$.

Действительно, число M оказывается одной из верхних границ множества, а потому наименьшая из всех верхних границ его не превосходит.

Аналогично, *из неравенства $x \geqslant m$ следует, что и* $\inf \{x\} \geqslant m$.

Условимся, наконец, если множество $\mathcal{X} = \{x\}$ не ограничено сверху, говорить, что его точная верхняя граница есть $+\infty$: $\sup \{x\} = +\infty$. Аналогично, если множество $\mathcal{X} = \{x\}$ не ограничено снизу, то говорят, что его точная нижняя граница есть $-\infty$: $\inf \{x\} = -\infty$.

§ 3. Арифметические действия над вещественными числами

12. Определение суммы вещественных чисел. Обратимся теперь к установлению понятия о действиях над вещественными числами. Греческие буквы α, β, γ в последующем означают именно вещественные числа, как рациональные, так и иррациональные.

Пусть имеем два вещественных числа α и β. Станем рассматривать рациональные числа a, a' и b, b', удовлетворяющие неравенствам:

$$a < \alpha < a' \quad \text{и} \quad b < \beta < b'. \tag{1}$$

Суммой $\alpha + \beta$ чисел α и β назовем такое вещественное число γ, которое содержится между всеми суммами вида $a + b$, с одной стороны, и всеми суммами вида $a' + b'$, — с другой:

$$a + b < \gamma < a' + b'. \tag{2}$$

Удостоверимся, прежде всего, что такое число γ существует для любой пары вещественных чисел α, β.

Рассмотрим множество всевозможных сумм $a+b$. Это множество ограничено сверху, например, любой суммой вида $a'+b'$. Положим же [11]

$$\gamma = \sup\{a+b\}.$$

Тогда $a+b \leqslant \gamma$ и, в то же время, $\gamma \leqslant a'+b'$.

Так как, каковы бы ни были рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие условиям (1), всегда можно числа a, b увеличить, а числа a', b', уменьшить с сохранением этих условий, то в полученных только что неравенствах, соединенных с равенствами, равенства на деле ни в одном случае быть не может. Таким образом, число γ удовлетворяет определению суммы.

Возникает, однако, вопрос, однозначно ли сумма $\gamma = \alpha+\beta$ определяется неравенствами (2). Для того чтобы убедиться в единственности суммы, подберём, по замечанию в **9**, рациональные числа a, a', b, b' так, чтобы было

$$a' - a < e \quad \text{и} \quad b' - b < e,$$

где e — произвольно малое рациональное положительное число. Отсюда

$$(a'+b') - (a+b) = (a'-a) + (b'-b) < 2e,$$

т. е. и эта разность может быть сделана сколь угодно малой *). А тогда, по лемме 2, существует только одно число, содержащееся между суммами $a+b$ и $a'+b'$.

Наконец, заметим, что если числа α и β оба рациональны, то их обычная сумма $\gamma = \alpha+\beta$, очевидно, удовлетворяет неравенствам (2). Таким образом, данное выше общее определение суммы двух вещественных чисел не противоречит старому определению суммы двух рациональных чисел.

13. Свойства сложения. Легко удостовериться, что для вещественных чисел сохраняются свойства:

$$\text{II } 1^\circ \ \alpha+\beta = \beta+\alpha; \quad \text{II } 2^\circ \ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma);$$

$$\text{II } 3^\circ \ \alpha+0 = \alpha.$$

Докажем, например, последнее. Если рациональные числа a, a', b, b' таковы, что

$$a < \alpha < a', \quad b < 0 < b'$$

то, очевидно,

$$a+b < a < \alpha < a' < a'+b'.$$

*) Число $2e$ становится меньшим любого числа $e' > 0$, если взять $e < \frac{e'}{2}$.

Таким образом, α есть вещественное число, заключенное между числами вида $a+b$ и $a'+b'$, между которыми заключена, по определению, и сумма $a+0$. Но такое число может быть только одно; поэтому $\alpha+0=\alpha$, что и требовалось доказать.

Обратимся к свойству II 4° и докажем, что *для каждого вещественного числа α существует* (*симметричное ему*) *число* $-\alpha$, *удовлетворяющее условию* $\alpha+(-\alpha)=0$.

При этом достаточно ограничиться случаем иррационального числа α.

Предполагая, что число α определяется сечением $A|A'$, мы определим число $-\alpha$ следующим образом. К нижнему классу $\bar{A}$ числа $-\alpha$ мы отнесем все рациональные числа $-a'$, где a' — любое число класса A', а к верхнему классу $\bar{A}'$ этого числа отнесем все числа $-a$, где a — любое число класса A. Нетрудно видеть, что построенное разбиение есть сечение и, действительно, определяет вещественное (в данном случае — иррациональное) число: это число обозначим $-\alpha$.

Докажем теперь, что оно удовлетворяет указанному выше условию. Пользуясь самим определением числа $-\alpha$, видим, что сумма $\alpha+(-\alpha)$ есть единственное вещественное число; заключенное между числами вида $a-a'$ и $a'-a$, где a и a' рациональны и $a<\alpha<a'$. Но, очевидно,

$$a-a'<0<a'-a,$$

так что и число 0 заключено между только что упомянутыми числами. Ввиду единственности числа, обладающего этим свойством, имеем

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, установим свойство:

II 5° *из* $\alpha>\beta$ *следует* $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

Если $\alpha>\beta$, то между ними можно вставить два рациональных числа r_1 и r_2: $\alpha>r_1>r_2>\beta$.

По замечанию в **9**, существуют такие два рациональных числа c и c', что

$$c<\gamma<c' \text{ и } c'-c<r_1-r_2.$$

Отсюда

$$r_1+c>r_2+c',$$

а по определению суммы

$$\alpha+\gamma>r_1+c, \quad r_2+c'>\beta+\gamma.$$

Сопоставляя все эти неравенства, мы и приходим к требуемому заключению.

Таким образом, по отношению к сложению область вещественных чисел обладает всеми основными свойствами II 1° — 5°, которые в **3** были первоначально сформулированы для рациональных чисел.

Следовательно, на вещественные числа автоматически переносятся и все формально логические следствия из этих свойств. В частности, для вещественных чисел может быть буквально повторено все, сказанное в **3** непосредственно после изложения II группы свойств, т. е. могут быть доказаны существование и однозначность разности $\alpha-\beta$ чисел α и β, установлено понятие абсолютной величины числа α (для которой мы сохраняем обозначение $|\alpha|$) и т. д.

14. Определение произведения вещественных чисел. Перейдем к умножению вещественных чисел, ограничиваясь сначала положительными числами. Пусть же даны два таких числа α и β. Мы здесь также станем рассматривать всевозможные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (1), но и эти числа предположим положительными.

Произведением $\alpha\beta$ двух положительных вещественных чисел α и β назовём такое вещественное число γ, которое содержится между всеми произведениями вида ab, с одной стороны, и всеми произведениями вида $a'b'$, — с другой:

$$ab<\gamma<a'b'. \tag{3}$$

Для доказательства существования такого числа γ возьмём множество всевозможных произведений ab; оно ограничено сверху любым из произведений вида $a'b'$. Если положить

$$\gamma=\sup\{ab\},$$

то, конечно, $ab\leqslant\gamma$, но одновременно и $\gamma\leqslant a'b'$.

Возможность увеличить числа a, b и уменьшить числа a', b' (как и в случае суммы) позволяет исключить здесь знак равенства, так что число γ удовлетворяет определению произведения.

Единственность произведения вытекает из следующих соображений. Подберем, по замечанию в **9**, рациональные числа a, a' и b, b' так, чтобы было

$$a'-a<e \quad \text{и} \quad b'-b<e,$$

где e — произвольно малое рациональное положительное число. При этом можно считать, что числа a и b положительны, а числа a' и b' не превосходят, соответственно, некоторых наперед фиксированных чисел a'_0 и b'_0. Тогда разность

$$a'b'-ab=a'(b'-b)+b(a'-a)<(a'_0+b'_0)\cdot e,$$

т. е. также может быть сделана сколь угодно малой*), а этого, по

*) Заметим, что $(a'_0+b'_0)e$ становится меньшим любого числа $e'>0$, если взять $e<\frac{e'}{a'_0+b'_0}$.

лемме 2, достаточно для утверждения, что неравенствам (3) может удовлетворять только одно число γ.

Если положительные числа α и β оба рациональны, то их обычное произведение $\gamma = \alpha\beta$ удовлетворяет, очевидно, неравенствам (3), т. е. получается таким же и по общему определению произведения двух вещественных чисел — противоречия нет.

Наконец, для того чтобы определить произведение произвольной пары вещественных чисел (не обязательно положительных), заключим следующие соглашения.

Прежде всего, условимся, что

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0,$$

каково бы ни было α.

Если же оба множителя отличны от 0, то положим в основу обычное «правило знаков»:

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ одного знака,}$$
$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ разных знаков}$$

(чтó означает произведение положительных чисел $|\alpha|$ и $|\beta|$ — мы уже знаем).

Эти соглашения, как мы видели в **4**, в некотором смысле обязательны для нас, если мы хотим, чтобы действия над вещественными числами обладали всеми основными свойствами действий над рациональными числами.

15. Свойства умножения. Как и в случае рациональных чисел, для любых вещественных чисел сохраняются свойства:

III 1° $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

III 2° $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;

III 3° $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

Для примера докажем второе из них, начав со случая, когда все три числа — α, β, γ — положительны. Пусть a, a', b, b', c, c' — произвольные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < a < \alpha < a', \quad 0 < b < \beta < b', \quad 0 < c < \gamma < c'.$$

Тогда, по самому определению произведения двух вещественных чисел, имеем

$$ab < \alpha\beta < a'b' \text{ и } bc < \beta\gamma < b'c'.$$

Пользуясь еще раз тем же определением, получим

$$(ab)c < (\alpha\beta)\gamma < (a'b')c' \text{ и } a(bc) < \alpha(\beta\gamma) < a'(b'c').$$

Так как для рациональных чисел доказываемое свойство уже известно, то вещественные числа $(\alpha\beta)\gamma$ и $\alpha(\beta\gamma)$ оказываются заключенными между одними и теми же границами:

$$(ab)c = a(bc) \text{ и } (a'b')c' = a'(b'c').$$

Но легко показать, что за счет сближения множителей a и a', b и b', c и c' между собой и разность произведений $a'b'c' - abc$ может быть сделана сколь угодно малой (при этом можно использовать подобное же утверждение в **14** относительно произведений двух множителей). Отсюда, по лемме 2, и получится заключение о равенстве чисел $(\alpha\beta)\gamma$ и $\alpha(\beta\gamma)$.

Переход к случаю чисел произвольных знаков производится непосредственно, если учесть лишь «правило знаков». Если же хоть одно из чисел α, β, γ равно 0, то оба произведения обращаются в 0.

Обратимся к свойству:

III 4° *для каждого вещественного числа* α, *отличного от нуля, существует (обратное ему) число* $\frac{1}{\alpha}$, *удовлетворяющее условию:*

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

Достаточно ограничиться случаем иррационального числа α. Пусть сначала $\alpha > 0$.

Если α определяется сечением $A \mid A'$, то мы следующим образом построим сечение для числа $\frac{1}{\alpha}$. К нижнему классу его $\tilde{A}$ мы отнесем все отрицательные рациональные числа и нуль, а также все числа вида $\frac{1}{a'}$, где a' — любое число класса A'; в верхний же класс $\tilde{A}'$ поместим все числа вида $\frac{1}{a}$, где a — любое положительное число класса A. Легко убедиться, что мы, таким образом, действительно получаем сечение, которое определит положительное вещественное (в данном случае — иррациональное) число; это число обозначим $\frac{1}{\alpha}$.

Покажем, что оно удовлетворяет требуемому условию. Если учесть построение обратного числа, то, по самому определению произведения, число $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$ есть единственное вещественное число, заключенное между числами вида $\frac{a}{a'}$ и $\frac{a'}{a}$, где a и a' — положительные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $a < \alpha < a'$. Но и число 1 заключено между упомянутыми числами:

$$\frac{a}{a'} < 1 < \frac{a'}{a},$$

следовательно, оно и является искомым произведением.

Если $\alpha < 0$, то полагаем

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|};$$

тогда по «правилу знаков»

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = 1.$$

После того как мы убедились, что и по отношению к умножению область вещественных чисел обладает всеми основными свойствами III 1°—4°, ясно, что для этой области сохраняет силу все сказанное в **4** о существовании и единственности частного $\frac{\alpha}{\beta}$ чисел α и β (при условии, что $\beta \neq 0$) и т. д.

Распределительное свойство:

III 5° $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

также имеет место для любых вещественных чисел, что легко доказывается для случая положительных чисел (как и свойство III 2°). К этому случаю приводятся все остальные — путем изменения знаков обеих частей равенства или путем переноса членов из одной части в другую. Исключение, впрочем, представляет случай, когда одно из чисел α, β, γ, $\alpha + \beta$ равно нулю; но для этого случая равенство непосредственно очевидно.

Наконец, свойство:

III 6° *из* $\alpha > \beta$ *и* $\gamma > 0$ *следует* $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

проверяется без труда. Неравенство $\alpha > \beta$ равносильно $\alpha - \beta > 0$; тогда по «правилу знаков» и $(\alpha - \beta) \cdot \gamma > 0$. Но умножение имеет распределительное свойство и относительно разности, так что $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma > 0$, а отсюда $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

16. Заключение. Остается упомянуть еще об «аксиоме Архимеда».

IV 1° *каково бы ни было вещественное число* γ, *существует натуральное число* n, *большее* γ.

Проверка ее легка: ведь в верхнем классе сечения $C|C'$, определяющего число γ, найдется большее его рациональное число c', а для рациональных чисел этот принцип имеет место.

Теперь можно, наконец, считать установленным, что *в области всех вещественных чисел полностью сохраняются правила элементарной алгебры, относящиеся к четырем арифметическим действиям и к сочетанию равенств и неравенств.*

17. Абсолютные величины. В интересах дальнейшего, присовокупим еще несколько замечаний об абсолютных величинах.

Прежде всего, установим, что неравенство: $|\alpha| < \beta$ (где, конечно, $\beta > 0$) равносильно двойному неравенству: $-\beta < \alpha < \beta$.

Действительно, из $|\alpha| < \beta$ следует, что одновременно $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$, т. е. $\alpha > -\beta$. Обратно, если дано, что $\alpha < \beta$ и $\alpha > -\beta$, то имеем одновременно: $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$; но одно из этих чисел α, $-\alpha$ и есть $|\alpha|$, так что наверное $|\alpha| < \beta$.

Аналогично, оказываются равносильными и неравенства:

$$|\alpha| \leqslant \beta \quad \text{и} \quad -\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta.$$

Докажем, далее, полезное неравенство:

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

Складывая почленно очевидные неравенства

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad \text{и} \quad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|,$$

получим

$$-(|\alpha|+|\beta|) \leqslant \alpha+\beta \leqslant |\alpha|+|\beta|,$$

откуда, в силу сделанного выше замечания, и вытекает требуемое неравенство.

С помощью математической индукции оно распространяется на случай любого числа слагаемых:

$$|\alpha+\beta+\ldots+\gamma| \leqslant |\alpha|+|\beta|+\ldots+|\gamma|.$$

Если заменить в доказанном неравенстве β на $-\beta$, то получим

$$|\alpha-\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

Так как $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$, то $|\alpha| \leqslant |\alpha+\beta|+|\beta|$, или

$$|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|.$$

Аналогично

$$|\alpha|-|\beta| \leqslant |\alpha-\beta|.$$

Так как одновременно и

$$|\beta|-|\alpha| \leqslant |\alpha-\beta|,$$

то, очевидно,

$$||\alpha|-|\beta|| \leqslant |\alpha-\beta|.$$

Все эти неравенства будут полезны в теории *пределов*.

§ 4. Дальнейшие свойства и приложения вещественных чисел

18. Существование корня. Степень с рациональным показателем. Определение умножения (и деления) вещественных чисел непосредственно приводит, как и обычно, к определению степени с целым положительным (и отрицательным) показателем. Переходя к степени с вообще рациональным показателем остановимся прежде всего на вопросе о *существовании корня*.

Как мы помним, отсутствие в области рациональных чисел простейших корней послужило одним из поводов к расширению этой области; проверим же, в какой мере произведенное расширение заполнило старые пробелы (не создав при этом новых).

Пусть α — любое вещественное число, n — натуральное число. Как известно, корнем n-й степени из числа α называют такое вещественное число ξ, что

$$\xi^n = \alpha.$$

Мы ограничимся случаем, когда α положительно, и будем искать положительное же ξ, удовлетворяющее этому соотношению, т. е. так называемое **арифметическое значение** корня. Мы докажем, что такое число ξ всегда существует, и притом только одно.

Последнее утверждение относительно единственности числа ξ, впрочем, сразу следует из того, что разным положительным числам соответствуют и разные степени их: если $0<\xi<\xi'$, то $\xi^n<\xi'^n$.

Если существует такое **рациональное** число r, n-я степень которого равна α, то оно и будет искомым числом ξ. Поэтому впредь достаточно ограничиться предположением, что такого **рационального** числа нет.

Построим теперь сечение $X|X'$ в области всех рациональных чисел следующим образом. К классу X отнесем все отрицательные рациональные числа и нуль, а также те из положительных рациональных чисел x, для которых $x^n<\alpha$. К классу X' отнесем положительные рациональные числа x', для которых $x'^n>\alpha$.

Легко видеть, что классы эти не пустые и что X содержит и положительные числа. Если взять, например, натуральное число m так, чтобы было $\frac{1}{m}<\alpha<m$, то и подавно $\frac{1}{m^n}<\alpha<m^n$, так что число $\frac{1}{m}$ входит в X, а число m — в X'.

Прочие требования, предъявляемые к сечению, проверяются непосредственно.

Пусть теперь ξ будет число, определяемое сечением $X|X'$; докажем, что $\xi^n=\alpha$, т. е. что $\xi=\sqrt[n]{\alpha}$. Рассматривая ξ^n как произведение n сомножителей, равных ξ, на основании определения произведения положительных вещественных чисел [14] заключаем, что

$$x^n<\xi^n<x'^n,$$

если x и x' суть положительные рациональные числа, для которых

$$0<x<\xi<x'.$$

Так как, очевидно, x принадлежит классу X, а x' — классу X', то, по определению этих классов, одновременно и

$$x^n<\alpha<x'^n.$$

Но разность $x'-x$ может быть сделана меньшей любого числа $e>0$ (**9**, замечание), причем ничто не мешает считать x' меньшим некоторого наперед фиксированного числа x'_0. В таком случае разность

$$x'^n-x^n=(x'-x)(x'^{n-1}+x\cdot x'^{n-2}+\ldots+x^{n-1})<e\cdot nx_0'^{n-1},$$

т. е. также может быть сделана сколь угодно малой*). Отсюда, по лемме 2, и следует равенство чисел ξ^n и α.

---

*) Заметим, что число $e\cdot nx_0'^{n-1}$ становится меньшим любого числа $e'>0$, если взять $e<\frac{e'}{nx_0'^{n-1}}$.

После того как доказано существование корня, обычным путем устанавливается понятие степени с любым рациональным показателем r и проверяется, что для таких степеней справедливы обычные правила, выводимые в курсе элементарной алгебры:

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \qquad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$
$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'}, \qquad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r} \text{ и др.}$$

Подчеркнем еще, что при $\alpha > 1$ степень α^r возрастает с возрастанием рационального показателя r.

19. Степень с любым вещественным показателем. Обратимся к определению степени любого вещественного (положительного) числа α с любым вещественным показателем β.

Введем в рассмотрение степени числа α

$$\alpha^b \text{ и } \alpha^{b'}$$

с рациональными показателями b и b', удовлетворяющими неравенствам

$$b < \beta < b'.$$

Степенью числа $\alpha > 1$*) *с показателем* β *называют (и обозначают символом* α^β*) вещественное число* γ, *содержащееся между степенями* α^b *и* $\alpha^{b'}$:

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}. \tag{1}$$

Легко убедиться в том, что такое число всегда существует. Действительно, множество степеней $\{a^b\}$ ограничено сверху, например, любой степенью $a^{b'}$. Возьмем тогда [11]

$$\gamma = \sup_{b < \beta} \{\alpha^b\}.$$

Для этого числа будем иметь

$$\alpha^b \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{b'}.$$

На деле же знак равенства здесь не нужен, ввиду возможности увеличить b и уменьшить b', так что построенное число γ удовлетворяет условиям (1).

Обратимся теперь к доказательству единственности числа, определяемого этими условиями.

Для этого, прежде всего, заметим, что лемма 2 [8] сохраняет свою силу и в том случае, если опустить требование, чтобы числа

*) Этим случаем можно ограничиться: при $\alpha < 1$ полагаем, например,

$$\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}.$$

s, s' и e были непременно рациональными; доказательство остается то же.

Затем, установим одно весьма простое, но часто полезное неравенство, которое иногда связывают с именем Як. Бернулли (Jac. Bernoulli): *если n — натуральное число, большее единицы, и $\gamma > 1$, то*

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \tag{2}$$

Действительно, положив $\gamma = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$, по формуле бинома Ньютона будем иметь

$$(1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots;$$

так как ненаписанные члены положительны, то

$$(1 + \lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

что равносильно неравенству (2).

Положив здесь $\gamma = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 1)$, получим неравенство

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}, \tag{3}$$

которым мы сейчас и воспользуемся.

Мы знаем, что числа b и b' можно выбрать так, чтобы разность $b' - b$ была меньше $\frac{1}{n}$ при любом наперед заданном натуральном n; тогда, по неравенству (3),

$$a^{b'} - a^b = a^b(a^{b'-b} - 1) < a^b(a^{\frac{1}{n}} - 1) < a^b\frac{a - 1}{n}.$$

Так как b меньше любого (но фиксированного) b'_0, то достаточно взять

$$n > \frac{a^{b'_0}(a - 1)}{\varepsilon},$$

где ε — произвольно малое положительное число, чтобы было

$$a^{b'} - a^b < \varepsilon.$$

В таком случае, по обобщенной выше лемме 2, между границами a^b и $a^{b'}$ не может содержаться двух различных чисел γ.

Если β рационально, то данное выше определение возвращает нас к обычному пониманию символа a^β.

Легко проверить, что для степени с любым вещественным показателем выполняются все обычные для степени правила. Остановимся для примера на доказательстве правила сложения показателей при умножении:

$$a^\beta \cdot a^\gamma = a^{\beta+\gamma}.$$

Пусть b, b', c, c' — любые рациональные числа, для которых

$$b < \beta < b', \quad c < \gamma < c';$$

по определению суммы [12]

$$b + c < \beta + \gamma < b' + c',$$

а по определению степени

$$\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{b'}, \quad \alpha^c < \alpha^\gamma < \alpha^{c'} \quad \text{и} \quad \alpha^{b+c} < \alpha^{\beta+\gamma} < \alpha^{b'+c'}.$$

Перемножив почленно первые два двойные неравенства (с учетом того, что для рациональных показателей доказываемое правило уже известно), получим

$$\alpha^{b+c} < \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma < \alpha^{b'+c'}.$$

Таким образом, два числа $\alpha^{\beta+\gamma}$ и $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ оказываются заключенными между границами α^{b+c}, $\alpha^{b'+c'}$, которые, как легко показать, могут быть сделаны сколь угодно близкими. Отсюда (по обобщенной лемме 2) и вытекает равенство этих чисел.

Проверим еще, что при $\alpha > 1$ степень α^β возрастает с возрастанием вещественного показателя β. Если $\beta < \bar{\beta}$, то, вставив рациональное число r между ними: $\beta < r < \bar{\beta}$, по самому определению степени с вещественным показателем будем иметь

$$\alpha^\beta < \alpha^r \quad \text{и} \quad \alpha^r < \alpha^{\bar{\beta}}, \quad \text{откуда} \quad \alpha^\beta < \alpha^{\bar{\beta}}.$$

20. Логарифмы. Пользуясь данным определением степени с любым вещественным показателем, теперь легко установить существование логарифма для любого положительного вещественного числа γ при положительном основании α, отличном от 1 (мы будем, например, считать $\alpha > 1$).

Если существует такое рациональное число r, что

$$\alpha^r = \gamma,$$

то r и есть искомый логарифм. Предположим же, что такого рационального числа r нет.

Тогда можно произвести сечение $B|B'$ в области всех рациональных чисел по следующему правилу. К классу B отнесем рациональные числа b, для которых $\alpha^b < \gamma$, а к классу B' — рациональные числа b', для которых $\alpha^{b'} > \gamma$.

Покажем, что классы B и B' — не пустые. В силу неравенства (2)

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

и достаточно взять

$$n > \frac{\gamma}{\alpha - 1},$$

чтобы было $a^n > \gamma$; такое натуральное число n относится к классу B'. В то же время имеем:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{n(a-1)},$$

и достаточно взять

$$n > \frac{1}{\gamma(a-1)},$$

чтобы было $a^{-n} < \gamma$ и число $-n$ попало в класс B.

Остальные требования, предъявляемые к сечению, здесь также выполнены.

Построенное сечение $B \mid B'$ определяет вещественное число β, которое является «пограничным» между числами обоих классов. По определению степени, имеем

$$a^b < a^\beta < a^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

причем a^β есть единственное число, удовлетворяющее всем подобным неравенствам. Но для числа γ имеем (по самому построению сечения)

$$a^b < \gamma < a^{b'}.$$

Следовательно,

$$a^\beta = \gamma \text{ и } \beta = \log_a \gamma;$$

существование логарифма доказано.

21. Измерение отрезков. Невозможность снабдить, оставаясь в области рациональных чисел, все отрезки длинами — также была важнейшим поводом к введению иррациональных чисел. Покажем теперь, что произведенного расширения числовой области достаточно для решения задачи измерения отрезков.

Прежде всего сформулируем самую задачу *):

Требуется с каждым прямолинейным отрезком A связать некоторое положительное вещественное число $l(A)$, которое будем называть «длиной отрезка A», так, чтобы

1) *некоторый наперед выбранный отрезок E («эталон длины») имел длину* 1: $l(E) = 1$;

2) *равные отрезки имели одну и ту же длину;*

3) *при сложении отрезков длина суммы всегда была равна сумме длин складываемых отрезков:*

$$l(A+B) = l(A) + l(B)$$

(*«свойство аддитивности»*).

Поставленные условия приводят к однозначному решению задачи.

*) Мы пользуемся здесь школьными сведениями по геометрии и не формулируем относящихся сюда аксиом.

Из 2) и 3) следует, что q-я часть эталона должна иметь длину $\frac{1}{q}$; если же эта часть повторена слагаемым p раз, то полученный отрезок, в силу 3), должен иметь длину $\frac{p}{q}$. Таким образом, если отрезок A соизмерим с эталоном длины, и общая мера отрезков A и E укладывается в них, соответственно, p и q раз, то необходимо

$$l(A)=\frac{p}{q}.$$

Легко видеть, что это число не зависит от взятой общей меры и что если отрезкам, соизмеримым с эталоном, приписать рациональные длины по этому правилу, то — для этих отрезков — задача измерения будет полностью решена.

Если отрезок A больше отрезка B, так что $A=B+C$, где C есть также некоторый отрезок, то, в силу 3), должно быть:

$$l(A)=l(B)+l(C)$$

и, так как $l(C)>0$, то $l(A)>l(B)$. Итак, неравные отрезки должны иметь неравные длины, а именно, больший отрезок — бóльшую длину. Так как каждое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ является длиной некоторого отрезка, соизмеримого с эталоном длины E, то из сказанного, между прочим, ясно, что ни один отрезок, несоизмеримый с эталоном, не может иметь рациональную длину.

Пусть же Σ будет такой отрезок, несоизмеримый с E. Найдется бесчисленное множество отрезков S и S', соизмеримых с E и, соответственно, меньших или бóльших Σ *). Если обозначить их длины через s и s': $l(S)=s$, $l(S')=s'$, то искомая длина $l(\Sigma)$ должна удовлетворять неравенствам

$$s<l(\Sigma)<s' \text{ **)}.$$

Если разбить все рациональные числа на два класса S и S', отнеся к нижнему классу S числа s (и кроме них — все отрицательные числа и 0), а к верхнему классу S' — числа s', то получится сечение в области рациональных чисел. Так как в нижнем классе, очевидно, нет наибольшего числа, а в верхнем — наименьшего, то этим сечением определяется иррациональное число σ, которое и будет единственным вещественным числом, удовлетворяющим неравенствам $s<\sigma<s'$. Именно этому числу необходимо положить равной длину $l(\Sigma)$.

Предположим теперь, что всем отрезкам, как соизмеримым с E, так и несоизмеримым, приписаны длины в согласии с указанными

*) Это легко доказать, исходя из геометрической «аксиомы Архимеда», о которой уже была речь в 5.

**) Разумеется, и для длины отрезка Σ, соизмеримого с E, также выполняются эти неравенства.

правилами. Выполнение условий 1), 2) очевидно. Рассмотрим два отрезка Р, Σ с длинами $\rho = l(\mathrm{P})$, $\sigma = l(\Sigma)$ и их сумму, отрезок $\mathrm{T} = \mathrm{P} + \Sigma$, длину которого обозначим через $\tau = l(\mathrm{T})$. Взяв любые положительные рациональные числа r, r', s, s' такие, что

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s',$$

построим отрезки R, R', S, S', для которых именно эти числа, соответственно, служат длинами. Отрезок $R+S$ (длины $r+s$) будет меньше Т, а отрезок $R'+S'$ (длины $r'+s'$) — больше Т. Поэтому

$$r+s < \tau < r'+s'.$$

Но [12] единственным вещественным числом, содержащимся между числами вида $r+s$ *) и числами $r'+s'$, является сумма $\rho+\sigma$. Следовательно, $\tau = \rho + \sigma$, ч. и тр. д.

Распространение «свойства аддитивности» на случай любого конечного числа слагаемых производится по методу математической индукции.

Если на оси (н а п р а в л е н н о й прямой) (рис. 1) выбрать начальную точку O и эталон длины OE, то *каждой точке X этой*

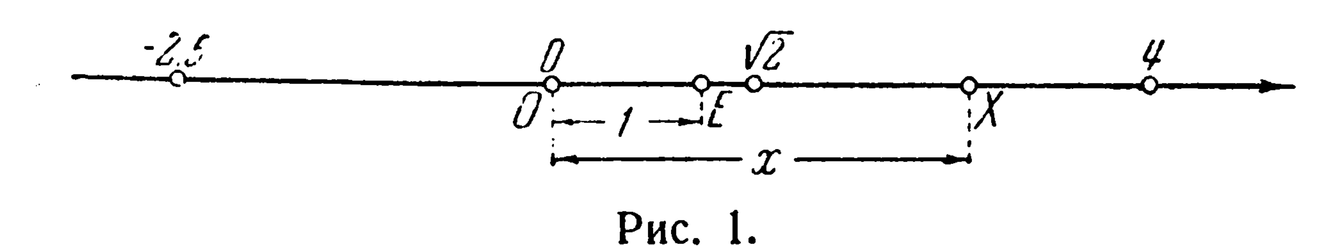


Рис. 1.

прямой отвечает некоторое вещественное число—ее а б с ц и с с а x, равная длине отрезка OX, если X лежит в положительном направлении от O, или этой длине со знаком минус — в противном случае.

Естественно встаёт вопрос, будет ли верно и обратное: *каждое ли вещественное число x отвечает при этом некоторой точке прямой?* Вопрос этот в геометрии решается в утвердительном смысле — именно с помощью аксиомы о н е п р е р ы в н о с т и прямой, устанавливающей для прямой, как множества точек, свойство, аналогичное свойству непрерывности области вещественных чисел [10].

Таким образом, между всеми вещественными числами и точками направленной прямой (оси) можно установить взаимно однозначное соответствие. Вещественные числа можно изображать точками на оси, которую в связи с этим называют ч и с л о в о й о с ь ю. Подобным изображением мы впредь постоянно будем пользоваться.

---

*) Ограничение п о л о ж и т е л ь н ы м и числами r и s, конечно, несущественно.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Варианта и ее предел

22. Переменная величина, варианта. В физике и в других науках о природе читателю встречалось множество различных *величин*: время, длина, объем, вес и т. п. Любая из них, смотря по обстоятельствам, то принимала различные значения, то лишь одно. В первом случае мы имели дело с *переменной* величиной, а во втором — с *постоянной*.

В математике, однако, мы отвлекаемся от физического смысла рассматриваемой величины, интересуясь лишь *числом*, которым она выражается; физический смысл величины снова приобретает важность, лишь когда занимаются приложениями математики. Таким образом, для нас переменная величина (или короче — переменная) является *отвлеченной* или *числовой* переменной. Ее обозначают каким-либо символом (буквой, например, x), которому приписываются числовые значения.

Переменная считается заданной, если указано *множество* $\mathscr{X} = \{x\}$ *значений*, которые она может принять. Постоянную величину (короче — *постоянную*) удобно рассматривать как частный случай переменной; он отвечает предположению, что множество $\mathscr{X} = \{x\}$ состоит из *одного* элемента.

При установлении понятия *предела* переменной x недостаточно знать лишь, из какого числового множества $\mathscr{X}$ получает значения эта переменная; необходимо еще знать, какие именно значения (среди которых могут быть и повторяющиеся) и в каком порядке она принимает. Откладывая изложение вопроса о *направленной* переменной и ее пределе, в общей постановке, до конца следующего тома *) (когда у читателя накопится достаточный опыт в этой области), мы посвятим настоящую главу изучению одного, самого простого и вместе с тем важного, частного типа такой переменной величины.

Начнем с установления понятия числовой *последовательности*. Представим себе *натуральный ряд*:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ n',\ \ldots, \tag{1}$$

*) См. там Дополнение: «Общая точка зрения на предел».

в котором числа расположены в порядке возрастания, так что большее число n' следует за меньшим числом n (или меньшее число n предшествует большему числу n'). Если теперь заменить в ряде (1), по какому-нибудь закону, каждое натуральное число n некоторым вещественным числом x_n, то получится числовая последовательность:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n'},\ \ldots, \tag{2}$$

члены или элементы которой x_n занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров. При $n' > n$, член $x_{n'}$ следует за членом x_n (x_n предшествует $x_{n'}$), независимо от того, будет ли само число $x_{n'}$ больше, меньше или даже равно числу x_n *).

Переменную x, принимающую некоторую последовательность (2) *значений, мы* — следуя Мерэ (Ch. Méray) — *будем называть вариантой.* Это и есть тот тип переменной, рассмотрением которого мы здесь ограничиваемся.

В школьном курсе математики читателю встречались переменные именно типа варианты. Ему знакома, например, последовательность вида

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ \ldots,\ \underset{n}{a+(n-1)d},\ \ldots$$

(арифметическая прогрессия) или вида

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{aq},\ \underset{3}{aq^2},\ \ldots,\ \underset{n}{aq^{n-1}},\ \ldots$$

(геометрическая прогрессия); переменный член той и другой прогрессии есть варианта.

В связи с определением длины окружности обычно рассматривается переменный периметр правильного вписанного в окружность многоугольника, получаемого из шестиугольника последовательным удвоением числа сторон; таким образом, эта варианта принимает последовательность значений:

$$\underset{1}{p_6 = 6R},\quad \underset{2}{p_{12} = 12R\sqrt{2-\sqrt{3}}},$$

$$\underset{3}{p_{24} = 24R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}},\ \underset{4}{p_{48}},\ \ldots$$

Упомянем еще о десятичном приближении (скажем, по недостатку) к $\sqrt{2}$, со все возрастающей точностью; оно принимает последовательность значений:

$$\underset{1}{1{,}4};\ \underset{2}{1{,}41};\ \underset{3}{1{,}414};\ \underset{4}{1{,}4142};\ \ldots$$

и также представляет собой варианту.

*) Аналогично определяется понятие последовательности точек на прямой или объектов какой-либо другой природы.

Переменную x, пробегающую последовательность (2), часто обозначают через x_n, отождествляя ее с переменным («общим») членом этой последовательности.

Иногда варианта x задается тем, что указывается непосредственно выражение для x_n; так, в случае арифметической или геометрической прогрессии имеем, соответственно, $x_n = a + (n-1)d$ или $x_n = aq^{n-1}$. Пользуясь этим выражением, можно сразу вычислять любое значение варианты по заданному его номеру, не вычисляя предыдущих значений.

Для периметра правильного вписанного многоугольника такое общее выражение возможно лишь, если ввести число π; вообще периметр p_m правильного вписанного m-угольника дается формулой

$$p_m = 2mR \sin \frac{\pi}{m}.$$

В других случаях нам может быть неизвестно выражение для общего члена x_n последовательности (2). Тем не менее, *последовательность* (2), *а с нею и отвечающая ей варианта, считается заданной, если мы все же владеем правилом, по которому может быть вычислено любое значение варианты, лишь только известен его номер.* Поэтому-то, зная правило для приближенного вычисления корней, мы можем считать заданной всю последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$, хотя выражения для его общего члена мы не знаем.

Если варианта — в указанном смысле — задана, то этим не только охарактеризовано все множество принимаемых ею значений в целом, но и определен порядок, в котором эти значения принимаются; каждому номеру отвечает свое значение варианты, и из двух значений то считается следующим, номер которого больше.

Ещё раз подчеркнем, что значения варианты не должны быть обязательно различными. Например, если задать варианту одной из формул:

$$x_n = 1; \quad x_n = (-1)^{n+1}; \quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n},$$

то соответствующие последовательности будут:

$$\underset{1}{1},\ \underset{2}{1},\ \underset{3}{1},\ \underset{4}{1},\ \underset{5}{1},\ \underset{6}{1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{1},\ \underset{2}{-1},\ \underset{3}{1},\ \underset{4}{-1},\ \underset{5}{1},\ \underset{6}{-1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{0},\ \underset{2}{1},\ \underset{3}{0},\ \underset{4}{\frac{1}{2}},\ \underset{5}{0},\ \underset{6}{\frac{1}{3}},\ \ldots$$

В первом случае мы имеем просто постоянную величину, все «множество» принимаемых ею значений сводится к одному. Во втором —

это множество состоит из двух значений, 1 и -1, принимаемых поочередно. Наконец, в третьем случае множество значений переменной бесконечно, но это не мешает значениям переменной через одно равняться 0; и мы считаем, что значение 0 на пятом месте следует не только за значением 1 на втором месте, но и за значением 0 на первом месте.

23. Предел варианты. Читатель из школьного курса также знаком уже с этим понятием. Вот точное его определение:

Постоянное число a называется пределом варианты $x = x_n$, если для каждого положительного числа ε, сколь бы мало оно ни было, существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

Тот факт, что a является пределом варианты, записывают так:

$$\lim x_n = a \quad \text{или} \quad \lim x = a$$

(lim есть сокращение латинского слова limes, означающего «предел»). Говорят также, что переменная стремится к a, и пишут

$$x_n \to a \quad \text{или} \quad x \to a.$$

Иной раз число a называется пределом последовательности (2), и говорят, что эта последовательность сходится к a.

То же определение коротко может быть сформулировано так:

Число a есть предел варианты $x = x_n$, если ее значения отличаются от a сколь угодно мало, начиная с некоторого места.

Неравенство (3), где ε произвольно, и есть точная запись утверждения, что x_n от a «отличается сколь угодно мало», а номер N как раз и указывает то «место, начиная с которого» это обстоятельство осуществляется.

Важно дать себе отчет в том, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз навсегда: он зависит от выбора числа ε. Для того чтобы подчеркнуть это, мы иной раз вместо N будем писать N_ε. При уменьшении числа ε соответствующий номер $N = N_\varepsilon$, вообще говоря, увеличивается: чем большей близости значений варианты x_n к a мы требуем, тем более далекие значения ее — в ряду (2) — приходится рассматривать.

Исключение представляет тот случай, когда все значения варианты x_n равны постоянному числу a. Очевидно, что тогда $a = \lim x_n$, но на этот раз неравенство (3) будет выполняться для любого $\varepsilon > 0$ одновременно при всех значениях x_n *).

*) Аналогичное обстоятельство имеет место для варианты x_n, значения которой становятся равными a, начиная с некоторого места.

Неравенство (3), как мы знаем [17], равносильно следующим:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

или

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \tag{4}$$

этим мы часто будем пользоваться впоследствии.

Если изобразить числа a, $a \pm \varepsilon$ и значения x_n нашей варианты точками на числовой оси [21] (рис. 2), то получится наглядное геометрическое истолкование предела варианты. Какой бы малый от-

Рис. 2.

резок (длины 2ε) с центром в точке a ни взять, все точки x_n, начиная с некоторой из них, должны попасть внутрь этого отрезка (так что вне его может остаться разве лишь конечное число этих точек). Точка, изображающая предел a, является как бы средоточием сгустка точек, изображающих значения варианты.

24. Бесконечно малые величины. Случай, когда варианта стремится к нулю: $x_n \to 0$, представляет особый интерес.

Варианта x_n, имеющая своим пределом нуль, называется бесконечно малой величиной, или просто бесконечно малой.

Если в определении предела варианты [23] положить $a = 0$, то неравенство (3) примет вид

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (\text{для } n > N_\varepsilon).$$

Таким образом, данное выше определение бесконечно малой можно подробнее сформулировать без упоминания термина «предел»:

Варианта x_n называется бесконечно малой, если она по абсолютной величине становится и остается меньшей сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого места.

Не вполне удачный (исторически сложившийся) термин «бесконечно малая» величина не должен вводить читателя в заблуждение: ни одно в отдельности взятое значение этой величины, если оно не нуль, не может квалифицироваться, как «малое». Суть дела в том, что это — переменная величина*), которая лишь в процессе своего изменения способна сделаться меньшей произвольно взятого числа ε.

Если вернуться к общему случаю варианты x_n, имеющей предел a, то разность

$$\alpha_n = x_n - a$$

*) Исключая неинтересный случай, когда она тождественно равна нулю.

между переменной и ее пределом, очевидно, будет бесконечно малой: ведь, в силу (3),

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (\text{для } n > N_\varepsilon).$$

Обратно, если α_n есть бесконечно малая, то $x_n \to a$. Это приводит нас к следующему утверждению:

Для того чтобы варианта x_n имела своим пределом постоянное число a, необходимо и достаточно, чтобы разность между ними $\alpha_n = x_n - a$ была бесконечно малой.

В связи с этим можно было бы дать и для понятия «предел» другое определение (равносильное старому):

Постоянное число a называется пределом варианты x_n, если разность между ними есть бесконечно малая величина.

Разумеется, если исходить из этого определения предела, то для бесконечно малой нужно использовать второе из приведенных выше определений. Иначе получился бы порочный круг: предел определялся бы через бесконечно малую, а бесконечно малая — через предел!

Итак, если варианта $x_n \to a$, то она может быть представлена в виде

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n есть бесконечно малая, и обратно, если варианта x_n допускает такое представление, то она имеет пределом a. Этим часто пользуются на практике для установления предела переменной.

25. Примеры. 1) Рассмотрим варианты

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

им отвечают такие последовательности значений:

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots,$$

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ \ldots,$$

$$1, -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ \ldots.$$

Все три переменные представляют собой бесконечно малые, т. е. имеют пределом 0. Действительно, для них

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в качестве N_ε можно, например, взять наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ *).

*) Вообще, через $E(p)$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее p, или, короче, целая часть числа p; E есть начальная буква французского слова Entier, означающего «целый».

Отметим, что первая переменная все время больше своего предела 0, вторая — все время меньше его, третья же — попеременно становится то больше, то меньше его.

2) Если положить

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n},$$

то переменная пробегает такую последовательность значений:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{6}, \ldots$$

И в этом случае $x_n \to 0$, так как

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon$$

для $n > \frac{3}{\varepsilon}$, так что за N_ε можно принять $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$.

Мы сталкиваемся здесь с любопытной особенностью: переменная поочередно то *приближается* к своему пределу 0, то *удаляется* от него.

3) Пусть теперь

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n};$$

с этой вариантой мы уже имели дело в конце **22**. Здесь также $x_n \to 0$, ибо

$$|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

Отметим, что для всех нечетных значений n переменная оказывается равной своему пределу.

Эти простые примеры интересны тем, что они характеризуют многообразие тех возможностей, которые охватываются данным выше определением предела варианты. Несущественно, лежат ли значения переменной *с одной стороны* от предела или нет; несущественно, приближается ли переменная *с каждым шагом* к своему пределу; несущественно, наконец, достигает ли переменная своего предела, т. е. принимает ли значения, равные пределу. Существенно лишь то, о чем говорится в определении: переменная должна отличаться от предела сколь угодно мало в конце концов, т. е. для достаточно далеких своих значений.

4) Возьмем более сложный пример варианты:

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4};$$

докажем, что ее пределом будет число $\frac{1}{3}$.

С этой целью рассмотрим разность

$$x_n - \frac{1}{3} = \frac{-5n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)}$$

и оценим ее абсолютную величину; для $n > 2$ имеем:

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n},$$

так что это выражение меньше ε, если $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Этим доказано, что $x_n \to \frac{1}{3}$.

5) Определим варианту формулой

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1),$$

и докажем, что $x_n \to 1$.

Если воспользоваться неравенством (3) в 19, то можно написать:

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon, \text{ лишь только } n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

Можно, однако, рассуждать и иначе. Неравенство

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

равносильно такому:

$$\frac{1}{n} < \log_a (1 + \varepsilon) \text{ или } n > \frac{1}{\log_a (1 + \varepsilon)},$$

так что оно выполняется при $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a (1 + \varepsilon)}\right)$.

В соответствии с выбранным способом рассуждения мы пришли к различным выражениям для N_ε. Например, при $a = 10$, $\varepsilon = 0{,}01$ получаем $N_{0{,}01} = \frac{9}{0{,}01} = 900$ по первому способу и $N_{0{,}01} = E\left(\frac{1}{0{,}00432\ldots}\right) = 231$ — по второму. По второму способу мы получили наименьшее из возможных значений для $N_{0{,}01}$, ибо уже $10^{\frac{1}{231}} = 1{,}010017\ldots$ отличается от 1 больше, чем на $\varepsilon = 0{,}01$. То же будет и в общем случае, ибо, как легко видеть, при $n \leqslant \frac{1}{\log_a (1 + \varepsilon)}$ необходимо $a^{\frac{1}{n}} - 1 \geqslant \varepsilon$.

Заметим по этому поводу, что мы вовсе не заинтересованы именно в наименьшем возможном значении N_ε, если речь идет только об установлении факта стремления к пределу. Должно быть гарантировано выполнение неравенства (3), начиная хоть с какого-нибудь места, далекого или близкого — безразлично.

6) Важный пример бесконечно малой дает варианта

$$\alpha_n = q^n, \text{ где } |q| < 1.$$

Для доказательства того, что $\alpha_n \to 0$, рассмотрим неравенство

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon;$$

оно равносильно таким:

$$n \cdot \log |q| < \log \varepsilon \text{ или } n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \text{*)}.$$

Таким образом, если положить (считая $\varepsilon < 1$)

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}\right),$$

то при $n > N_\varepsilon$ упомянутое неравенство наверное выполнится.

Аналогично, легко убедиться в том, что и варианта

$$\beta_n = A \cdot q^n,$$

---

*) Под $\log x$ здесь (и впредь) разумеется $\log_{10} x$. Следует иметь в виду, что $|q| < 1$ и $\log |q| < 0$; поэтому при делении обеих частей неравенства на это число знак неравенства должен быть изменен на обратный.

где по-прежнему $|q|<1$, а A — постоянное число, также есть бесконечно малая.

7) Рассмотрим, далее, бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$\div a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \quad (|q|<1)$$

и поставим вопрос об определении ее **с у м м ы**.

Под суммой бесконечной прогрессии, как известно, разумеется предел, к которому стремится сумма s_n ее n членов при безграничном возрастании n. Но

$$s_n = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n,$$

так что варианта s_n разнится от постоянного числа $\frac{a}{1-q}$ на величину $\alpha_n = -\frac{a}{1-q}\cdot q^n$, которая, как мы только что видели, является бесконечно малой. Следовательно, по второму определению предела, искомая сумма прогрессии

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Таким образом, это число является **с у м м о й** бесчисленного множества членов прогрессии, что записывают так:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

8) Пусть даны два числа a и b. Положим $x_0 = a$, $x_1 = b$, а последующие значения варианты x_n определим равенством

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \qquad (n \geqslant 2).$$

Этим варианта x_n, действительно, задана, так как, полагая здесь $n=2$, 3, 4, ..., можно **п о с л е д о в а т е л ь н о** найти все ее значения, до любого включительно.

Если из обеих частей написанного равенства вычесть по x_{n-1}, то получим

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Таким образом, в ряду разностей

$$x_1 - x_0 = b - a,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ x_{n-1} - x_{n-2},\ x_n - x_{n-1}, \ldots$$

каждая (начиная со второй) получается из предыдущей умножением на $-\frac{1}{2}$, т. е. мы имеем здесь геометрическую прогрессию со знаменателем $-\frac{1}{2}$. Так как сумма n ее членов есть $x_n - a$, то, пользуясь известной нам [см. (7)] формулой для суммы прогрессии, сразу получаем:

$$\lim (x_n - a) = \frac{b-a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}(b-a),$$

откуда уже легко заключить, что

$$\lim x_n = a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}.$$

9) Наподобие геометрической прогрессии можно рассмотреть произвольную последовательность чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

и, по порядку складывая их, образовать «частичные суммы»:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,$$
$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

Если, при безграничном возрастании n, A_n стремится к (конечному или бесконечному) пределу A, то это число называют суммой всех взятых чисел a_n и пишут

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = A.$$

Символ в левой части этого равенства называют бесконечным рядом, а число A — его суммой. Про ряд, имеющий конечную сумму, говорят, что он сходится.

Пусть, например, дан ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Здесь

$$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ \ldots,$$
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \ \ldots,$$

так что в данном случае

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, $A_n \to 1$, так что предложенный ряд сходится и имеет суммой единицу.

Если ряд не имеет конечной суммы, про него говорят, что он расходится: таков, например, ряд

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots .$$

26. Некоторые теоремы о варианте, имеющей предел. Пусть варианта x_n имеет предел a. При любом $p < a$ (или $q > a$) легко подобрать число $\varepsilon > 0$ так, чтобы было

$$a - \varepsilon > p \quad (\text{или } a + \varepsilon < q);$$

для этого достаточно взять ε меньшим разности $a - p$ (или $q - a$). Но, по определению предела [**23**], найдется такой номер N, что для $n > N$ будет выполняться неравенство [см. (4)]

$$x_n > a - \varepsilon \quad (x_n < a + \varepsilon),$$

а следовательно — и подавно неравенство

$$x_n > p \quad (\text{или } x_n < q).$$

1° *Если варианта x_n стремится к пределу a, и $a > p$ ($a < q$), то и все значения переменной, начиная с некоторого, тоже будут $> p$ ($< q$).*

Это простое предложение имеет ряд полезных следствий.

2° *Если варианта x_n стремится к пределу $a>0$ (<0), то и сама переменная $x_n>0$ (<0), начиная с некоторого места.*

Для доказательства достаточно применить предыдущее утверждение, взяв $p=0$ ($q=0$).

Можно установить и более точный результат:

3° *Если варианта x_n стремится к пределу a, отличному от нуля, то, по крайней мере, достаточно далекие значения x_n по абсолютной величине превзойдут некоторое положительное число r:*

$$|x_n|>r>0 \quad (\textit{для } n>N).$$

Действительно, при $a>0$ (<0) можно взять

$$0<p<a \quad (a<q<0)$$

и положить $r=p$ ($r=|q|$).

4° С другой стороны, *если варианта x_n имеет предел a, то она является ограниченной,* в том смысле, что все ее значения по абсолютной величине не превосходят некоторой конечной границы:

$$|x_n|\leqslant M \quad (M=\text{const};\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Возьмем число $M'>|a|$, так что $-M'<a<M'$, и положим $p=-M'$, а $q=M'$. Найдется такой номер N, что для $n<N$ будет

$$-M'<x_n<M' \quad \text{или} \quad |x_n|<M'.$$

Это неравенство наверное выполняется при $n=N+1,\ N+2,\ \ldots,$ так что ему могут не удовлетворять лишь первые N значений нашей варианты (или некоторые из них).

Поэтому, если положить M равным наибольшему из чисел

$$|x_1|,\ |x_2|,\ \ldots,\ |x_N|,\ M',$$

то уже для всех значений x_n будем иметь: $|x_n|\leqslant M$, ч. и тр. д.

Замечания. I. Можно дать определение ограниченности переменной x_n в равносильной форме, потребовав выполнения неравенств

$$k\leqslant x_n\leqslant g \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где k и g — два конечных числа. Действительно, из этих неравенств, если положить M равным наибольшему из чисел $|k|$, $|g|$, следует $|x_n|\leqslant M$; обратно, если имеет место последнее неравенство, то оно может быть написано в форме $-M\leqslant x_n\leqslant M$, так что $-M$ играет роль k, а M — роль g.

II. Утверждение 4° не может быть обращено: не всякая ограниченная варианта имеет предел. Если положить, например, $x_n=(-1)^{n+1}$, то эта варианта, конечно, ограничена: $|x_n|\leqslant 1$, но предела она не имеет, все время колеблясь от $+1$ к -1.

В заключение, опираясь на предложение 1°, докажем единственность предела:

5° *Варианта x_n не может одновременно стремиться к двум различным пределам.*

Действительно, допустим противное: пусть одновременно $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причем $a < b$. Возьмем любое число r между a и b.

$$a < r < b.$$

Поскольку $x_n \to a$ и $a < r$, найдется такой номер N', что для $n > N'$ будет выполняться неравенство: $x_n < r$. С другой стороны, раз $x_n \to b$ и $b > r$, найдется и такой номер N'', что для $n < N''$ окажется: $x_n > r$. Если взять номер n бо́льшим и N', и N'', то соответствующее значение переменной x_n будет одновременно и $< r$ и $> r$, что невозможно.

Это противоречие доказывает наше утверждение.

27. Бесконечно большие величины. Бесконечно малым величинам, в некотором смысле, противопоставляются бесконечно большие величины (или просто бесконечно большие).

Варианта x_n называется бесконечно большой, если она по абсолютной величине становится и остается большей сколь угодно большого наперед заданного числа $E > 0$, начиная с некоторого места:

$$|x_n| > E \quad (\textit{для } n > N_E).$$

Как и в случае бесконечно малых, здесь также следует подчеркнуть, что ни одно в отдельности взятое значение бесконечно большой величины не может быть квалифицировано, как «большое»; мы имеем здесь дело с переменной величиной, которая лишь в процессе своего изменения способна сделаться большей произвольно взятого числа E.

Примерами бесконечно больших могут служить варианты

$$x_n = n; \quad x_n = -n; \quad x_n = (-1)^{n+1} n,$$

которые пробегают натуральный ряд чисел, но первая со знаком плюс, вторая со знаком минус, третья же — с чередующимися знаками.

Вот ещё один пример бесконечно большой величины:

$$x_n = Q^n, \text{ при } |Q| > 1.$$

Действительно, каково бы ни было $E > 0$, неравенство

$$|x_n| = |Q|^n > E$$

выполняется, лишь только

$$n \cdot \log|Q| > \log E \text{ или } n > \frac{\log E}{\log|Q|}\,{}^{*)},$$

так что за N_E можно взять число

$$E\left(\frac{\log E}{\log|Q|}\right).$$

*) Так как $|Q| > 1$, то $\log|Q| > 0$.

Если варианта x_n является бесконечно большой и (по крайней мере, для достаточно больших n) сохраняет определенный знак ($+$ или $-$); *то, в соответствии со знаком, говорят, что варианта x_n имеет предел $+\infty$ или $-\infty$*, и пишут:

$$\lim x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$$

или

$$\lim x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty.$$

Можно было бы дать для этих случаев и независимое определение, заменив неравенство $|x_n| > E$, смотря по случаю, неравенством

$$x_n > E \text{ или } x_n < -E,$$

откуда уже вытекает, соответственно, что $x_n > 0$ или $x_n < 0$.

Очевидно, что бесконечно большая величина x_n в общем случае характеризуется соотношением: $|x_n| \to +\infty$.

Из приведенных выше примеров бесконечно больших величин, очевидно, варианта $x_n = n$ стремится к $+\infty$, варианта $x_n = -n$ стремится к $-\infty$. Что же касается третьей варианты: $x_n = (-1)^{n+1}n$, то про нее нельзя сказать ни что она стремится к $+\infty$, ни что она стремится к $-\infty$.

Наконец, относительно варианты $x_n = Q^n$ при $Q > 1$, можно сказать, что она стремится к $+\infty$, а при $Q < -1$ у нее предела нет.

С несобственными числами $\pm\infty$ мы уже сталкивались в **10**; следует помнить, что их применение имеет совершенно условный смысл, и остерегаться производить над этими «числами» арифметические операции. Вместо $+\infty$ часто пишут просто ∞.

Введение бесконечных пределов не нарушает теоремы о единственности предела, установленной в предыдущем n° (см. 5°); действительно, как указано было там же (4°), варианта, имеющая конечный предел a, является ограниченной и, следовательно, никак не может одновременно стремиться к бесконечному пределу.

В заключение упомянем о простой связи, которая существует между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами:

Если варианта x_n является бесконечно большой, то её обратная величина $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n| \to \infty$, то для числа $E = \frac{1}{\varepsilon}$ найдется такой номер N, что

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ лишь только } n > N.$$

Тогда для тех же значений n, очевидно, будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Аналогично можно доказать и обратное утверждение:

Если варианта α_n (*не обращающаяся в* 0) *является бесконечно малой, то обратная для нее величина* $x_n = \frac{1}{\alpha}$ *будет бесконечно большой.*

§ 2. Теоремы о пределах, облегчающие нахождение пределов

28. Предельный переход в равенстве и неравенстве. Соединяя две варианты x_n и y_n знаками равенства или неравенства, мы всегда подразумеваем, что речь идёт о соответствующих значениях их, т. е. о значениях с одним и тем же номером.

1° *Если две варианты* x_n *и* y_n *при всех их изменениях равны:* $x_n = y_n$, *причем каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то равны и эти пределы: $a = b$.

Непосредственно следует из единственности предела [**26**, 5°].

Этой теоремой пользуются обычно в форме предельного перехода в равенстве: из $x_n = y_n$ заключают, что $\lim x_n = \lim y_n$.

2° *Если для двух вариант* x_n, y_n *всегда выполняется неравенство* $x_n \geqslant y_n$, *причем каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и $a \geqslant b$.

Допустим противное: пусть $a < b$. Рассуждая так же, как и в **26**, 5°, возьмем число r между a и b, так что $a < r < b$. Тогда, с одной стороны, найдется такой номер N', что для $n > N'$ будет $x_n < r$, с другой же — найдется и такой номер N'', что для $n > N''$ окажется $y_n > r$. Если N больше обоих чисел N', N'', то для номеров $n > N$ будут одновременно выполняться оба неравенства

$$x_n < r, \; y_n > r, \text{ откуда } x_n < y_n,$$

что противоречит предположению. Теорема доказана.

Эта теорема устанавливает допустимость предельного перехода в неравенстве (соединенном с равенством): из $x_n \geqslant y_n$ можно заключить, что $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

Конечно, знак $>$ всюду может быть заменен знаком $<$.

Мы обращаем внимание читателя на то, что из строгого неравенства $x_n > y_n$, вообще говоря, не вытекает строгое же неравенство $\lim x_n > \lim y_n$, а только, по-прежнему: $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. Так, например, $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ при всех n, и тем не менее

$$\lim \frac{1}{n} = \lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

При установлении существования и величины предела варианты иногда бывает полезна теорема:

3° *Если для вариант* x_n, y_n, z_n *всегда выполняются неравенства*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

причём варианты x_n *и* z_n *стремятся к общему пределу* a:

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

то и варианта y_n *имеет тот же предел:*

$$\lim y_n = a.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По этому ε, прежде всего, найдётся такой номер N', что при $n > N'$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Затем, найдется такой номер N'', что при $n > N''$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Пусть N будет больше обоих чисел N' и N''; тогда, при $a > N$, выполняются оба предшествующих двойных неравенства, и потому

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Окончательно, при $n > N$

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon.$$

Таким образом, действительно, $\lim y_n = a$.

Из этой теоремы, в частности, следует: *если при всех* n

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

и известно, что $z_n \to a$, *то и* $y_n \to a$. Впрочем, это очень легко доказать и непосредственно.

Теоремы 1°, 2° и 3° легко распространяются и на случай бесконечных пределов.

29. Леммы о бесконечно малых. В дальнейших теоремах нам придётся рассматривать одновременно две варианты (или больше), сочетая их между собой знаками арифметических действий. При этом, как и выше, мы относим эти знаки к с о о т в е т с т в у ю щ и м значениям вариант. Например, говоря о сумме двух вариант x_n и y_n, пробегающих порознь последовательности значений

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

и

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$$

мы имеем в виду варианту $x_n + y_n$, принимающую последовательность значений

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad x_3 + y_3, \ldots, \quad x_n + y_n, \ldots$$

При доказательстве теорем, относящихся к результатам арифметических операций над переменными, важную роль будут играть следующие две леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. *Сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.*

Проведем доказательство для случая двух бесконечно малых α_n и β_n (общий случай исчерпывается аналогично).

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой, по числу ε для бесконечно малой α_n найдется такой номер N', что при $n > N'$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точно так же и для бесконечно малой β_n найдется такой номер N'', что при $n > N''$ будет

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять натуральное число N, бо̀льшим обоих чисел N' и N'', то при $n > N$ одновременно выполняются оба эти неравенства, так что

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, величина $\alpha_n + \beta_n$, действительно, является бесконечно малой.

Лемма 2. *Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.*

Пусть, для всех значений n,

$$|x_n| \leqslant M.$$

Если задано произвольное число $\varepsilon > 0$, то по числу $\frac{\varepsilon}{M}$ для бесконечно малой α_n найдется такой номер N, что для $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда для тех же значений n, очевидно,

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Отсюда и следует, что $x_n \cdot \alpha_n$ есть бесконечно малая.

30. Арифметические операции над переменными. Следующие теоремы важны в том отношении, что с их помощью во многих случаях делается ненужным восхождение всякий раз к определению понятия «предел», с разысканием по заданному ε соответствующего N, и т. д. Этим вычисление пределов значительно облегчается.

1° *Если варианты x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, причем

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Из условия теоремы следует, что

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \tag{1}$$

где α_n и β_n — бесконечно малые. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Здесь $\alpha_n \pm \beta_n$ есть бесконечно малая по лемме 1; следовательно, пользуясь вторым определением предела, можно утверждать, что варианта $x_n \pm y_n$ имеет предел, равный $a \pm b$, что и требовалось доказать.

Эта теорема и ее доказательство переносятся на случай любого конечного числа слагаемых.

2° *Если варианты x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и произведение их также имеет конечный предел, и

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Исходя из тех же равенств (1), имеем на этот раз

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Отсюда и следует, что варианта $x_n y_n$, действительно, имеет пределом ab.

Эта теорема может быть распространена на случай любого конечного числа сомножителей (например, методом математической индукции).

3° *Если варианты x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

причём b отлично от 0, то и отношение их также имеет конечный предел, а именно,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Поскольку $b \neq 0$, согласно утверждению 3° в **26**, начиная с некоторого места, не только $y_n \neq 0$, но даже

$$|y_n| > r > 0,$$

где r — постоянное число. Ограничимся теми значениями номера n, для которых это выполняется; тогда отношение $\frac{x_n}{y_n}$ заведомо имеет смысл

Исходя, по-прежнему, из равенств (1), имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Множитель же при нем, на основании сказанного вначале, будет ограниченной переменной:

$$\left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b|\,|y_n|} < \frac{1}{|b|\,r}.$$

Следовательно, по лемме 2, все произведение справа будет бесконечно малым, а оно представляет разность между вариантой $\frac{x_n}{y_n}$ и числом $\frac{a}{b}$. Итак, предел $\frac{x_n}{y_n}$ есть $\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

31. Неопределенные выражения. В предыдущем n° мы рассматривали выражения

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{2}$$

и, в предположении, что варианты x_n и y_n стремятся к конечным пределам (из которых, в случае частного, предел y_n не должен был равняться нулю), устанавливали пределы каждого из этих выражений.

Оставлены были без рассмотрения случаи, как пределы переменных x_n и y_n (один или оба) бесконечны или — если речь идет о частном — когда предел знаменателя нуль. Из этих случаев мы здесь остановимся лишь на четырех, представляющих некоторую важную и интересную особенность.

1°. Рассмотрим сначала частное $\frac{x_n}{y_n}$ и предположим, что обе переменные x_n и y_n одновременно стремятся к нулю. Здесь мы впервые сталкиваемся с совсем особым обстоятельством: хотя нам известны пределы x_n и y_n, но о пределе их отношения — не зная самих этих вариант — никакого общего утверждения мы сделать не можем. *Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих переменных, может иметь различные значения или даже вовсе не существовать.* Следующие простые примеры поясняют это.

Пусть, скажем, $x_n = \frac{1}{n^2}$ и $y_n = \frac{1}{n}$; обе варианты стремятся к нулю. Их отношение $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ также стремится к нулю. Если же, наоборот, положить $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, то хотя они по-прежнему стремятся к нулю, на этот раз их отношение $\frac{x_n}{y_n} = n$ стремится к ∞! Взяв же любое отличное от нуля число a и построив две бесконечно малые $x_n = \frac{a}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, видим, что отношение их имеет пределом a (так как тождественно равно a).

Наконец, если $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ (обе имеют пределом нуль), то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ оказывается вовсе не имеющим предела.

Таким образом, одно знание пределов вариант x_n и y_n в данном случае не позволяет еще судить о поведении их отношения: необходимо знать сами варианты, т. е. закон их изменения, и непосредственно исследовать отношение $\frac{x_n}{y_n}$. Для того, чтобы характеризовать эту особенность, говорят, что когда $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, *выражение* $\frac{x_n}{y_n}$ *представляет неопределенность вида* $\frac{0}{0}$.

2°. В случае, когда одновременно $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$, имеет место подобное же обстоятельство. Не зная самих вариант, общего утверждения о поведении их отношения сделать нельзя. Этот факт иллюстрируется примерами, вполне аналогичными приведённым в 1°:

$$x_n = n \to \infty, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = n^2 \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$$

$$x_n = an \to \pm\infty \ (a \neq 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$$

$$x_n = [2 + (-1)^{n+1}]\, n \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$$

вовсе не имеет предела.

И в этом случае говорят, что *выражение* $\frac{x_n}{y_n}$ *представляет неопределенность — вида* $\frac{\infty}{\infty}$.

Обратимся к рассмотрению произведения $x_n y_n$.

3° Если x_n стремится к нулю, в то время как y_n стремится к $\pm\infty$, то, исследуя поведение произведения $x_n y_n$, мы сталкиваемся с такой же особенностью, как и в пунктах 1° и 2°. Об этом свидетельствуют примеры:

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad x_n y_n = n \to \infty;$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0 \ (a \neq 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = a \to a;$$

$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = (-1)^{n+1}$ вовсе не имеет предела.

В связи с этим при $x_n \to 0$ и $y_n \to \infty$, говорят, что *выражение* $x_n y_n$ *представляет неопределенность вида* $0 \cdot \infty$.

Рассмотрим, наконец, сумму x_n+y_n.

4° Здесь оказывается особым случай, когда x_n и y_n стремятся к бесконечности разных знаков: именно в этом случае о сумме x_n+y_n ничего определенного сказать нельзя, не зная самих вариант x_n и y_n. Различные возможности, представляющиеся здесь, иллюстрируются примерами:

$$x_n=2n\to+\infty,\quad y_n=-n\to-\infty,\quad x_n+y_n=n\to+\infty;$$
$$x_n=n\to+\infty,\quad y_n=-2n\to-\infty,\quad x_n+y_n=-n\to-\infty;$$
$$x_n=n+a\to+\infty,\quad y_n=-n\to-\infty,\quad x_n+y_n=a\to a;$$
$$x_n=n+(-1)^{n+1}\to+\infty,\quad y_n=-n\to-\infty,\quad x_n+y_n=(-1)^{n+1}$$

вовсе не имеет предела.

Ввиду этого, при $x_n\to+\infty$ и $y_n\to-\infty$, говорят, что *выражение x_n+y_n представляет неопределенность вида $\infty-\infty$.*

Таким образом, поставив себе задачей — определить пределы арифметических выражений (2) по пределам вариант x_n и y_n, из которых они составлены, мы нашли четыре случая, когда этого сделать нельзя: неопределенности вида

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty\ ^{*)}.$$

В этих случаях приходится, учитывая закон изменения вариант x_n и y_n, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование получило название раскрытие неопределенности. Далеко не всегда оно так просто, как в приведенных выше схематических примерах. Ниже мы укажем несколько более интересных примеров этого рода.

32. Примеры на нахождение пределов. 1) Пусть $p(n)$ будет многочлен, целый относительно n, с постоянными коэффициентами:

$$p(n)=a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_{k-1}n+a_k.$$

Поставим вопрос о пределе его. Если бы все коэффициенты этого многочлена были положительны (отрицательны), то сразу ясно, что пределом $p(n)$ будет $+\infty$ ($-\infty$). Но в случае коэффициентов разных знаков одни члены стремятся к $+\infty$, другие к $-\infty$, и налицо неопределенность вида $\infty-\infty$.

Для раскрытия этой неопределенности представим $p(n)$ в виде:

$$p(n)=n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}\right).$$

Так как все слагаемые в скобках, начиная со второго, при возрастании n будут бесконечно малыми, то выражение в скобках имеет пределом a_0; первый же множитель стремится к $+\infty$. В таком случае все выражение стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, в зависимости от знака a_0.

Уничтожение «неопределенности» путем преобразования данного выражения (чем мы здесь воспользовались) часто применяется для раскрытия неопределенности.

---

*) Конечно, символы эти лишены всякого числового смысла. Каждый из них является лишь краткой условной характеристикой для выражений одного из четырех типов неопределенности.

2) Если $q(n)$ есть такой же многочлен

$$q(n) = b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \ldots + b_{l-1} n + b_l,$$

то частное $\frac{p(n)}{q(n)}$ при возрастании n представит неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуя и здесь каждый из многочленов так, как это было сделано в 1), получим:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-l} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_l}{n^l}}.$$

Второй множитель здесь имеет конечный предел $\frac{a_0}{b_0}$. Если степени обоих многочленов равны: $k = l$, таков же будет и предел отношения $\frac{p(n)}{q(n)}$ *). При $k > l$ первый множитель стремится к $+\infty$, так что рассматриваемое отношение стремится к $\pm\infty$ $\left(\text{знак — в зависимости от знака } \frac{a_0}{b_0}\right)$. Наконец, при $k < l$, первый множитель, а с ним и все выражение, стремится к нулю.

3) *Найти объем V треугольной пирамиды $SABC$* (рис. 3).

Разделив высоту H пирамиды на n равных частей, проведем через точки делений плоскости, параллельные плоскости основания. В сечении получатся треугольники, подобные основанию. Построим на них систему входящих и выходящих призм; из первых составится тело с объемом V_n, а из вторых — тело с объемом V'_n, причем, очевидно,

$$V_n < V < V'_n.$$

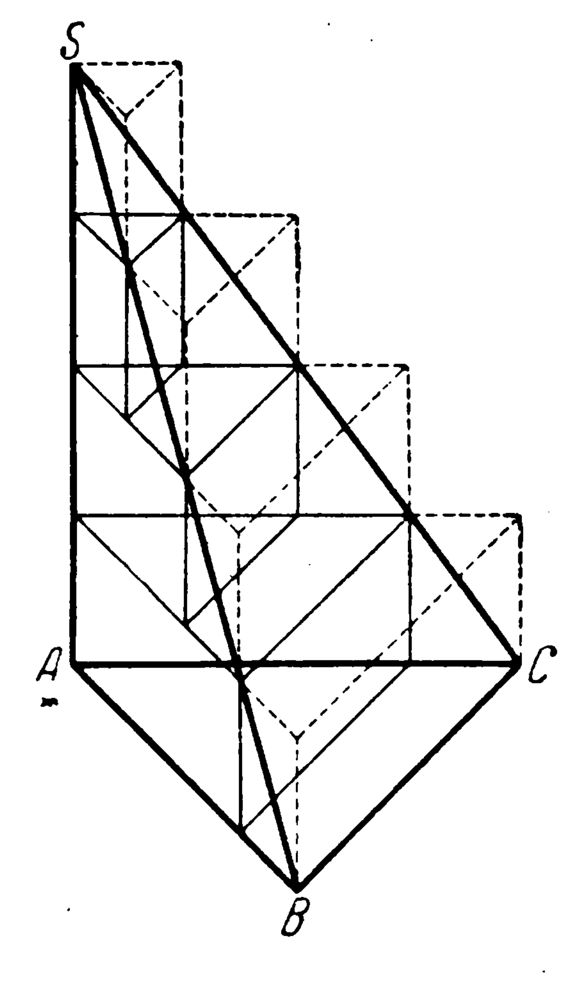


Рис. 3.

Но разность $V'_n - V_n$ есть не что иное, как объем нижней выходящей призмы с основанием $Q =$ = пл. $\triangle ABC$ и высотой $\frac{H}{n}$; итак разность

$$V'_n - V_n = \frac{QH}{n} \to 0$$

при возрастании n, а тогда тем более стремятся к нулю и разности $V - V_n$ и $V'_n - V$, т. е.

$$V = \lim V_n = \lim V'_n.$$

Найдем теперь выражение для V'_n. Мы имеем здесь тело, составленное из ряда выходящих призм; по свойству сечений пирамиды, их основания, соответственно, будут равны:

$$\frac{1}{n^2} Q, \ \frac{2^2}{n^2} Q, \ \ldots, \ \frac{i^2}{n^2} Q, \ \ldots, \ \frac{n^2}{n^2} Q = Q,$$

---

*) Так можно было бы получить предел $\frac{1}{3}$ в примере 4) 25.

в то время как высота у всех одна и та же: $\frac{H}{h}$. Поэтому

$$V'_n = \frac{Q}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)\cdot\frac{H}{n} = \frac{QH}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{QH}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\ ^{*)},$$

так что

$$V = \lim V'_n = \frac{QH}{3}.$$

4) *Найти площадь Q фигуры OPM, образованной частью OM параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$, отрезком OP оси x и отрезком PM* (рис. 4).

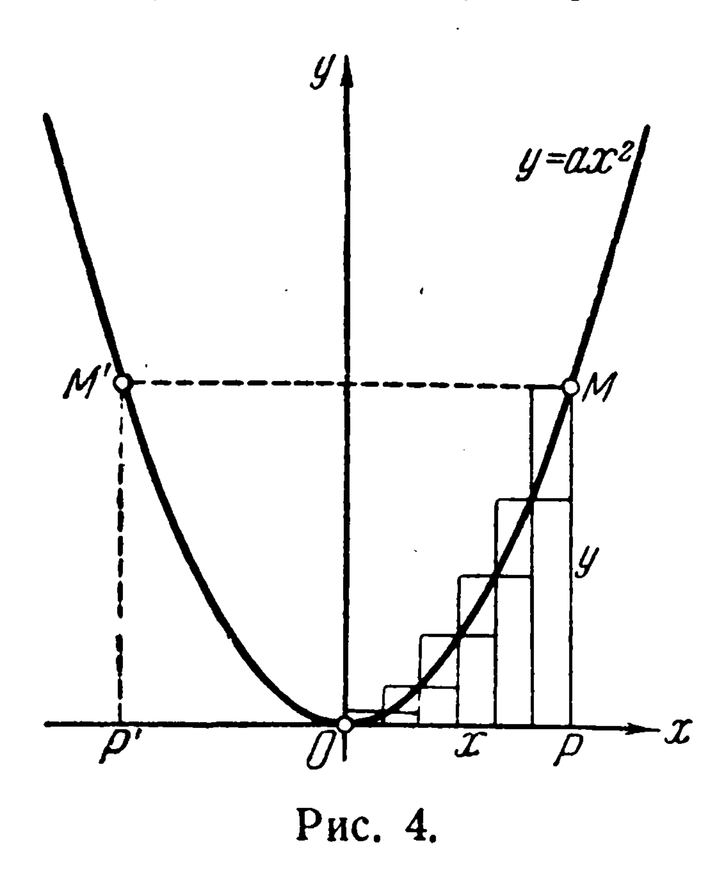


Рис. 4.

Разобьем отрезок OP на n равных частей и построим на них ряд входящих и выходящих прямоугольников. Площади Q_n и Q'_n составленных из них ступенчатых фигур разнятся площадью $\frac{x}{n}\cdot y$ наибольшего прямоугольника. Отсюда, как и в 3), разность $Q'_n - Q_n \to 0$ и, так как

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

очевидно,

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$

Так как высоты отдельных прямоугольников суть ординаты точек параболы, с абсциссами

$$\frac{1}{n}x,\ \frac{2}{n}x, \ldots, \frac{i}{n}x, \ldots, \frac{n}{n}x = x,$$

и — в согласии с уравнением кривой — величина их равна, соответственно,

$$a\cdot\frac{1}{n^2}x^2,\quad a\cdot\frac{2^2}{n^2}x^2, \ldots,\quad a\cdot\frac{i^2}{n^2}x^2, \ldots, a\cdot x^2,$$

то для Q'_n получаем выражение

$$Q'_n = \frac{ax^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)\cdot\frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Отсюда

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{x\cdot ax^2}{3} = \frac{xy}{3}.$$

Опираясь на это, легко получить, что площадь параболического сегмента $M'OM$ равна $\frac{4}{3}xy$, т. е. — двум третям площади описанного прямоугольника (этот результат был известен еще Архимеду) **).

---

*) Здесь мы используем известную формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел.

**) Общее о п р е д е л е н и е площади криволинейной фигуры будет дано лишь в главе X (второй том); там же примененный здесь метод в ы ч и с л е н и я площади будет обобщен на другие криволинейные фигуры.

5) Доказать, что при $0<k<1$,

$$\lim[(n+1)^k-n^k]=0.$$

Мы имеем здесь неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем, вынося n^k за скобку:

$$0<(n+1)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]<n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-k}}.$$

Так как $\frac{1}{n^{1-k}}\to 0$, то и подавно $(n+1)^k-n^k\to 0$, ч. и тр. д.

6) Найти предел варианты

$$x_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),$$

представляющей (согласно предыдущему примеру) неопределенность вида $\infty\cdot 0$.

Умножая и деля на сумму корней $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, преобразуем данное выражение к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$x_n=\sqrt{n}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}};$$

наконец, делим числитель и знаменатель на $\sqrt{n}$:

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Очевидно,

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n};$$

так как выражение справа стремится к 1, то это же справедливо и относительно корня. Окончательно,

$$\lim x_n=\frac{1}{2}.$$

7) Найти пределы вариант:

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},\quad y_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

и, наконец,

$$z_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Варианты x_n и y_n представляют неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ (так как оба корня $>n$, то они стремятся к ∞). Преобразуем, деля числитель и знаменатель на n:

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},\quad y_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Так как оба корня в знаменателе имеют пределом 1 (ср. предыдущий пример), то $x_n\to 1$ и $y_n\to 1$.

Выражение для z_n имеет своеобразную форму: каждое слагаемое этой суммы зависит от n, но и число их растет вместе с n*). Так как каждое слагаемое меньше первого и больше последнего, то

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{т. е.} \quad x_n < z_n < y_n.$$

Но (согласно уже найденному) варианты x_n и y_n стремятся к общему пределу 1; следовательно, — по теореме 3°, **28**, — к тому же пределу стремится и варианта z_n.

8) Пусть дано m положительных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Обозначая через A наибольшее из них, доказать, что

$$\lim \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = A.$$

Заключение это следует из очевидных неравенств

$$A \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} \leqslant A \cdot \sqrt[n]{m}$$

[см. **25**, 5)].

9) Мы видели в **27**, что при $a > 1$ степень $a^n \to +\infty$ (с возрастанием n). Исследуем теперь поведение отношения

$$\frac{a^n}{n^k}$$

(при $k > 0$), представляющего неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Установим одно вспомогательное неравенство [ср. неравенство Бернулли в **19**]. Положив $a = 1 + \lambda$, так что $\lambda > 0$, имеем по формуле бинома Ньютона:

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

Так как для $n > 2$, очевидно, $n - 1 > \frac{n}{2}$, то окончательно,

$$a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2. \tag{3}$$

При $k = 1$, получаем сразу

$$\frac{a^n}{n} > \frac{(a-1)^2}{4} n,$$

так что

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Так как этот результат верен при любом $a > 1$, то, взяв $k > 1$, можем написать (по крайней мере, для достаточно больших n)

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n}\right]^k > \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n},$$

откуда

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad (a > 1).$$

---

*) Эту же особенность, впрочем, имели и выражения для V'_n и Q'_n в 4) 5).

Доказанный, таким образом, для $k \geqslant 1$, этот результат тем более будет верен и для $k < 1$.

10) Тем же неравенством (3) можно воспользоваться, чтобы установить, что

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Именно, полагая в нем $a = \sqrt[n]{n}$, получим

$$n > \frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

откуда

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

что и приводит к требуемому результату.

11) Теперь мы можем установить и другой интересный предел

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$$

Здесь мы снова имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, ибо, как легко показать, $\log_a n \to +\infty$.

Действительно, если взять произвольное число $\varepsilon > 0$, то, поскольку $a^\varepsilon > 1$, для достаточно больших n будет [26, 1°]

$$\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon.$$

Логарифмируя по основанию a, получим

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

откуда и следует высказанное утверждение.

33. Теорема Штольца и ее применения. Для определения пределов неопределенных выражений $\frac{x_n}{y_n}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$ часто бывает полезна следующая теорема, принадлежащая Штольцу (O. Stolz) *).

Пусть варианта $y_n \to +\infty$, причем — хотя бы начиная с некоторого места — с возрастанием n и y_n возрастает: $y_{n+1} > y_n$. Тогда

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

если только существует предел справа (конечный или даже бесконечный).

Допустим сначала, что этот предел равен конечному числу l:

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l.$$

Тогда по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для $n > N$ будет

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

или

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

*) При частном предположении $y_n = n$ мы находим эту теорему еще у Коши (A. L. Cauchy).

Значит, какое бы $n > N$ ни взять, все дроби

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}, \quad \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}}, \quad \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

лежат между этими границами. Так как знаменатели их, ввиду возрастания y_n вместе с номером n, положительны, то между теми же границами содержится и дробь

$$\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N},$$

числитель которой есть сумма всех числителей, написанных выше дробей, а знаменатель — сумма всех знаменателей. Итак, при $n > N$

$$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Напишем теперь тождество (которое легко непосредственно проверить):

$$\frac{x_n}{y_n}-l=\frac{x_N-ly_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right),$$

откуда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right| \leqslant \left|\frac{x_N-ly_N}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|.$$

Второе слагаемое справа, как мы видели, при $n > N$ становится $<\frac{\varepsilon}{2}$; первое же слагаемое, ввиду того, что $y_n \to +\infty$, также будет $<\frac{\varepsilon}{2}$, скажем, для $n > N'$. Если при этом взять $N' > N$, то для $n > N'$, очевидно,

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Случай бесконечного предела приводится к рассмотренному. Пусть, например,

$$\lim \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty.$$

Отсюда, прежде всего, вытекает, что (для достаточно больших n)

$$x_n-x_{n-1} > y_n-y_{n-1},$$

следовательно, вместе с y_n и $x_n \to +\infty$, причем варианта x_n возрастает с возрастанием номера n. В таком случае, доказанную теорему можно применить к *обратному* отношению $\frac{y_n}{x_n}$:

$$\lim \frac{y_n}{x_n}=\lim \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

(ибо здесь предел уже *конечен*), откуда и следует, что

$$\lim \frac{x_n}{y_n}=+\infty, \text{ ч. и тр. д.}$$

Обратимся снова к *примерам*.

12) Мы видели уже в 9), что при $a > 1$

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Этот результат с помощью теоремы Штольца получается сразу:

$$\lim \frac{a^n}{n} = \lim (a^n - a^{n-1}) = \lim a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty.$$

То же относится и к примеру 11).

13) Применим теорему Штольца к доказательству следующего интересного предложения (Коши):

Если варианта a_n имеет предел (конечный или бесконечный), то тот же предел имеет и варианта

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(«среднее арифметическое» первых n значений варианты a_n).

Действительно, полагая в теореме Штольца

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad y_n = n,$$

имеем:

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n.$$

Например, если мы знаем [10)], что $\sqrt[n]{n} \to 1$, то и

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1.$$

14) Рассмотрим теперь варианту (считая k — натуральным)

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$

которая представляет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Полагая в теореме Штольца

$$x_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k, \quad y_n = n^{k+1},$$

будем иметь

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}.$$

Но

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1) n^k + \ldots,$$

так что

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1) n^k + \ldots$$

и [см. 2)]

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{(k+1) n^k + \ldots} = \frac{1}{k+1}.$$

15) В заключение определим предел варианты

$$u_n = n\left(z_n - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1},$$

представляющей в первой форме неопределенность вида $\infty \cdot 0$, а во второй — вида $\infty - \infty$. Произведя вычитание дробей, получим на этот раз неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$u_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \ldots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1) n^k}.$$

Полагая x_n равным числителю этой дроби, а y_n — знаменателю, применим еще раз ту же теорему. Получим

$$\lim u_n = \lim \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]}.$$

Но

$$(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}] = \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \ldots,$$

а

$$n^k - (n-1)^k = kn^{k-1} + \ldots,$$

так что [см. 2)], окончательно,

$$\lim u_n = \lim \frac{\frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \ldots}{(k+1)kn^{k-1} + \ldots} = \frac{1}{2}.$$

§ 3. Монотонная варианта

34. Предел монотонной варианты. Теоремы о существовании пределов переменных, которые приводились до сих пор, имели такой характер: в предположении, что для одних вариант пределы существуют, устанавливалось существование пределов для других вариант, так или иначе связанных с первыми. Вопрос о признаках существования конечного предела для *заданной* варианты, безотносительно к другим переменным, не ставился. Оставляя решение этого вопроса в общем виде до § 4, **39—42,** мы рассмотрим здесь один простой и важный частный класс переменных, для которых он решается легко.

Варианта x_n называется *возрастающей*, если

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots,$$

т. е. если из $n' > n$ следует $x_{n'} > x_n$. Её называют *неубывающей*, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

т. е. если из $n' > n$ следует лишь $x_{n'} \geqslant x_n$. Можно и в последнем случае называть переменную возрастающей, если придать этому термину более широкий смысл.

Аналогично устанавливается понятие об *убывающей* — в узком или широком смысле слова — варианте: так называется варианта, для которой, соответственно,

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$$

или

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$$

так что из $n' > n$ следует (смотря по случаю) $x_{n'} < x_n$ или лишь $x_{n'} \leqslant x_n$.

Переменные всех этих типов, изменяющиеся в одном направлении, объединяются под общим названием *монотонных*. Обычно

о варианте говорят, что она «монотонно возрастает» или «монотонно убывает».

По отношению к монотонным вариантам имеет место следующая — фундаментальной важности —

Теорема. *Пусть дана монотонно возрастающая варианта x_n. Если она ограничена сверху:*

$$x_n \leqslant M \qquad (M = \text{const}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то необходимо имеет конечный предел, в противном же случае — она стремится к $+\infty$.

Точно так же, всегда имеет предел и монотонно убывающая варианта x_n. Ее предел конечен, если она ограничена снизу:

$$x_n \geqslant m \qquad (m = \text{const}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

в противном же случае ее пределом служит $-\infty$.

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей, хотя бы в широком смысле, варианты x_n (случай убывающей варианты исчерпывается аналогично).

Допустим сначала, что эта переменная ограничена сверху. Тогда, по теореме n° **11**, для множества $\{x_n\}$ ее значений должна существовать и (конечная) точная верхняя граница:

$$a = \sup\{x_n\};$$

как мы покажем, именно это число a и будет пределом варианты x_n.

Вспомним, действительно, характерные свойства точной верхней границы [**11**]. Во-первых, для всех значений n будет

$$x_n \leqslant a.$$

Во-вторых, какое бы ни взять число $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N, что

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Так как, ввиду монотонности нашей варианты (здесь мы впервые на это опираемся), при $n > N$ будет $x_n \geqslant x_N$, т. е. и подавно $x_n > a - \varepsilon$, то для этих значений номера n выполняются неравенства

$$0 \leqslant a - x_n < \varepsilon \quad \text{или} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\lim x_n = a$.

Пусть теперь варианта x_n не ограничена сверху. Тогда, сколь велико ни было бы число $E > 0$, найдется хоть одно значение нашей переменной, которое больше E; пусть это будет x_N: $x_N > E$. Ввиду монотонности варианты x_n, для $n > N$ и подавно

$$x_n > E,$$

а это и означает, что $\lim x_n = +\infty$.

Легко понять, что все заключения остаются в силе и для переменной, которая, лишь начиная с некоторого места, становится монотонной (ибо — без влияния на предел переменной — любое число первых её значений можно отбросить).

Обратимся к примерам применения теоремы.

35. Примеры. 1) Рассмотрим варианту (считая $c > 0$)

$$x_n = \frac{c^n}{n!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. $\left(\text{Она при } c > 1 \text{ представляет неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}.\right)$

Так как

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{c}{n+1},$$

то, лишь только $n > c - 1$, переменная становится убывающей; в то же время снизу она ограничена, например, нулем. Следовательно, варианта x_n — по теореме — имеет конечный предел, который мы обозначим через a.

Для того чтобы найти его, перейдем к пределу в написанном выше равенстве; так как x_{n+1} пробегает ту же последовательность значений, что и x_n (с точностью до первого члена) и имеет тот же предел a, то мы получим

$$a = a \cdot 0,$$

отсюда $a = 0$ и, окончательно,

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) Считая снова $c > 0$, определим теперь варианту x_n так:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ldots$$

и вообще

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ корней}}.$$

Таким образом, x_{n+1} получается из x_n по формуле

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Ясно, что варианта x_n монотонно возрастает. В то же время она ограничена сверху, например, числом $\sqrt{c} + 1$. Действительно, $x_1 = \sqrt{c}$ меньше этого числа; если допустить теперь, что какое-либо значение $x_n < \sqrt{c} + 1$, то и для следующего значения получаем

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Таким образом, наше утверждение оправдывается по методу математической индукции.

По основной теореме, варианта x_n имеет некий конечный предел a. Для определения его перейдем к пределу в равенстве

$$x_{n+1}^2 = c + x_n;$$

мы получим, таким образом, что a удовлетворяет квадратному уравнению

$$a^2 = c + a.$$

Уравнение это имеет корни разных знаков; но интересующий нас предел a не может быть отрицательным, следовательно, равен именно положительному корню:

$$a=\frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}.$$

3) Взяв любое x_0, $0<x_0<1$, определим варианту x_n рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=x_n(2-x_n).$$

Допустив, что $0<x_n<1$ (это условие для $n=0$ выполнено), установим, что

$$0<x_n<x_{n+1}<1.$$

Действительно, так как $2-x_n>1$, то $x_{n+1}>x_n$; но $x_n(2-x_n)=1-(1-x_n)^2$, откуда $x_{n+1}<1$. Таким образом, индуктивно доказано, что варианта x_n, монотонно возрастая, остается меньше единицы; следовательно, она имеет конечный предел $a\neq 0$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении, найдем, что $a=1$. Итак, $\lim x_n=1$.

Предоставляем читателю самому разобраться в том, что произойдет, если взять x_0 вне промежутка (0, 1).

Замечание. Пусть c — любое положительное число, и положим $x_n=cy_n$. Написанное выше рекуррентное соотношение заменится таким:

$$y_{n+1}=y_n(2-cy_n).$$

Взяв начальное значение y_0 под условием: $0<y_0<\frac{1}{c}$, получим, что y_n, монотонно возрастая, будет стремиться к $\frac{1}{c}$. По этой схеме на счетных машинах и вычисляется число, обратное c.

4) Пусть даны два положительных числа a и b $(a>b)$. Составим их среднее арифметическое и среднее геометрическое:

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\sqrt{ab}.$$

Известно, что первое среднее больше второго*); в то же время оба они содержатся между исходными числами:

$$a>a_1>b_1>b.$$

Для чисел a_1 и b_1 снова составим их оба средних:

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1},$$

причем

$$a_1>a_2>b_2>b_1,$$

и т. д. Если числа a_n и b_n уже определены, то a_{n+1} и b_{n+1} определяются по формулам

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

и, как и выше,

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n.$$

---

*) Это сразу следует из неравенства

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}>0\quad(\text{при } a\neq b).$$

Таким образом составляются две варианты a_n и b_n, из которых первая оказывается убывающей, а вторая — возрастающей (навстречу одна другой). В то же время

$$a > a_n > b_n > b,$$

так что обе варианты ограничены и, следовательно, обе стремятся к конечным пределам:

$$\alpha = \lim a_n \quad \text{и} \quad \beta = \lim b_n.$$

Если в равенстве

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

перейти к пределу, то получим

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \beta.$$

Таким образом, обе последовательности — и средних арифметических a_n, и средних геометрических b_n — стремятся к общему пределу $\mu = \mu(a, b)$; следуя Гауссу (C. F. Gauss), его называют средним арифметико-геометрическим исходных чисел a и b. Выражение числа $\mu(a, b)$ через эти последние покуда нам недоступно — для него требуется так называемый эллиптический интеграл (см. второй том).

5) Отправляясь снова от двух положительных чисел a и b ($a > b$), на этот раз станем последовательно составлять средние арифметические и средние гармонические *).

$$a_1 = \frac{a + b}{2}, \qquad b_1 = \frac{2ab}{a + b},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1},$$

. . . .

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n},$$

. . . .

Из известного уже нам неравенства $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ (при $a \neq b$) получаем:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \quad \text{и, наконец,} \quad \frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b},$$

так что среднее арифметическое больше среднего гармонического; к тому же оба средних содержатся между исходными числами. Применяя это к a_n и b_n, найдем:

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, убедимся в том, что обе варианты a_n и b_n стремятся к общему пределу c, который можно было бы назвать средним арифметико-гармоническим чисел a и b.

*) Число c называется средним гармоническим двух положительных чисел a и b, если обратное ему число $\frac{1}{c}$ является средним арифметическим для обратных чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \quad \text{откуда} \quad c = \frac{2ab}{a+b}.$$

Однако, здесь предел c имеет простое выражение через a и b. Именно, видим, что $a_1b_1 = ab$; так как, аналогично, и $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$, то заключаем, что при всех значениях n

$$a_nb_n = ab.$$

Переходя здесь к пределу, получаем

$$c = \sqrt{ab},$$

т. е. среднее арифметико-гармоническое двух чисел попросту есть их среднее геометрическое.

6) Наконец, приведем более сложный пример.

Исходя из некоторого вещественного числа c, положим $x_1 = \frac{c}{2}$, а последующие значения варианты x_n определим индуктивно формулой

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}. \tag{1}$$

Исследуем вопрос о пределе этой варианты при двух различных предположениях относительно c.

Заметим, что, если бы мы наперёд знали, что существует конечный предел

$$a = \lim x_n, \tag{2}$$

то найти его не составило бы труда. Стоит лишь перейти к пределу в равенстве (1), определяющем нашу варианту, чтобы получить

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \quad \text{или} \quad a^2 - 2a + c = 0.$$

Из этого квадратного уравнения находим

$$a = 1 \underset{(+)}{-} \sqrt{1-c}. \tag{3}$$

Отсюда сразу видно, что варианта x_n заведомо не может иметь конечного предела при $c > 1$.

(а) Предположим сначала, что $0 < c \leqslant 1$. Тогда ясно, что $x_n > 0$. Вычитая из (1) почленно аналогичное равенство:

$$x_n = \frac{c}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

найдем, что

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2}.$$

Очевидно, $x_2 > x_1 = \frac{c}{2}$; а из предыдущего равенства следует, что, лишь только $x_n > x_{n-1}$, тотчас же и $x_{n+1} > x_n$. Таким образом, по методу математической индукции устанавливается факт монотонного возрастания варианты x_n.

Аналогично доказывается ограниченность (сверху) нашей варианты:

$$x_n < 1.$$

Это неравенство очевидно для $n = 1$; если же оно соблюдается при какомнибудь значении n, то будет верно и для $n + 1$ — в силу (1). Значит, предел (2), действительно, существует, а тогда он выражается формулой (3), и именно со знаком минус при корне, так как предел этот не может быть больше единицы.

б) Пусть теперь $-3 \leqslant c < 0$. Очевидно, для всех n:

$$x_n \geqslant \frac{c}{2}.$$

Покажем, что в этом случае $x_n < 0$. Это верно при $n=1$; если же допустить справедливость этого утверждения для какого-либо значения n, то

$$|x_n| \leqslant \frac{|c|}{2}, \quad x_n^2 \leqslant \frac{|c|^2}{4} < |c| \quad \left(\text{так как } \frac{|c|}{4} < 1\right),$$

и x_{n+1} будет иметь знак $\frac{c}{2}$, т. е. будет отрицательным, ч. и тр. д.

На этот раз варианта x_n не будет монотонной. Однако, если положить в (1) $n=2k$ и $2k-2$, а затем $n=2k+1$ и $2k-1$, и в обоих случаях почленно вычесть, то получим:

$$\left.\begin{aligned} x_{2k+1} - x_{2k-1} &= \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2}, \\ x_{2k+2} - x_{2k} &= \frac{x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда можно индуктивно заключить, что всегда

$$x_{2k+1} > x_{2k-1} \quad \text{и} \quad x_{2k+2} < x_{2k}.$$

Действительно, $x_3 > x_1 = \frac{c}{2}$; тогда $|x_3| < |x_1|$, $x_3^2 < x_1^2$, и по второй из формул (4) (при $k=1$) будет $x_4 < x_2$. Следовательно, $|x_4| > |x_2|$, $x_4^2 > x_2^2$, и по первой из формул (4) (при $k=2$) получится $x_5 > x_3$, и т. д.

Таким образом, в рассматриваемом случае, монотонными будут порознь взятые варианты x_{2k-1} и x_{2k} ($k=1, 2, 3, \ldots$); так как они содержатся между конечными границами $\frac{c}{2}$ и 0, то обе имеют конечные пределы

$$a' = \lim x_{2k-1}, \quad a'' = \lim x_{2k}.$$

Остается показать, что $a' = a''$. С этой целью устремим значок n в (1) к бесконечности, сначала через четные значения, а затем — через нечетные. Мы получим в пределе два соотношения:

$$a' = \frac{c}{2} + \frac{a''^2}{2}, \quad a'' = \frac{c}{2} + \frac{a'^2}{2}. \tag{5}$$

Вычитая, исключим c:

$$(a' - a'')(a' + a'' + 2) = 0.$$

Как мы установим сейчас, если $c > -3$, вторые скобки обратиться в 0 не могут, так что необходимо $a' = a''$. Действительно, в противном случае, подставляя $a'' = -a' - 2$ во второе из соотношений (5), мы получили бы для a' квадратное уравнение

$$a'^2 + 2a' + (4 + c) = 0,$$

которое, именно при $c > -3$, вещественных корней иметь не может.

Наконец, если $c = -3$, вторые скобки обращаются в 0 одновременно с первыми, ибо в этом случае и $a' = -1$ и $a'' = -1$.

Итак, во всех случаях $a' = a''$. Обозначив общее значение этих пределов через a, имеем для a выражение (3), очевидно, снова со знаком минус при корне, ибо предел отрицательной варианты x_n не может быть положительным.

Изложенные примеры дают повод к следующему замечанию. Доказанная теорема является типичной «теоремой существования»: в ней устанавливается факт существования предела, но не дается никакого приема для его

вычисления. Тем не менее она имеет очень важное значение. С одной стороны, в теоретических вопросах часто только существование предела представляется нужным. С другой же стороны, во многих случаях возможность предварительно удостовериться в существовании предела важна тем, что открывает пути для его фактического вычисления. Так, в примерах 1), 2), 3), 5), 6) *именно знание факта существования предела позволило, с помощью перехода к пределу в некоторых равенствах, установить точное значение предела.*

В этом отношении особенно поучителен пример 6) (б). Ведь при $c < -3$ выражение (3) сохраняет смысл, но это вовсе не означает, что оно продолжает давать предел варианты x_n; напротив, он здесь не существует: например, как нетрудно проверить, при $c = -4$ наша варианта пробегает последовательность значений:

$$-2,\ 0,\quad -2,\ 0,\quad -2,\ 0,\ \ldots$$

и никакого предела не имеет.

В примере 4) мы выражения для предела не имеем, но, зная что он существует, легко можем вычислить его с любой степенью точности, ибо он содержится между вариантами a_n и b_n, которые к нему стремятся с обеих сторон.

В следующем n° мы познакомимся с еще одним важным примером приложения теоремы о монотонной варианте.

36. Число e. Мы используем здесь предельный переход для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа.

Рассмотрим варианту

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и попытаемся применить к ней теорему n° **34**.

Так как с возрастанием показателя n основание степени здесь убывает, то «монотонный» характер варианты непосредственно не усматривается. Для того чтобы убедиться в нем, прибегнем к разложению по формуле бинома:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots \\ &\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Если от x_n перейти теперь к x_{n+1}, т. е. увеличить n на единицу, то, прежде всего, добавиться новый, $(n+2)$-й (положительный) член, каждый же из написанных $n+1$ членов увеличится, ибо

любой множитель в скобках вида $1-\frac{s}{n}$ заменится бо́льшим множителем $1-\frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что

$$x_{n+1} > x_n,$$

т. е. варианта x_n оказывается возрастающей.

Теперь покажем, что она к тому же ограничена сверху. Опустив в выражении (6) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с 3) числом 2, мы еще увеличим полученное выражение, так что, в свою очередь,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия (начинающаяся членом $\frac{1}{2}$) имеет сумму <1, поэтому $y_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Отсюда уже следует, по теореме n° **34**, что варианта x_n имеет конечный предел. По примеру Эйлера (L. Euler), его обозначают всегда буквой e. Это число

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots$$

В следующем n° мы покажем удобный прием для приближенного вычисления числа e, а также попутно установим, что e есть число иррациональное.

Некоторые свойства числа e, которые мы установим впоследствии [**54**, (13)], делают особенно выгодным выбор именно этого числа в качестве основания для системы логарифмов. Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются знаком ln без указания основания; в теоретических исследованиях пользуются исключительно натуральными логарифмами *).

---

*) Эти логарифмы иногда ошибочно называют Неперовыми по имени шотландского математика Непера (J. Napier, XVI — XVII в.) — изобретателя логарифмов. Сам Непер не имел понятия об основании системы логарифмов (ибо строил их своеобразно, на другом принципе), но его логарифмы соответствуют логарифмам по основанию, близкому к $\frac{1}{e}$. Близкое к e основание имеют логарифмы его современника Бюрги (J. Burgi).

Упомянем, что обычные, десятичные, логарифмы связаны с натуральными известной формулой:

$$\log x = \ln x \cdot M,$$

где M есть модуль перехода и равен

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434294\ \ldots;$$

это легко получить, если прологарифмировать по основанию 10 тождество

$$x = e^{\ln x}.$$

37. Приближенное вычисление числа e. Вернемся к равенству (6). Если фиксировать k и, считая $n > k$, отбросить все члены последней части, следующие за $(k+1)$-м, то получим неравенство

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Увеличивая здесь n до бесконечности, перейдем к пределу; так как все скобки имеют пределом 1, то найдем:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство имеет место при любом натуральном k. Таким образом, имеем

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

откуда ясно [в силу теоремы 3°, **28**], что и

$$\lim y_n = e.$$

Заметим попутно, что y_n есть $(n+1)$-я частичная сумма для бесконечного ряда [**25**, 9)]

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

и написанное только-что предельное соотношение показывает, что e является его суммой; говорят также, что число e разлагается в этот ряд, и пишут

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Варианта y_n для приближенного вычисления числа e гораздо удобнее, чем x_n. Оценим степень близости y_n к e. С этой целью

рассмотрим сначала разность между любым значением y_{n+m} ($m=1, 2, 3, \ldots$), следующим за y_n, и самим y_n. Имеем

$$y_{n+m}-y_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{(n+m)!}=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right\}.$$

Если в скобках { } заменить все множители в знаменателях дробей через $n+2$, то получим неравенство

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\},$$

которое лишь усилится, если заменить скобки суммой бесконечной прогрессии:

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Сохраняя здесь n неизменным, станем увеличивать m до бесконечности; варианта y_{n+m} (занумерованная значком m) принимает последовательность значений

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3},\ \ldots,\ y_{n+m},\ \ldots,$$

очевидно, сходящуюся к e. Поэтому получаем, в пределе,

$$e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

или, наконец,

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!n}\ ^{*)}.$$

Если через θ обозначить отношение разности $e-y_n$ к числу $\frac{1}{n!n}$ (оно, очевидно, содержится между 0 и 1), то можно написать также

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!n}.$$

Заменяя здесь y_n его развернутым выражением, мы и придем к важной формуле:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}, \tag{7}$$

---

*) Так как (это легко проверить) $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$.

которая послужит отправной точкой для вычисления e. Отбрасывая последний, «дополнительный», член и заменяя каждый из оставленных членов его десятичным приближением, мы и получим приближенное значение для e.

Поставим себе задачей с помощью формулы (7) вычислить e, скажем, с точностью до $\frac{1}{10^7}$. Прежде всего, нужно установить, каким взять число n (которое находится в нашем распоряжении), чтобы осуществить эту точность.

Вычисляя последовательно числа, обратные факториалам (см. прилагаемую табличку), мы видим, что при $n = 10$ «дополнительный» член формулы (7) будет уже

$$\frac{\theta}{n!n} = \frac{\theta}{10!\,10} < 0{,}000\,000\,03,$$

так что, отбрасывая его, мы делаем погрешность, значительно меньшую поставленной границы. Остановимся же на этом значении n. Каждый из остальных членов обратим в десятичную дробь, округляя (в запас точности) на восьмом знаке так, чтобы погрешность по абсолютной величине была меньше половины единицы на восьмом месте, т. е. меньше $\frac{1}{2.10^8}$. Мы свели результаты вычислений в табличку. Рядом с приближённым числом поставлен знак ($+$ или $-$), указывающий на знак поправки, которую необходимо было бы прибавить для восстановления точного числа.

$$\begin{aligned}
& \quad 2{,}000\,000\,00 \\
\frac{1}{2!} &= 0{,}500\,000\,00 \\
\frac{1}{3!} &= 0{,}166\,666\,67\,- \\
\frac{1}{4!} &= 0{,}041\,666\,67\,- \\
\frac{1}{5!} &= 0{,}008\,333\,33\,+ \\
\frac{1}{6!} &= 0{,}001\,388\,89\,- \\
\frac{1}{7!} &= 0{,}000\,198\,41\,+ \\
\frac{1}{8!} &= 0{,}000\,024\,80\,+ \\
\frac{1}{9!} &= 0{,}000\,002\,76\,- \\
\frac{1}{10!} &= 0{,}000\,000\,28\,- \\
\hline
& \quad 2{,}718\,281\,81
\end{aligned}$$

Итак, как мы видим, поправка на отбрасывание дополнительного члена меньше $\frac{3}{10^8}$. Учитывая теперь ещё и поправки на округление (с их знаками), легко сообразить, что суммарная поправка к полученному приближенному значению числа e лежит между

$$-\frac{3}{10^8} \text{ и } +\frac{5}{10^8}.$$

Отсюда само число e содержится между дробями

$$2{,}718\,281\,78 \text{ и } 2{,}718\,281\,86,$$

так что можно положить

$$e = 2{,}718\,281\,8_{\pm\,0{,}000\,000\,1}.$$

Отметим попутно, что та же формула (7) может служить и для доказательства иррациональности числа e.

Рассуждая от противного, попробуем допустить, что e равно рациональной дроби $\frac{m}{n}$; тогда, если именно для этого n написать формулу (7), будем иметь

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!\,n} \quad (0<\theta<1).$$

Умножив обе части этого равенства на $n!$, по сокращении знаменателей всех дробей, кроме последней, мы получим слева целое число, а справа — целое число с дробью $\frac{\theta}{n}$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает то, что требовалось.

38. Лемма о вложенных промежутках. В заключение этого параграфа, посвященного монотонной варианте, остановимся на сопоставлении двух таких вариант, изменяющихся «навстречу» одна другой:

Пусть даны монотонно возрастающая варианта x_n и монотонно убывающая варианта y_n, причем всегда

$$x_n<y_n. \tag{8}$$

Если их разность $y_n - x_n$ стремится к 0, то обе варианты имеют общий конечный предел:

$$c=\lim x_n=\lim y_n.$$

Действительно, при всех значениях n имеем: $y_n \leqslant y_1$, а значит, ввиду (8), и $x_n<y_1$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Возрастающая переменная x_n оказывается ограниченной сверху, следовательно, она имеет конечный предел

$$c=\lim x_n.$$

Аналогично, для убывающей переменной y_n будем иметь

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

так что и она стремится к конечному пределу

$$c'=\lim y_n.$$

Но, по теореме 1°, **30**, разность обоих пределов

$$c'-c=\lim(y_n-x_n),$$

т. е. по условию равна 0, так что $c'=c$; это и требовалось доказать.

Доказанному утверждению можно придать другую форму, в которой оно чаще применяется.

Назовем промежутком $[a, b]$ (где $a<b$) множество всех чисел (или, как говорят, «точек») x, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Числа («точки») a и b называются, соответственно, левым и правым концами промежутка, а их разность $b-a$ — длиной

промежутка. Нетрудно видеть, что на числовой оси промежутку отвечает отрезок (той же длины).

Условимся говорить, что промежуток $[a', b']$ содержится в промежутке $[a, b]$ или вложен в него, если все точки первого промежутка принадлежат второму или, что то же самое, если

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b.$$

Геометрический смысл этого ясен.

Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных один в другой промежутков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2] \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

так что каждый последующий содержится в предыдущем, причем длины этих промежутков стремятся к 0 *с возрастанием* n:

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда концы a_n *и* b_n *промежутков (с разных сторон) стремятся к общему пределу*

$$c = \lim a_n = \lim b_n,$$

который представляет единственную точку, общую всем промежуткам.

Это есть лишь перефразировка доказанной выше теоремы: согласно условию,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

так что левый конец a_n и правый конец b_n n-го промежутка играют здесь роль монотонных вариант x_n и y_n.

Так как a_n стремится к c возрастая, а b_n — убывая, то

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

т. е. точка c, действительно, принадлежит всем нашим промежуткам. В то же время другой, отличной от c, точки c' с тем же свойством быть не может, ибо иначе мы имели бы

$$b_n - a_n \geqslant |c' - c| > 0$$

и длина n-го промежутка не могла бы стремиться к 0.

Впоследствии нам не раз придется опираться на это предложение, которое мы будем называть «леммой о вложенных промежутках».

§ 4. Принцип сходимости. Частичные пределы

39. Принцип сходимости. Пусть задана варианта x_n, пробегающая последовательность значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots \tag{1}$$

Займемся, наконец, вопросом об общем признаке существования конечного предела для этой варианты. Само опреде-

ление предела для этой цели служить не может, ибо в нем фигурирует уже тот предел, о существовании которого идет речь. Мы нуждаемся в признаке, который использовал бы лишь то, что нам дано, а именно — последовательность (1) значений варианты.

Поставленную задачу решает следующая замечательная теорема, принадлежащая чешскому математику Больцано (B. Bolzano) и французскому математику Коши (A. L. Cauchy); ее называют *принципом сходимости.*

Теорема. *Для того чтобы варианта x_n вообще имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, чтобы неравенство*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \tag{2}$$

выполнялось, лишь только $n > N$ и $n' > N$.

Как видит читатель, суть дела здесь в том, чтобы значения переменной между собой безгранично сближались по мере возрастания их номеров. Обратимся к доказательству.

Необходимость. Пусть варианта x_n имеет определенный конечный предел, скажем, a. По самому определению предела [**23**], каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер N, что для $n > N$ всегда имеет место неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем теперь любые два номера $n > N$ и $n' > N$; для них одновременно будет

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Этим необходимость условия доказана. Значительно труднее доказать его

Достаточность. Пусть условие теоремы выполнено; требуется установить, что тогда для варианты x_n существует определенный конечный предел.

С этой целью произведем в области всех вещественных чисел сечение по следующему правилу. В нижний класс A отнесем каждое такое вещественное число α, для которого, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$x_n > \alpha.$$

В верхний же класс A' отнесем все остальные (т. е. не попавшие в A) вещественные числа α'.

Прежде всего, убедимся в непустоте этих классов, используя для этого условие теоремы. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, возьмём соответствующий ему (в указанном там смысле) номер N. Если $n > N$ и $n' > N$, то выполняется (2), откуда

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon. \tag{3}$$

Теперь мы видим, что каждое число $x_{n'} - \varepsilon$ (где $n' > N$) в отдельности относится к классу A, ибо для достаточно больших n (именно, для $n > N$) x_n его превосходит. С другой стороны, так как (для тех же n) x_n оказывается меньшим, чем любое из чисел вида $x_{n'} + \varepsilon$ (при $n' > N$), то ни одно такое число заведомо не может принадлежать A и, следовательно, относится к классу A'.

Правило, определяющее классы A и A', так сформулировано, что из него непосредственно ясно, что каждое вещественное число попадает в один и только один из этих классов. Вместе с тем, каждое число α (из A) меньше каждого числа α' (из A'); ведь, при $\alpha > \alpha'$, варианта x_n, начиная с некоторого места, превзошла бы и α', вопреки определению чисел α'. Таким образом, произведенное разбиение области вещественных чисел на классы есть, действительно, сечение.

По основной теореме Дедекинда [10], существует такое вещественное число a*), которое является пограничным между числами обоих классов:

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'.$$

Но, как мы отметили, при любом $n' > N$ число $x_{n'} - \varepsilon$ есть одно из α, а число $x_{n'} + \varepsilon$ — одно из α'. Поэтому, в частности,

$$x_{n'} - \varepsilon \leqslant a \leqslant x_{n'} + \varepsilon \quad \text{или} \quad |a - x_{n'}| = |x_{n'} - a| \leqslant \varepsilon$$

для любого $n' > N$. По определению же предела [23], это и значит, что

$$a = \lim x_n.$$

Теорема доказана.

Применение этого признака мы будем не раз встречать в дальнейшем изложении.

40. Частичные последовательности и частичные пределы. Рассмотрим теперь, наряду с последовательностью (1), какую-либо извлеченную из нее частичную последовательность (или подпоследовательность)

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{4}$$

где $\{n_k\}$ есть некоторая последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots \tag{5}$$

*) В указанной теореме оно было обозначено через β.

Здесь роль номера, принимающего последовательно все натуральные значения, играет уже не n, а k; n_k же представляет собой варианту, принимающую натуральные значения и, очевидно, стремящуюся к ∞ при возрастании k.

Если последовательность (1) *имеет определенный предел* a (*конечный или нет*), *то тот же предел имеет и частичная последовательность* (4).

Остановимся для примера на случае конечного a. Пусть для заданного $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, что при $n > N$ уже выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Ввиду того, что $n_k \to \infty$, существует и такое K, что при $k > K$ будет $n_k > N$. Тогда, при тех же значениях k, будет выполняться неравенство

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

[Заметим попутно, что в этом рассуждении мы не опирались на неравенства (5), т. е. не пользовались монотонностью варианты n_k. Значит, наше *утверждение сохраняет силу, по какому бы закону не стремилась к* $+\infty$ *целочисленная варианта* n_k.]

Если для варианты x_n или, что то же, для последовательности (1) нет определенного предела, то это не исключает возможности существования предела для какой-либо частичной последовательности (4) или для соответствующей ей варианты $x'_k = x_{n_k}$. Такой предел называют частичным пределом для варианты x_n или последовательности (1).

Пусть, например, $x_n = (-1)^{n+1}$; предела эта варианта не имеет. Если же заставить n пробегать лишь одни нечётные или одни четные значения, то частичные последовательности

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \ \ldots, \quad x_{2k-1} = 1, \ \ldots$$

и

$$x_2 = -1, \quad x_4 = -1, \ \ldots, \quad x_{2k} = -1, \ \ldots$$

будут иметь пределом, соответственно, 1 или -1. Эти числа и являются частичными пределами варианты x_n. Аналогично, варианта $x_n = (-1)^{n+1} n$ имеет частичные пределы $+\infty$ и $-\infty$, а варианта $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$ — частичные пределы $+\infty$ и 0.

Легко построить примеры варианты, для которой существует бесконечное множество различных частичных пределов; вот один из них. Зададим варианту x_n следующим правилом: если номер n написан по десятичной системе: $\alpha\beta \ldots \nu$ (где $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ — цифры), то полагаем

$$x_n = 0,\alpha\beta \ldots \nu.$$

Например, $x_{13} = 0{,}13$, $x_{4035} = 0{,}4035$ и т. д. При этом каждая конечная десятичная дробь, между 0,1 и 1, встречается в ряду значений нашей варианты бесконечное множество раз: например, 0,217 — на 217-м месте, а также на 2170-м, 21700-м и т. д.

Отсюда сразу следует, что каждая конечная десятичная дробь между 0,1 и 1 будет служить частичным пределом для нашей варианты. Но если взять и любое другое вещественное число α в этих границах, то стоит лишь представить его в виде бесконечной десятичной дроби [9]:

$$\alpha = 0, c_1 c_2 \ldots c_k \ldots \qquad (c_1 \geqslant 1),$$

чтобы стало ясно, что частичная последовательность

$$x_{c_1} = 0, c_1, \quad x_{c_1 c_2} = 0, c_1 c_2, \ldots, x_{c_1 c_2} \ldots {}_{c_k} = 0, c_1 c_2 \ldots c_k, \ldots$$

имеет именно это число α своим пределом. Таким образом, в рассматриваемом случае частичными пределами последовательности заполняется весь промежуток [0,1; 1].

Всегда ли для варианты x_n существуют частичные пределы? На этот вопрос легко ответить утвердительно в случае, когда множество $\{x_n\}$ не ограничено. Пусть например, оно не ограничено сверху; тогда для каждого натурального k найдется в ряду (1) член x_{n_k}, больший, чем k:

$$x_{n_k} > k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(причем легко устроить так, чтобы номера n_k возрастали вместе с k). Частичная последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots,$$

очевидно, будет иметь пределом $+\infty$; это и есть частичный предел для нашей варианты.

Утвердительный ответ можно дать и в случае ограниченной варианты; но это требует более тонких соображений, которые мы приведём в следующем n°.

41. Лемма Больцано — Вейерштрасса (B. Bolzano — C. Weierstrass). *Из любой ограниченной последовательности* (1) *всегда можно извлечь такую частичную последовательность* (4), *которая сходилась бы к конечному пределу.*

(Эта формулировка не исключает возможности и равных чисел в составе данной последовательности, что удобно в приложениях.)

Доказательство. Пусть все числа x_n заключены между границами a и b. Разделим этот промежуток $[a, b]$ пополам, тогда хоть в одной половине будет содержаться бесконечное множество элементов данной последовательности, ибо, в противном случае, и во всем промежутке $[a, b]$ этих элементов содержалось бы конечное число, что невозможно. Итак, пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин, которая содержит бесконечное множество чисел x_n (или, если обе половины таковы, то — любая из них).

Аналогично, из промежутка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$ — при условии, чтобы в ней содержалось бесконечное множество чисел x_n, и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, на k-й стадии его выделим промежуток $[a_k, b_k]$, также содержащий бесконечное множество чисел x_n.

Каждый из построенных промежутков (начиная со второго) содержится в предыдущем, составляя его половину. Кроме того, длина k-го промежутка, равная

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

стремится к нулю с возрастанием k. Применяя сюда лемму о вложенных промежутках [38], заключаем, что a_k и b_k стремятся к общему пределу c.

Теперь построение частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$ произведем индуктивно — следующим образом. В качестве x_{n_1} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n нашей последовательности, содержащихся в $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n, *следующих* за x_{n_1} и содержащихся в $[a_2, b_2]$, и т. д. Вообще, в качестве x_{n_k} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n, *следующих за ранее выделенными* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ и содержащихся в $[a_k, b_k]$. Возможность такого выбора, производимого последовательно, обусловливается именно тем, что каждый из промежутков $[a_k, b_k]$ содержит *бесконечное множество* чисел x_n, т. е. содержит элементы x_n со сколь угодно большими номерами.

Далее, так как

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{и} \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

то, по теореме 3°, **28**, и $\lim x_{n_k} = c$, ч. и тр. д.

Метод, применённый при доказательстве этой леммы и состоящий в последовательном делении пополам рассматриваемых промежутков, известен под именем *метода Больцано*; он часто будет нам полезен и в других случаях.

Лемма *Больцано — Вейерштрасса* значительно облегчает доказательство многих трудных теорем, как бы вбирая в себя основную трудность рассуждения. Для примера докажем снова с ее помощью *принцип сходимости*; мы имеем в виду *достаточность* содержащегося в нем условия, которая потребовала от нас в **39** значительных усилий.

Итак, пусть условие выполнено, и по заданному $\varepsilon > 0$ найден такой номер N, что для $n > N$ и $n' > N$ имеют место неравенства (2) или (3). Если n' при этом фиксировать, то из (3) ясно, что варианта x_n, во всяком случае, будет ограниченной: ее значения для $n > N$ содержатся между числами $x_{n'} - \varepsilon$ и $x_{n'} + \varepsilon$, и нетрудно эти границы раздвинуть так, чтобы охватить и первые N значений: $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Тогда, по только что доказанной теореме, можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу c:

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Покажем, что к этому пределу стремится вообще и варианта x_n. Можно выбрать k настолько большим, чтобы было

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

и, одновременно, $n_k > N$. Следовательно, в (2) можно взять $n' = n_k$:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon,$$

и, сопоставляя оба эти неравенства, окончательно находим

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (\text{для } n > N),$$

что и доказывает наше утверждение *).

42. Наибольший и наименьший пределы. Итак, для любой варианты x_n, будь она ограничена или нет, существуют частичные пределы. Мы покажем сейчас, что среди этих частичных пределов необходимо найдутся наибольший и наименьший; они называются наибольшим и наименьшим пределами самой варианты x_n и обозначаются, соответственно, через

$$\overline{\lim}\, x_n \quad \text{и} \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

Теорема. *Наибольший и наименьший пределы для варианты x_n всегда существуют. Их равенство есть условие, необходимое и достаточное для существования предела варианты (в обычном смысле)* **).

Доказательство. Начнем с рассмотрения вопроса о наибольшем пределе. Мы уже видели выше [40], что если варианта x_n не ограничена сверху, то из последовательности (1) ее значений можно выделить такую частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\lim x_{n_k} = +\infty.$$

Таким образом, в этом случае $+\infty$ является одним из частичных пределов варианты, и, очевидно, наибольшим из всех возможных, так что

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

Предположим же теперь, что варианта x_n ограничена сверху:

$$x_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Рассмотрим точную верхнюю границу значений x_n для $n > k$:

$$M_k = \sup_{n>k} \{x_n\} = \sup \{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} \leqslant M.$$

При возрастании k значение M_k может разве лишь уменьшаться, следовательно, по теореме о монотонной варианте [34], во всяком случае существует предел (при возрастании k до бесконечности)

$$\lim M_k,$$

конечный или равный $-\infty$.

---

*) Число 2ε в такой же мере «произвольно малое» число, как и ε. Если угодно, можно было сначала взять не ε, а $\frac{\varepsilon}{2}$, тогда мы здесь получили бы ε. Впредь подобных указаний мы уже делать не будем.

**) Эта теорема, доказательство которой не использует леммы Больцано — Вейерштрасса, перекрывает последнюю.

Случай, когда этот предел есть $-\infty$, также исчерпывается просто. Для любого $E>0$ найдется такой номер $k=N$, что

$$M_N < -E;$$

но для $n>N$, очевидно, $x_n \leqslant M_N$, так что при указанных значениях n и подавно

$$x_n < -E.$$

А это означает, что существует предел (в обычном смысле)

$$\lim x_n = -\infty,$$

который одновременно будет и наибольшим и наименьшим*).

Остается рассмотреть самый важный случай, когда существует конечный предел:

$$\lim M_k = M^*;$$

мы покажем, что это число M^* и будет искомым наибольшим пределом для варианты x_n.

С этой целью установим два характерных свойства числа M^*.

Если произвольно взять число $\varepsilon>0$, то найдется такое $k=N'$, что $M_{N'} < M^*+\varepsilon$; так как, при $n>N'$ $x_n \leqslant M_{N'}$, то и подавно $x_n < M^*+\varepsilon$. Итак, имеем

I свойство числа M^*: *каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует такой номер N', что для всех $n>N'$ будет*

$$x_n < M^* + \varepsilon.$$

С другой стороны, при произвольном $\varepsilon>0$ и любом k будет

$$M_k \geqslant M^* > M^* - \varepsilon.$$

Но тогда, по свойству точной верхней границы [11], среди значений x_n с номерами $n=k+1,\ k+2,\ k+3, \dots$ найдется такое значение $x_{n'}$, что и $x_{n'} > M^*-\varepsilon$. Заменяя произвольно взятое k на N, сформулируем

II свойство числа M^*: *каковы бы ни были $\varepsilon>0$ и номер N, найдется значение $x_{n'}$ с номером $n'>N$ такое, что*

$$x_{n'} > M^* - \varepsilon.$$

Подчеркнем разницу в формулировках обоих свойств. В первом случае неравенство выполняется для всех значений x_n сплошь, начиная с некоторого. Во втором же случае неравенству удовлетворяют лишь отдельные значения x_n, среди которых, однако, имеются значения со сколь угодно большими номерами.

Прежде всего, опираясь на эти свойства, докажем, что число M^* служит частичным пределом для варианты x_n. Для этого нужно выделить частичную последовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся к M^*.

Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$. Положив $n_1=1$, допустим, что номера

$$n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \dots < n_{i-1}$$

уже выбраны, и покажем, как выбрать n_i. По I свойству для $\varepsilon=\varepsilon_i$ найдём соответствующий номер $N'=N_i$, такой, что для всех $n>N_i$ будет $x_n < M^*+\varepsilon_i$. Теперь обратимся ко II свойству, полагая по-прежнему $\varepsilon=\varepsilon_i$, а за N взяв наибольший из номеров n_{i-1} и N_i; этому выбору чисел ε и N и отвечает номер $n'=n_i$. Для него, с одной стороны,

$$x_{n_i} > M^* - \varepsilon_i,$$

*) При наличии обычного предела варианты все частичные пределы с ним совпадают [40].

с другой же, так как $n_i > N_i$, одновременно будет и

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon_i.$$

Отметим, кроме того, что $n_i > n_{i-1}$.

Для элементов x_{n_i} построенной таким путем — индуктивно — последовательности будем иметь

$$|x_{n_i} - M^*| < \varepsilon_i \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots),$$

так что, действительно, $x_{n_i} \to M^*$.

Наконец, установим, что ни один частичный предел не может превзойти M^*. В самом деле, пусть для некоторой частичной последовательности $\{x_{n_i}\}$ имеем $x_{n_i} \to a$, так что a есть один из частичных пределов. По I свойству для достаточно далеких номеров (уже бóльших, чем N') будет

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу, получим $a \leqslant M^* + \varepsilon$ и, ввиду произвольности ε, окончательно,

$$a \leqslant M^*.$$

Таким образом, M^* действительно будет наибольшим из всех частичных пределов, т. е.

$$M^* = \overline{\lim}\, x_n.$$

Аналогично устанавливается существование наименьшего предела. Не повторяя всех рассуждений, отметим следующие два обстоятельства.

Если этот наименьший предел есть $+\infty$, то существует предел в обычном смысле

$$\lim x_n = +\infty.$$

Если же наименьший предел есть конечное число M_*,

$$M_* = \underline{\lim}\, x_n,$$

то оно обладает свойствами, аналогичными указанным выше для M^*:

I свойство числа M_*: *каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такой номер* N'', *что для* $n > N''$ *будет*

$$x_n > M_* - \varepsilon.$$

II свойство числа M_*: *каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и номер* N, *найдется значение* $x_{n''}$ *с номером* $n'' > N$, *такое, что*

$$x_{n''} < M_* + \varepsilon.$$

Обратимся к доказательству заключительного утверждения теоремы. Если существует предел в обычном смысле слова

$$\lim x_n$$

(конечный или бесконечный), то все мыслимые частичные пределы с ним сливаются [40], так что *необходимость* высказанного условия очевидна.

Предположим теперь, что

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n.$$

Если их общее значение есть $+\infty$ или $-\infty$, то, как мы видели, существует предел варианты в обычном смысле и имеет то же значение.

Пусть, наконец, оба предела конечны:

$$M^* = M_* = a.$$

Тогда, сопоставляя I свойства чисел M^* и M_*, найдем по наперед заданному $\varepsilon > 0$ такой номер N, что для $n > N$ будет

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \text{ т. е. } |x_n - a| < \varepsilon.$$

А это и значит, что a есть предел варианты x_n в обычном смысле. Теорема доказана.

Заметим, что с помощью этой теоремы совсем уж просто доказывается достаточность условия Больцано — Коши [39]. Именно (если сохранить прежние обозначения), из неравенств

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon \quad (\text{для } n \text{ и } n' > N)$$

непосредственно усматриваем, что наибольший и наименьший пределы варианты x_n конечны и разнятся не более, чем на 2ε, следовательно, ввиду произвольности ε, совпадают. Отсюда и вытекает существование конечного предела в обычном смысле.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Понятие функции

43. Переменная и область ее изменения. В **22** уже было дано общее понятие о переменной. Переменная x задаётся множеством $\mathscr{X}=\{x\}$ тех значений, которые она способна принять (в рассматриваемом вопросе). Это множество $\mathscr{X}$, в котором каждое значение x встречается по разу, называется *областью изменения* переменной x. Вообще, областью изменения переменной может служить любое числовое множество.

Мы уже упоминали о том, что числа геометрически истолковываются как точки на (числовой) оси. Область $\mathscr{X}$ изменения переменной x на этой оси изображается в виде некоторого множества точек. В связи с этим обычно сами числовые значения переменной называют точками.

Часто приходится иметь дело с переменной n, для которой областью изменения является множество $\mathscr{N}$ всех натуральных чисел. Для варианты $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$ областью изменения будет множество дробей вида $1/2\,m$ (при $m=1, 2, 3, \ldots$) с присоединением числа 0; для постоянной величины вся область изменения сведется к одному числу.

Однако в анализе обычно изучаются переменные, изменяющиеся, как говорят, непрерывным или сплошным образом: их прообразом являются физические величины — время, путь, проходимый движущейся точкой, и т. п. Областью изменения подобной переменной служит числовой промежуток. Чаще всего это будет конечный промежуток, ограниченный двумя вещественными числами a и b $(a<b)$ — его концами, которые сами могут быть включены в его состав или нет. В зависимости от этого мы будем различать

замкнутый промежуток $[a, b]$: $a\leqslant x\leqslant b$

(оба конца включены);

полуоткрытые промежутки $\begin{cases} (a, b]: & a<x\leqslant b \\ [a, b): & a\leqslant x<b \end{cases}$

(лишь один конец включен);

открытый промежуток (a, b): $a<x<b$

(ни один конец не включен).

Длиной промежутка во всех случаях называется число $b-a$.

Геометрическим аналогом числового промежутка является, как легко понять, отрезок числовой оси, причем — в зависимости от типа промежутка — и к отрезку концы его приключаются или нет.

Приходится рассматривать и бесконечные промежутки, у которых одним из концов или обоими служат «несобственные числа» $-\infty$, $+\infty$. Обозначения их аналогичны приведенным выше. Например, $(-\infty, +\infty)$ есть множество всех вещественных чисел; $(a, +\infty)$ означает множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$; промежуток $(-\infty, b]$ определяется неравенством $x \leqslant b$. Геометрически бесконечные промежутки изображаются в виде бесконечной в обе стороны прямой или луча.

44. Функциональная зависимость между переменными. Примеры. Главным предметом изучения в математическом анализе является, однако, не изменение одной переменной самой по себе, а зависимость между двумя или несколькими переменными при их совместном изменении. Здесь мы ограничимся простейшим случаем двух переменных.

В различных областях науки и жизни — в самой математике, в физике, в технике — читатель не раз встречал такие совместно изменяющиеся переменные. Они не могут одновременно принимать любую пару значений (из своих областей изменения): если одной из них (независимой переменной) придано конкретное значение, то этим уже определяется и значение другой (зависимой переменной или функции). Приведем несколько примеров.

1) Площадь Q круга есть функция от его радиуса R; ее значение может быть вычислено по заданному значению радиуса с помощью известной формулы:

$$Q = \pi R^2.$$

2) В случае свободного падения тяжелой материальной точки — при отсутствии сопротивления — время t (сек.), отсчитываемое от начала движения, и пройденный за это время путь s (*м*) связаны уравнением:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где $g = 9{,}81\ \frac{м}{сек^2}$ есть ускорение силы тяжести. Отсюда и определяется значение s, соответствующее взятому моменту t: путь s является функцией от протекшего времени t.

3) Рассмотрим некоторую массу (идеального) газа, содержащуюся под поршнем цилиндра. В предположении, что температура сохраняется неизменной, объем V (*л*) и давление p (*атм*) этой массы газа подчиняются закону Бойля - Мариотта:

$$pV = c = \text{const}.$$

Если произвольно изменять V, то p как функция от V будет всякий раз однозначно определяться по формуле

$$p=\frac{c}{V}.$$

4) Наконец, остановимся ещё на зависимости давления воздуха p (*атм*) от высоты места h (*м*) над уровнем моря. В физике выводится барометрическая формула:

$$p=p_0e^{-kh},$$

где p_0 — давление на уровне моря, а k — некоторая постоянная. По этой формуле значение p, как функции от h, и определяется, лишь только задано значение h.

Заметим тут же, что самый выбор независимой переменной из числа двух рассматриваемых иногда бывает безразличен или связан с соображениями простого удобства. В большинстве же случаев он диктуется целенаправленностью производимого исследования.

Например, если — в последнем примере — связь между давлением p и высотой h используется для того, чтобы дать возможность лётчику по наблюдаемому давлению судить о достигнутой высоте, то естественно обменять роли переменных и барометрическую формулу представить в виде

$$h=\frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p}.$$

45. Определение понятия функции. Отвлечемся теперь, как обычно, от физического смысла рассматриваемых величин и дадим точное общее определение понятия функции — одного из основных понятий математического анализа.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Предположим, что по условиям вопроса переменной x может быть приписано произвольное значение из области $\mathcal{X}$ без каких-либо ограничений. Тогда *переменная y называется функцией от переменной x в области ее изменения $\mathcal{X}$, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из $\mathcal{X}$ ставится в соответствие одно определенное значение y (из $\mathcal{Y}$).*

Независимая переменная x называется также *аргументом* функции.

В этом определении существенны два момента: во-первых, указание области $\mathcal{X}$ изменения аргумента x (её называют *областью определения* функции) и, во-вторых, установление правила или закона соответствия между значениями x и y. (Область $\mathcal{Y}$ изменения функции y обычно не указывается, поскольку самый закон соответствия уже определяет множество принимаемых функцией значений.)

Можно в определении понятия функции стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению x из $\mathcal{X}$ отвечало

не одно, а несколько значений y (и даже бесконечное множество их). В подобных случаях функцию называют многозначной, в отличие от однозначной функции, определённой выше. Впрочем, в курсе анализа, стоящем на точке зрения вещественной переменной, избегают многозначных функций, и впредь говоря о функции, если не оговорено противное, мы будем разуметь однозначную функцию.

Для указания того факта, что y есть функция от x, пишут:

$$y=f(x), \quad y=\varphi(x), \quad y=F(x) \text{ и т. п.*)}.$$

Буквы f, φ, $F, \ldots$ характеризуют именно то правило, по которому получается значение y, отвечающее заданному x. Поэтому, если одновременно рассматриваются различные функции от одного и того же аргумента x, связанные с различными законами соответствия, их не следует обозначать одной и той же буквой.

Хотя именно буква «эф» (в различных алфавитах) связана со словом «функция», но для обозначения функциональной зависимости, разумеется, может применяться и любая другая буква; иногда даже повторяют ту же букву y: $y=y(x)$.

В некоторых случаях пишут аргумент и в виде значка при функции, например, y_x. Под этот тип подходит привычное нам обозначение варианты x_n, которая является (как мы теперь можем сказать) функцией от «независимой переменной» n, пробегающей ряд натуральных чисел $\mathscr{N}=\{n\}$. Аналогично и обозначение N_ε для номера N (в определении предела варианты, **23**), которое подчеркивает его зависимость от ε, и т. д.

Если, рассматривая функцию, скажем, $y=f(x)$, мы хотим отметить ее частное значение, которое отвечает выбранному частному значению x, равному x_0, то для обозначения его употребляют символ: $f(x_0)$. Например, если

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad g(t)=\frac{10}{t}, \quad h(u)=\sqrt{1-u^2}, \ldots,$$

то $f(1)$ означает численное значение функции $f(x)$ при $x=1$, т. е. попросту число $\frac{1}{2}$, аналогично, $g(5)$ означает число 2, $h\left(\frac{3}{5}\right)$ — число $\frac{4}{5}$, и т. п.

Обратимся теперь к самому правилу или закону соответствия между значениями переменных, которое составляет сущность понятия функциональной зависимости. Правило это может быть весьма разнообразной природы, поскольку оно ничем не было ограничено.

Наиболее простым и естественным представляется осуществление этого правила в виде аналитического выражения или

*) Произносится эта запись следующим образом: «игрек равно эф от икс», «игрек равно фи от икс», и т. д.

формулы, содержащих указание на те операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо произвести, чтобы получить соответствующее значение y. Этот аналитический способ задания функции является наиболее важным для математического анализа (мы еще вернемся к нему в следующем n°). С ним читатель всего лучше знаком из школьного курса математики; наконец, именно аналитическим способом мы пользовались в приведенных в **44** примерах.

Однако было бы ошибочным думать, что это — единственный способ, которым может быть задана функция. В самой математике нередки случаи, когда функция определяется без помощи формулы. Такова, например, функция $E(x)$ — «целая часть числа x» *). Легко сообразить, что

$$E(1)=1,\ E(2{,}5)=2,\ E(\sqrt{13})=3,\ E(-\pi)=-4 \text{ и т. д.},$$

хотя никакой формулы, выражающей $E(x)$, у нас нет.

Таковы также и многочисленные «арифметические функции», т. е., функции от натурального аргумента, принимающие лишь натуральные же значения. В виде примера упомянем «о факториале числа n»:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n,$$

а также о функции $\tau(n)$, представляющей число делителей числа n, или о функции $\varphi(n)$, указывающей, сколько в ряду 1, 2, 3,..., n имеется чисел, взаимно простых с n. Несмотря на своеобразный характер правил, которыми задаются эти функции, они позволяют вычислять значения функций с такой же определенностью, как и формулы. Например, имеем:

$$\tau(10)=4,\quad \tau(12)=6,\quad \tau(16)=5,\ldots$$
$$\varphi(10)=4,\quad \varphi(12)=4,\quad \varphi(16)=8,\ldots$$

В естественных науках и в технике зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Например, если подвергнуть воду произвольно выбранному давлению p (*атм*), то на опыте можно определить соответствующую ему температуру θ (°C) кипения воды: θ есть функция от p. Однако эта функциональная зависимость задается не какой-либо формулой, а лишь таблицей, где просто сопоставлены полученные из опыта данные. Примеры табличного способа задания функции легко найти в любом техническом справочнике.

Наконец, упомянем еще, что в некоторых случаях — при помощи самопишущих приборов — функциональная зависимость между физическими величинами задается непосредственно графиком. Например, «индикаторная диаграмма», снимаемая при помощи индикатора,

*) См. сноску на стр. 48.

дает зависимость между объемом V и давлением p пара в цилиндре работающей паровой машины; «барограмма», доставляемая барографом, представляет суточный ход атмосферного давления, и т. п.

Мы не входим в подробности относительно табличного и графического способов задания функциональной зависимости, так как ими в математическом анализе не приходится пользоваться.

46. Аналитический способ задания функции. Сделаем ряд разъяснительных замечаний по поводу задания функции аналитическим выражением или формулой, которые играют в математическом анализе исключительно важную роль.

1° Прежде всего, какие аналитические операции или действия могут входить в эти формулы? На первом месте здесь разумеются все изученные в элементарной алгебре и тригонометрии операции: арифметические действия, возвышение в степень (и извлечение корня), логарифмирование, переход от углов к их тригонометрическим величинам и обратно [см. ниже **48—51**]. Однако, и это важно подчеркнуть, к их числу по мере развития наших сведений по анализу будут присоединяться и другие операции, в первую голову — предельный переход, с которым читатель уже знаком из главы I.

Таким образом, полное содержание термина «аналитическое выражение» или «формула» будет раскрываться лишь постепенно.

2° Второе замечание относится к области определения функции аналитическим выражением или формулой.

Каждое аналитическое выражение, содержащее аргумент x, имеет, так сказать, естественную область применения: это множество всех тех значений x, для которых оно сохраняет смысл, т. е. имеет *вполне определенное, конечное, вещественное значение*. Разъясним это на простейших примерах.

Так, для выражения $\frac{1}{1+x^2}$ такой областью будет все множество вещественных чисел. Для выражения $\sqrt{1-x^2}$ эта область сведется к замкнутому промежутку $[-1, 1]$, за пределами которого значение его перестает быть вещественным. Напротив, выражению $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ придется в качестве естественной области применения отнести открытый промежуток $(-1, 1)$ ибо на концах его знаменатель обращается в 0. Иногда область значений, для которых выражение сохраняет смысл, состоит из разрозненных промежутков: для $\sqrt{x^2-1}$ это будут промежутки $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, для $\frac{1}{x^2-1}$ — промежутки $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$; и т. д.*).

В качестве последнего примера рассмотрим сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}).$$

---

*) Для нас, разумеется, не представляют интереса такие выражения, которые ни при одном значении x вообще не имеют смысла.

Если $|x|<1$, то, как мы знаем [25, 7)], этот предел существует и имеет значение $\frac{1}{1-x}$. При $|x|>1$ предел либо равен $+\infty$, либо вовсе не существует. Таким образом, для приведенного аналитического выражения естественной областью применения будет открытый промежуток $(-1, 1)$.

В последующем изложении нам придется рассматривать как более сложные, так и более общие аналитические выражения, и мы не раз будем заниматься исследованием свойств функций, задаваемых подобным выражением во всей области, где оно сохраняет смысл, т. е. изучением самого аналитического аппарата.

Однако возможно и другое положение вещей, на что мы считаем нужным заранее обратить внимание читателя. Представим себе, что какой-либо конкретный вопрос, в котором переменная x по существу дела ограничена областью изменения $\mathscr{X}$, привел к рассмотрению функции $f(x)$, допускающей аналитическое выражение. Хотя может случиться, что это выражение имеет смысл и вне области $\mathscr{X}$, выходить за ее пределы, разумеется, все же нельзя. Здесь аналитическое выражение играет подчиненную, вспомогательную роль.

Например, если, исследуя свободное падение тяжелой точки с высоты h над поверхностью земли, мы прибегнем к формуле

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

[44, 2)], то нелепо было бы рассматривать отрицательные значения t или значения t, бо́льшие, чем $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$, ибо, как легко видеть, при $t=T$ точка уже упадет на землю. И это несмотря на то, что само выражение $\frac{gt^2}{2}$ сохраняет смысл для всех вещественных t.

3° Может случиться, что функция определяется не одной и той же формулой для всех значений аргумента, но для одних — одной формулой, а для других — другой. Примером такой функции в промежутке $(-\infty, +\infty)$ может служить функция, определяемая следующими тремя формулами:

$$f(x)=1, \quad \text{если } |x|>1 \text{ (т. е. если } x>1 \text{ или } x<-1),$$
$$f(x)=-1, \quad \text{если } |x|<1 \text{ (т. е. если } -1<x<1),$$

и, наконец, $f(x)=0$, если $x=\pm 1$.

Упомянем еще о функции Дирихле (P. G. Lejeune-Dirichlet), которая определяется так:

$$\chi(x)=1, \text{ если } x \text{ рационально,}$$
$$\chi(x)=0, \text{ если } x \text{ иррационально.}$$

Наконец, вместе с Кронекером (L. Kronecker) рассмотрим функцию, которую он назвал «сигнум x» *) и обозначил через $\operatorname{sgn} x$:

$$\operatorname{sgn} x=1, \quad \text{если } x>0;$$
$$\operatorname{sgn} x=-1, \quad \text{если } x<0;$$
$$\operatorname{sgn} 0=0.$$

*) По-латыни signum = знак.

Впрочем, не следует думать, что есть принципиальная разница между функцией, задаваемой одной формулой для всех значений x, и функцией, определение которой использует несколько формул. Обычно функция, задаваемая несколькими формулами (правда, ценой некоторого усложнения выражения), может быть задана и одной.

Например, если привлечь операцию предельного перехода, то первая из приведенных выше функций, $f(x)$, может быть задана одной формулой (для всех x сразу):

$$f(x) = \lim \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Действительно, при $|x|>1$ степень $x^{2n} \to +\infty$, а обратное ей выражение стремится к 0 [27], так что

$$\lim \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim \frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = 1.$$

При $|x|<1$ степень $x^{2n} \to 0$ [25, 6)], и в этом случае

$$\lim \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = -1.$$

Наконец, при $x = \pm 1$ будет, очевидно, $x^{2n} = 1$, откуда

$$\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = 0,$$

и в пределе получается 0. Все это полностью согласуется с прежним определением.

47. График функции. Хотя в математическом анализе функции графически не задают, но к графической иллюстрации функции прибегают всегда. Легкая обозримость и наглядность графика делают его незаменимым вспомогательным средством исследования свойств функции.

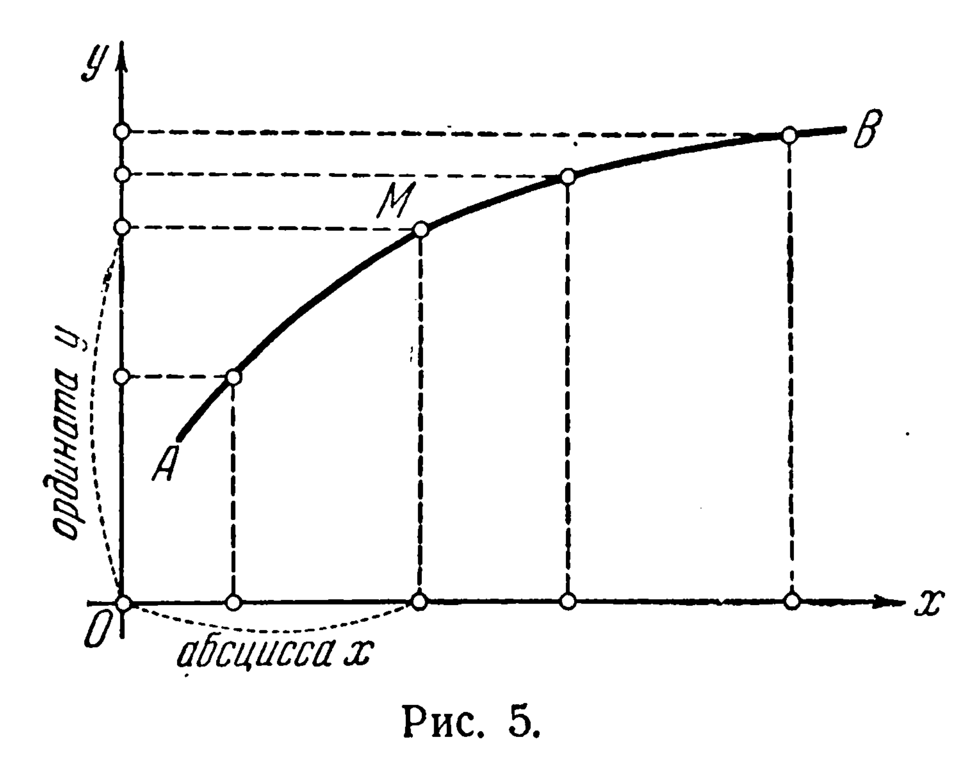


Рис. 5.

Пусть в некотором промежутке $\mathcal{X}$ задана функция $y=f(x)$. Представим себе на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось x и ось y. Рассмотрим пару соответствующих значений x и y, где x взято из промежутка $\mathcal{X}$, а $y=f(x)$; образом этой пары на плоскости служит точка $M(x, y)$, с абсциссой x и ординатой y. Когда переменная x изменяется в пределах своего промежутка, эта точка описывает некоторую кривую AB (рис. 5), которая и является геометрическим образом нашей функции и называется ее графиком. В этих условиях само уравнение $y=f(x)$ называют уравнением кривой AB.

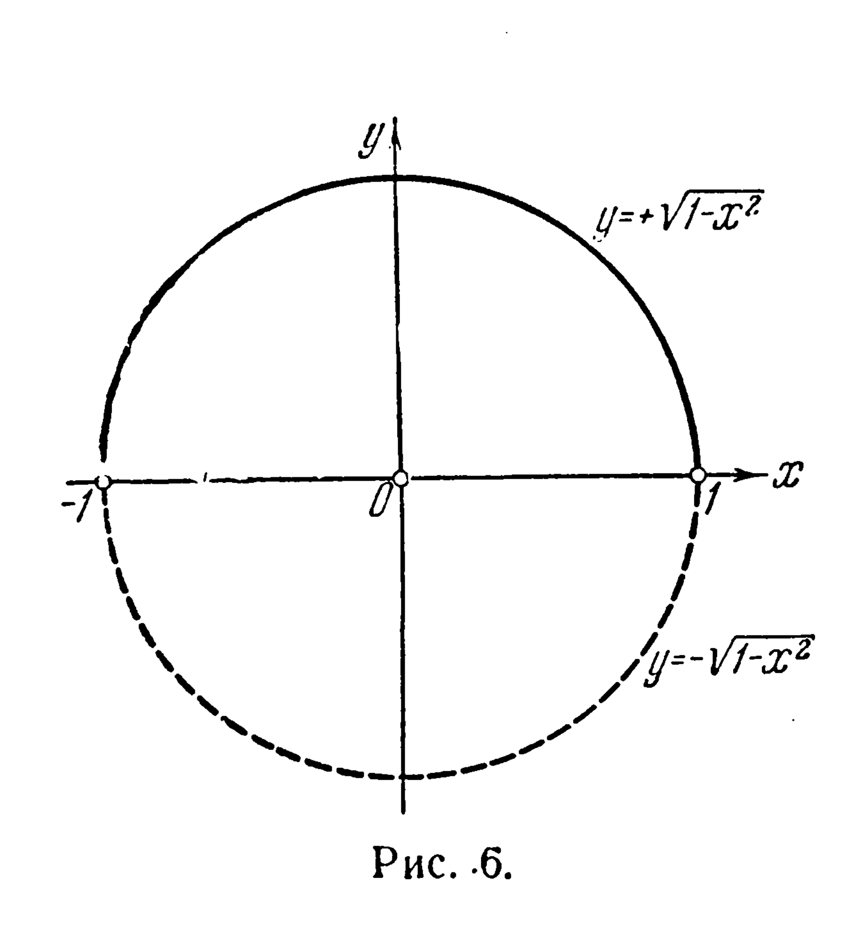


Рис. 6.

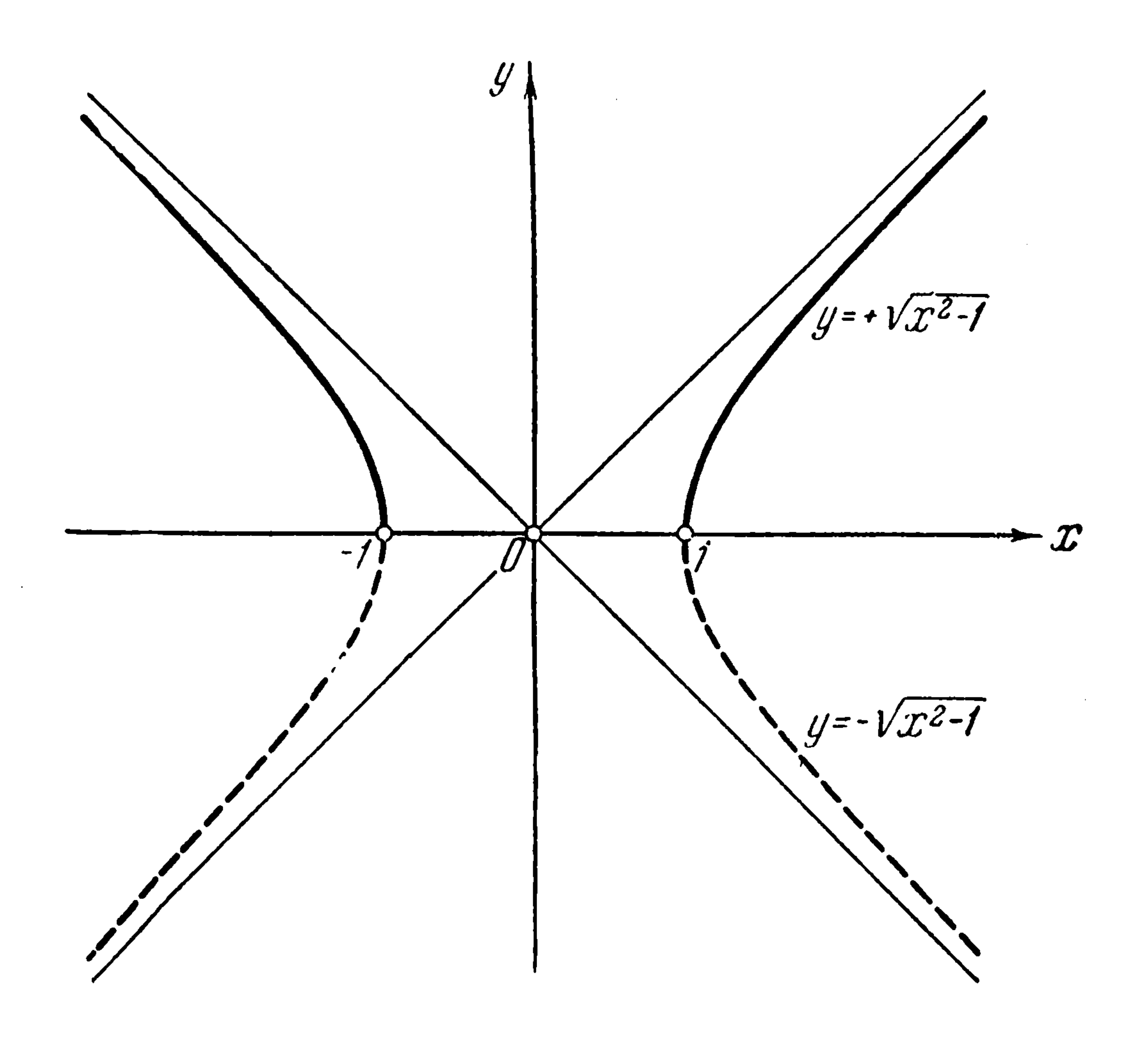


Рис. 7.

Например, на рис. 6 и 7 изображены графики функций

$$\underset{(|x|\leq 1)}{y = \pm\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad \underset{(|x|\geq 1)}{y = \pm\sqrt{x^2-1}};$$

читатель узнает в них окружность и равнобочную гиперболу. Много других примеров графического изображения функций читатель найдет в ближайших номерах.

Строится график обычно по точкам.

Берут в промежутке $\mathscr{X}$ ряд близких между собой значений x, вычисляют по формуле $y=f(x)$ соответствующие значения y:

$x=$	x_1	x_2	x_3		x_n
$y=$	y_1	y_2	y_3		y_n

и наносят на чертеж точки

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \ldots,\ (x_n, y_n).$$

Через эти точки от руки или с помощью лекала проводят кривую, которая (конечно, лишь с некоторым приближением) и дает искомый график. Чем плавнее ход графика и чем гуще взяты точки на нем, тем точнее начерченная кривая воспроизводит этот график.

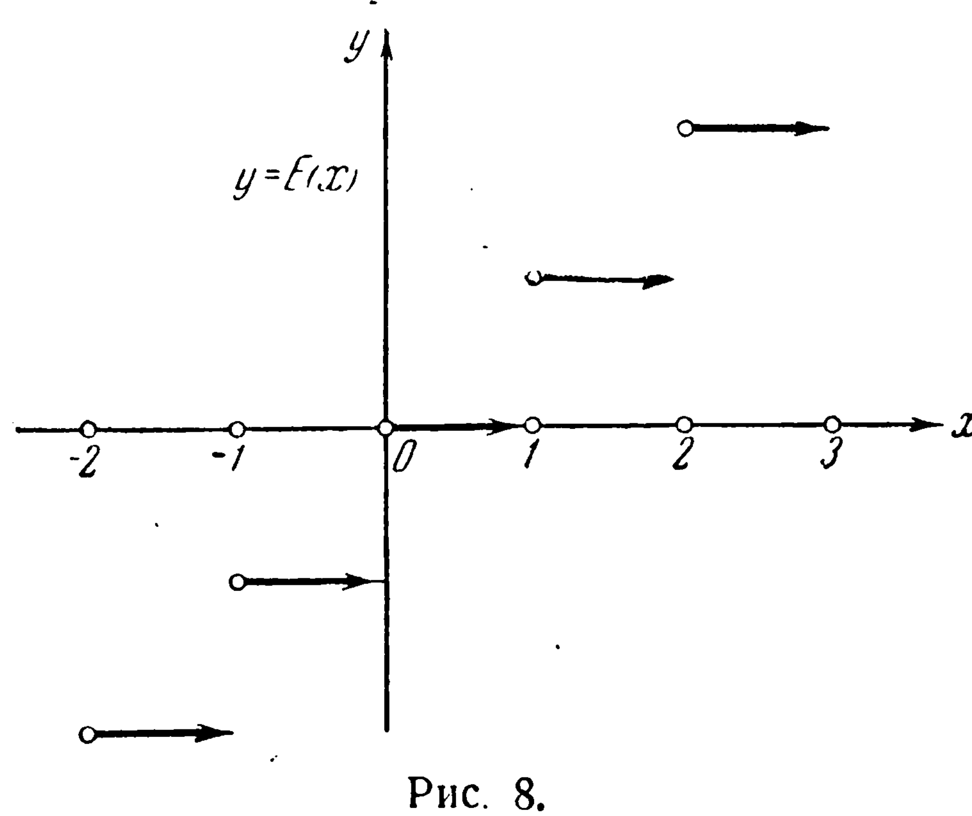


Рис. 8.

Следует заметить, что хотя геометрический образ функции всегда можно себе «представить», но не всегда этот образ будет кривой в обычном, интуитивном смысле.

Построим, например, график функции $y=E(x)$. Так как в промежутках..., $[-2, -1]$, $[-1,0)$, $[0,1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ... функция сохраняет постоянные значения ..., -2, -1, 0, 1, 2,..., то график будет состоять из ряда отдельных горизонтальных отрезков, лишенных своих правых концов (рис. 8)*).

Для функции $\chi(x)$ Дирихле график состоит из множества точек с иррациональными абсциссами на оси x и множества точек с рациональными абсциссами на прямой $y=1$; его и изобразить невозможно.

48. Важнейшие классы функций. Перечислим здесь некоторые классы функций, получивших название *элементарных*.

1° *Целая и дробная рациональные функции.*

Функция, представляемая целым относительно буквы x многочленом:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

*) Это обстоятельство символизируется стрелками, которые своими остриями указывают на точки, не принадлежащие графику.

(a_0, a_1, a_2, ... — постоянные), называется **целой рациональной функцией**.

Отношение двух таких многочленов:

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

называется **дробной рациональной** функцией. Она определена для всех значений x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

Для примера на рис. 9 даны графики функции $y=ax^2$ (**параболы**) при различных значениях коэффициента a, а на рис. 10 — графики функции $y=\frac{a}{x}$ (**равнобочные гиперболы**), также при различных значениях a.

2°. *Степенная функция.*

Так называется функция вида

$$y=x^{\mu},$$

где μ — любое постоянное вещественное число. При целом μ получается рациональная функция. При μ дробном мы имеем здесь **радикал**. Например, пусть m — натуральное число и

$$y=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x};$$

эта функция определена для всех значений x, если m — нечетное, и лишь для неотрицательных значений — при m четном (в этом случае мы имеем в виду **арифметическое значение** радикала). Наконец, если μ — иррациональное число, мы будем предполагать $x>0$ ($x=0$ допускается лишь при $\mu>0$).

На рис. 11 и 12 даны графики степенной функции при различных значениях μ.

3° *Показательная функция,* т. е. функция вида

$$y=a^x,$$

где a — положительное число (отличное от единицы); x принимает любое вещественное значение.

Графики показательной функции при различных значениях a даны на рис. 13.

4° *Логарифмическая функция,* т. е. функция вида

$$y=\log_a x,$$

где a, как и выше, — положительное число (отличное от единицы); x принимает лишь положительные значения.

На рис. 14 даны графики этой функции при различных значениях a.

5° *Тригонометрические функции:*

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,$$
$$y=\operatorname{ctg} x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

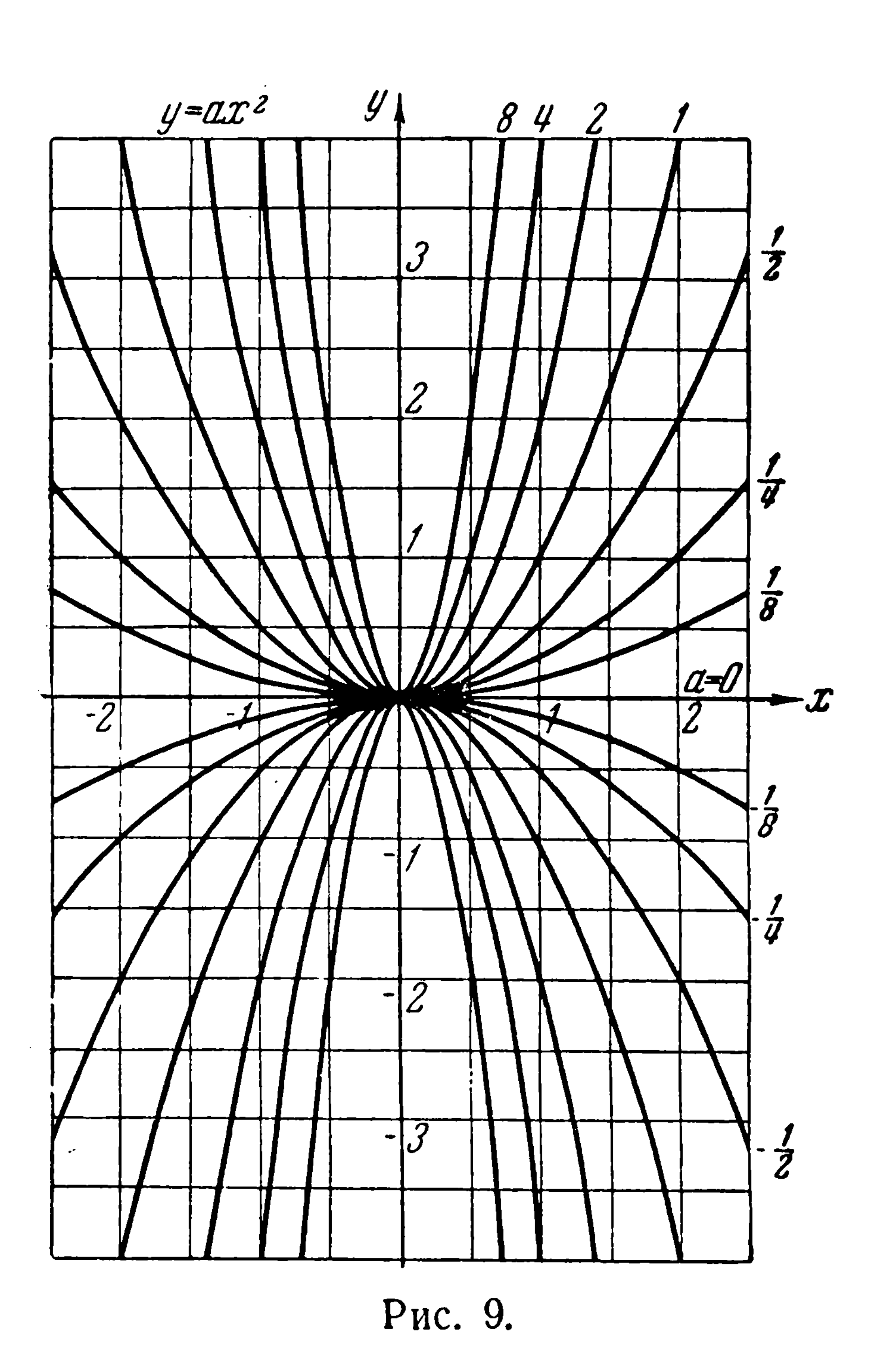


Рис. 9.

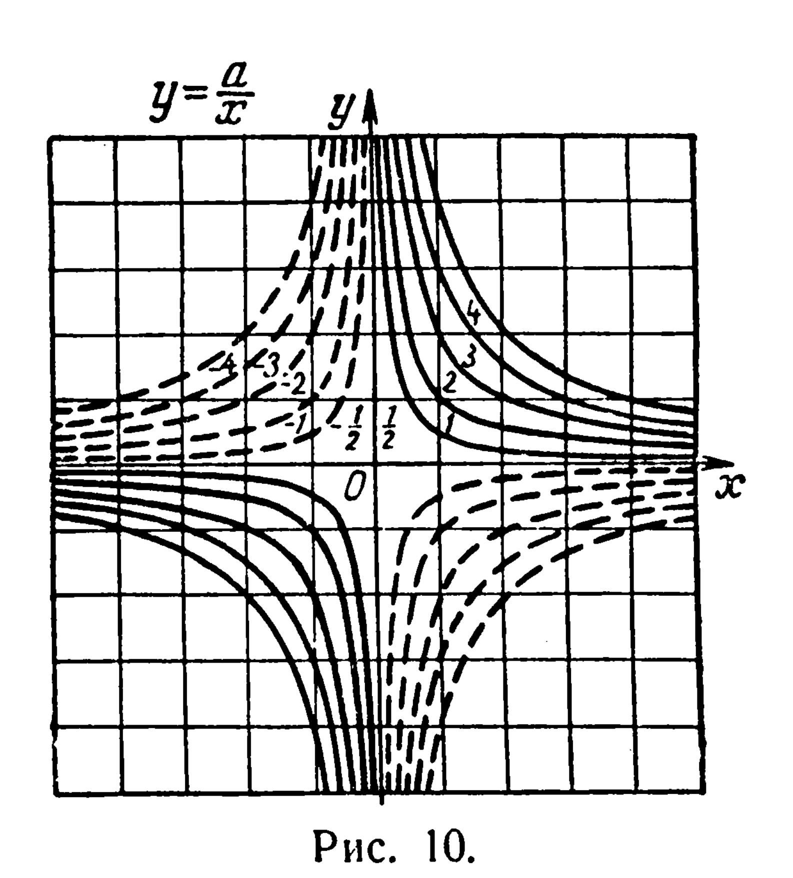


Рис. 10.

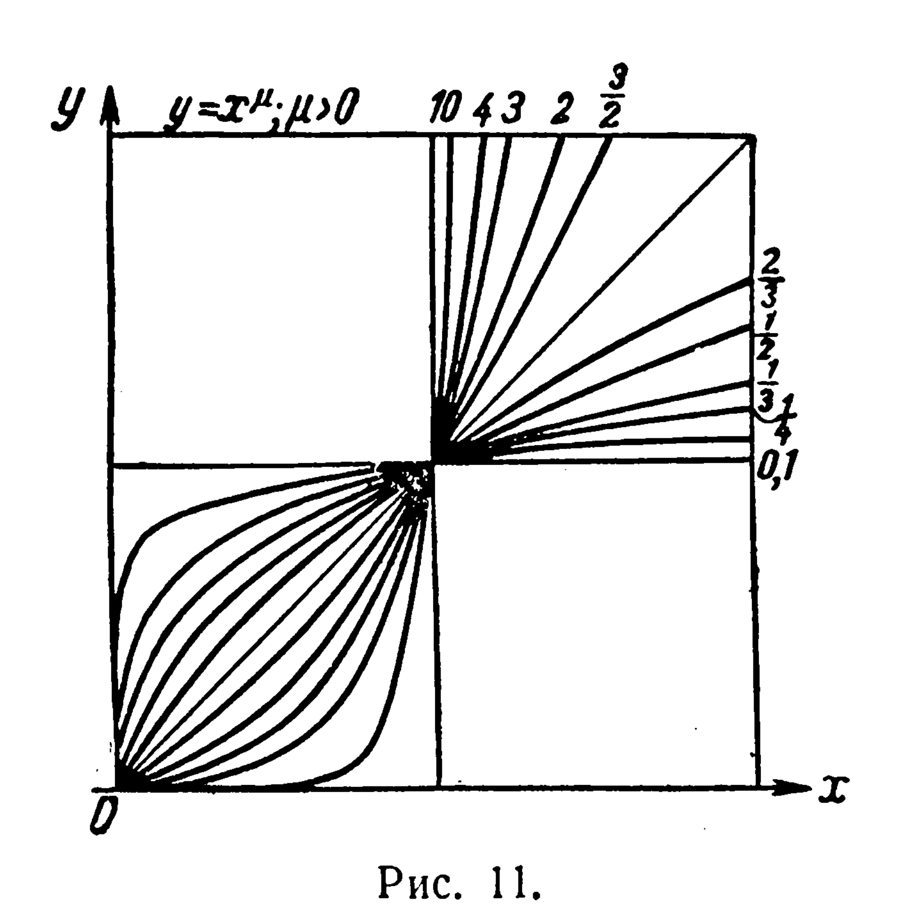

y
y=x^μ; μ>0
10 4 3 2 3/2
2/3
1/2
1/3
1/4
0,1
0
x

Рис. 11.

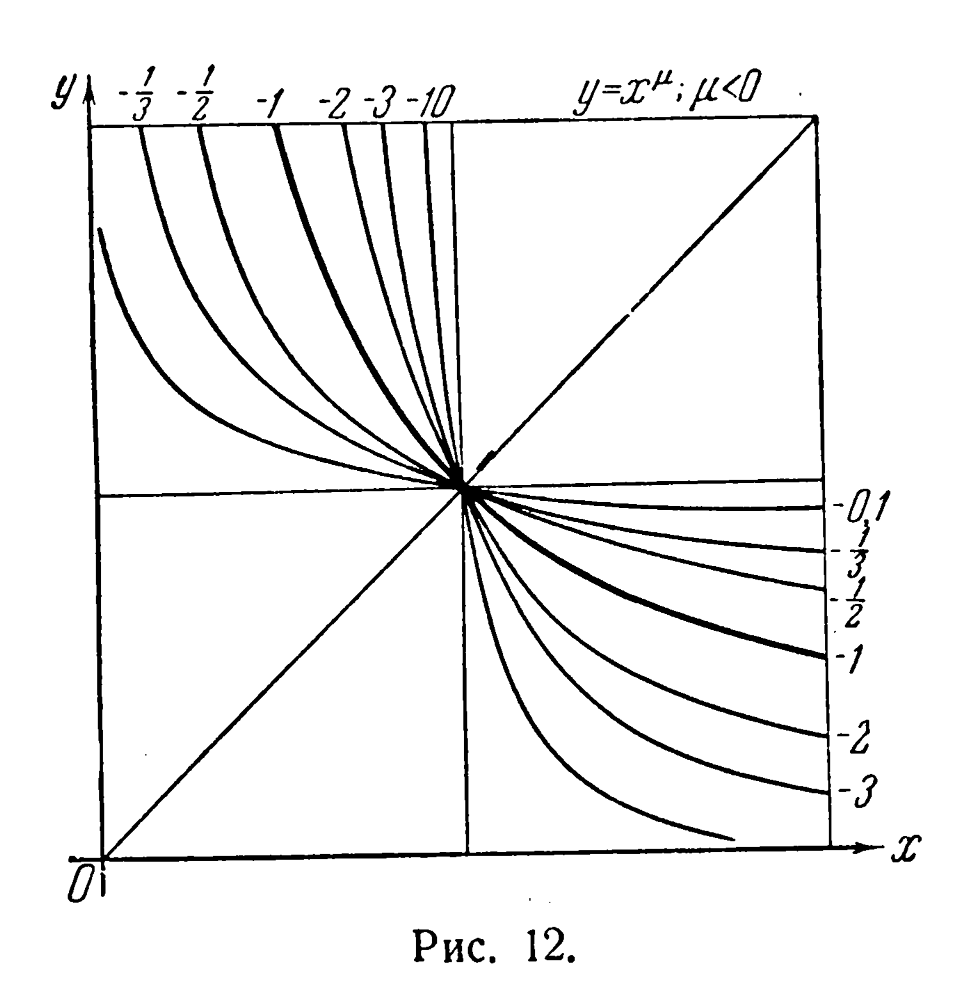

y
-1/3 -1/2 -1 -2 -3 -10
y=x^μ; μ<0
-0,1
-1/3
-1/2
-1
-2
-3
0
x

Рис. 12.

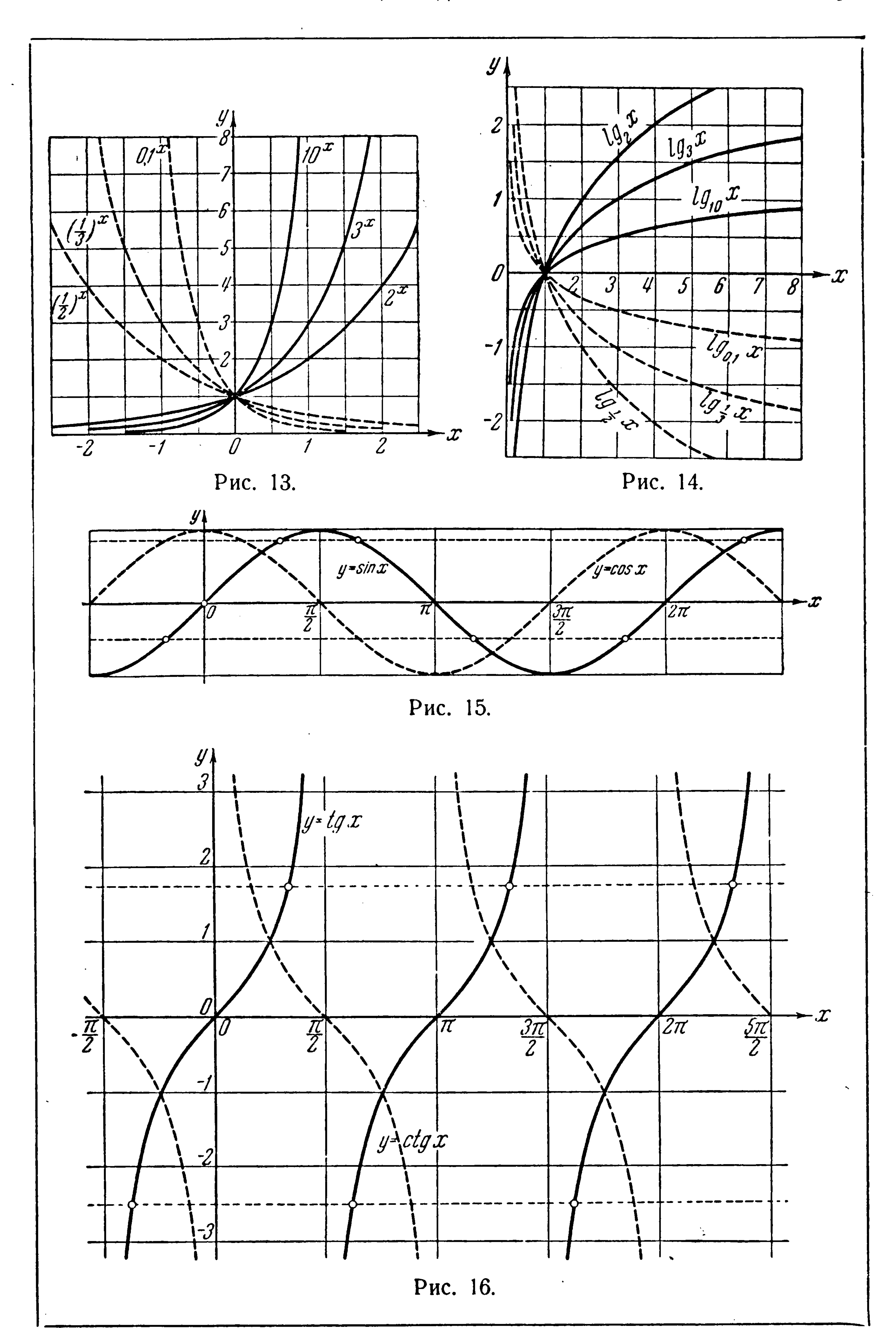


Рис. 13.

Рис. 14.

Рис. 15.

Рис. 16.

Очень важно раз навсегда усвоить, что *аргументы тригонометрических функций, если их рассматривать как меры углов, всегда выражают эти углы в радианах* (поскольку не оговорено противное). Для $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ исключаются значения вида

$$(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

а для $\operatorname{ctg} x$ и $\csc x$ — значения вида

$$k\pi \quad (k \text{ — целое}).$$

Графики функций $y = \sin x (\cos x)$ и $y = \operatorname{tg} x (\operatorname{ctg} x)$ даны на рис. 15 и 16. График синуса обычно называют *синусоидой*.

Иной раз, особенно в технических вопросах, представляют интерес:

6° *Гиперболические функции.* Так называются функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ldots$$

(гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс, ...); они определены для всех значений x, исключая $\operatorname{cth} x$, который теряет смысл при $x = 0$. *Эти функции проявляют замечательную аналогию с тригонометрическими функциями.*

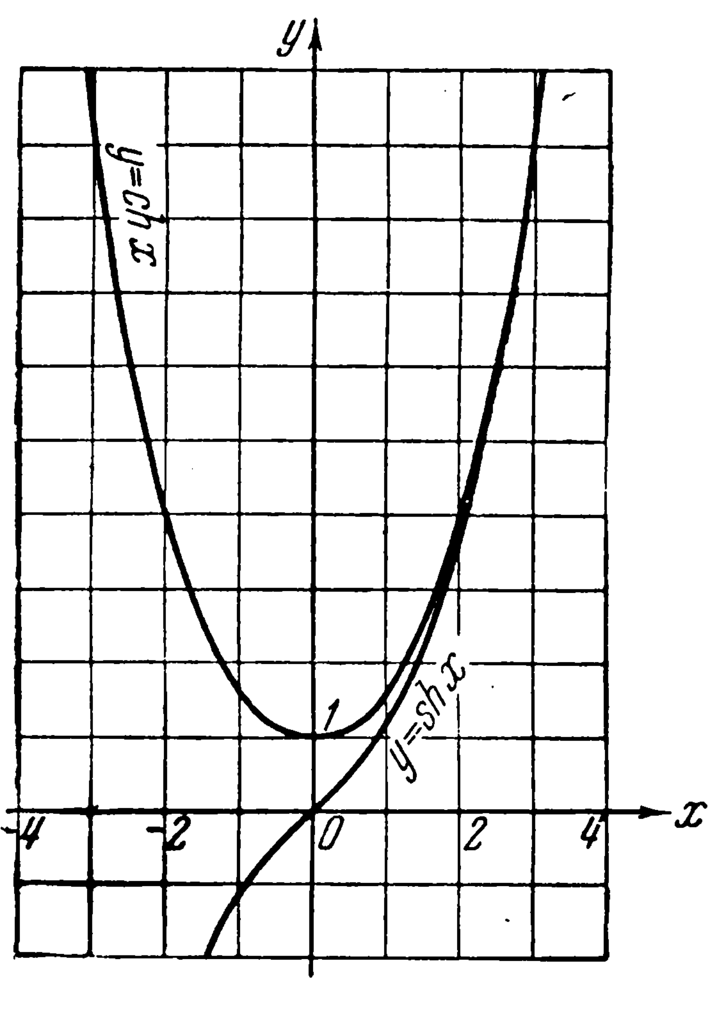


Рис. 17.

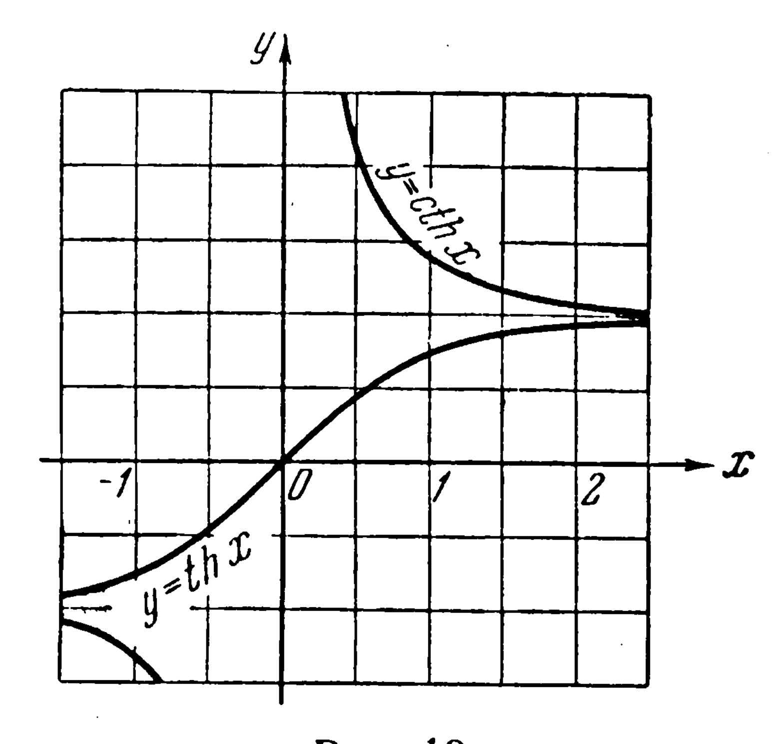


Рис. 18.

Так, имеют место формулы (обратить внимание на знаки!)

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

из которых при $y = x$, в частности, следует:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

Например, первая из этих формул сводится к легко проверяемому тождеству:

$$\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

Так же проверяются и остальные.

Графики гиперболических функций изображены на рис. 17 и 18.

49. Понятие обратной функции. Прежде чем перейти к обратным тригонометрическим функциям, сделаем пояснение относительно обратных функций вообще.

Предположим, что функция $y=f(x)$ задана в некоторой области $\mathcal{X}$, и пусть $\mathcal{Y}$ будет множество всех значений, которые эта функция принимает, когда x изменяется в пределах области $\mathcal{X}$. (В нашей практике как $\mathcal{X}$, так и $\mathcal{Y}$ обычно будут представлять собою промежутки.)

Выберем какое-нибудь значение $y=y_0$ из области $\mathcal{Y}$; тогда в области $\mathcal{X}$ необходимо найдется такое значение $x=x_0$, при котором наша функция принимает именно значение y_0, так что

$$f(x_0)=y_0;$$

подобных значений x_0 может оказаться и несколько. Таким образом, каждому значению y из $\mathcal{Y}$ ставится в соответствие одно или несколько значений x; этим определяется в области $\mathcal{Y}$ однозначная или многозначная функция $x=g(y)$, которая и называется обратной для функции $y=f(x)$.

Рассмотрим примеры:

1) Пусть $y=a^x$ $(a>1)$, где x изменяется в промежутке $\mathcal{X}=(-\infty, +\infty)$. Значения y заполняют промежуток $\mathcal{Y}=(0, +\infty)$, причем каждому y из этого промежутка отвечает, как мы знаем [**20**], в $\mathcal{X}$ одно определенное $x=\log_a y$. В этом случае обратная функция оказывается однозначной.

2) Наоборот, для функции $y=x^2$, если x изменять в промежутке $\mathcal{X}=(-\infty, +\infty)$, обратная функция будет двузначной: каждому значению y из промежутка $\mathcal{Y}=[0, +\infty)$, отвечают два значения $x=\pm\sqrt{y}$ из $\mathcal{X}$. Вместо этой двузначной функции обычно рассматривают раздельно две однозначные функции $x=+\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$ («ветви» двузначной функции). Их можно порознь также считать обратными для функции $y=x^2$, в предположении лишь, что область изменения x ограничена, соответственно, промежутком $[0, +\infty]$ или промежутком $(-\infty, 0]$.

3) Аналогично, если взять $y=\operatorname{ch} x$, где областью изменения x снова является промежуток $\mathcal{X}=(-\infty, +\infty)$, то, решая уравнение

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y \quad \text{или} \quad e^{2x}-2y\cdot e^x+1=0$$

относительно e^x, найдем (при $y \geqslant 1$) *два* значения

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

откуда

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

Снова — *двузначная* функция, которая распадается на две *однозначные* ветви, отвечающие порознь изменению x от 0 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0.

4) Если же $y = \operatorname{sh} x$, то — при любом y — из уравнения

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \text{или} \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$

найдем лишь *одно* значение для e^x:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

так как второе значение — с минусом при корне, как отрицательное невозможно и должно быть отброшено. Отсюда

$$x = \ln(x + \sqrt{y^2 + 1}),$$

так что здесь обратная функция *однозначна*.

Заметим, что по графику функции $y = f(x)$ легко сообразить, будет ли обратная для нее функция $x = g(y)$ однозначной или нет. Первый случай представится, если любая прямая, параллельная оси x, пересекает этот график разве лишь в *одной* точке. Наоборот, если некоторые из таких прямых пересекают график в *нескольких* точках, обратная функция будет многозначной. В этом случае по графику же легко разбить промежуток изменения x на части так, чтобы каждой части уже отвечала однозначная «ветвь» этой функции. Например, по одному взгляду на параболу рис. 4, которая служит графиком функции $y = x^2$, ясно, что обратная ей функция двузначна и что для получения однозначных «ветвей» достаточно раздельно рассматривать правую и левую части этой параболы, т. е. положительные и отрицательные значения x *).

Если функция $x = g(y)$ является обратной для функции $y = f(x)$, то, очевидно, графики обеих функций совпадают. Можно, однако, потребовать, чтобы и аргумент обратной функции обозначался буквой x, т. е. вместо функции $x = g(y)$ рассматривать $y = g(x)$. Тогда лишь придется горизонтальную ось назвать осью y, а вертикальную — осью x; график все еще останется прежним. Если же пожелать,

---

*) Ниже [83] мы вернемся еще к вопросу о существовании и однозначности обратной функции.

чтобы (новая) ось x была бы, как привычно, горизонтальной, а (новая) ось y — вертикальной, то эти оси нужно будет переставить одну на место другой, что уже изменит и график. Для осуществления этого проще всего повернуть плоскость чертежа xOy на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла (рис. 19).

Рис. 19.

Таким образом, график $y = g(x)$ получается как зеркальное отражение графика $y = f(x)$ относительно этой биссектрисы. По рис. 13 и 14, например, сразу видно, что они именно так получены один из другого. Точно так же, исходя из высказанных соображений, легко объяснить симметричность (относительно биссектрисы) каждого из рис. 11 и 12.

50. Обратные тригонометрические функции. В дополнение к тем классам элементарных функций, которые были упомянуты в **48**, рассмотрим теперь

7° *Обратные тригонометрические функции:*

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x,$$
$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad (y = \operatorname{arcsec} x, \quad y = \operatorname{arccsc} x).$$

Остановимся сначала на первой из них. Функция $y = \sin x$ определена в промежутке $\mathscr{X} = (-\infty, +\infty)$, причем ее значения заполняют сплошь промежуток $\mathscr{Y} = [-1, 1]$. Параллель оси x пересекает синусоиду, т. е. график функции $y = \sin x$ (рис. 15) в бесконечном множестве точек; иначе говоря, каждому значению y из промежутка $[-1,1]$ отвечает бесконечное множество значений x. Поэтому обратная функция, которую обозначают так:

$$x = \operatorname{Arcsin} y \text{ *)},$$

будет (бесконечно-)многозначной.

Обычно рассматривают лишь одну «ветвь» этой функции, отвечающую изменению x между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; каждому y из $[-1,1]$ в этих пределах отвечает одно значение x; его обозначают через

$$x = \arcsin y$$

и называют главным значением арксинуса.

---

*) Мы уже подчеркивали в свое время [**48**, 5°], что аргумент x тригонометрической функции выражает угол в радианах; разумеется и здесь значения обратных тригонометрических функций, если их рассматривать как меру угла (или дуги) все выражены в радианах (в радиусах).

Поворачивая синусоиду около биссектрисы первого координатного угла (рис. 20), получаем график многозначной функции $y = \text{Arcsin}\, x$; сплошной линией выделен график главной ветви ее $y = \arcsin x$, которая однозначно определена в промежутке $[-1, 1]$, значений x и притом удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

которое характеризует ее среди других ветвей.

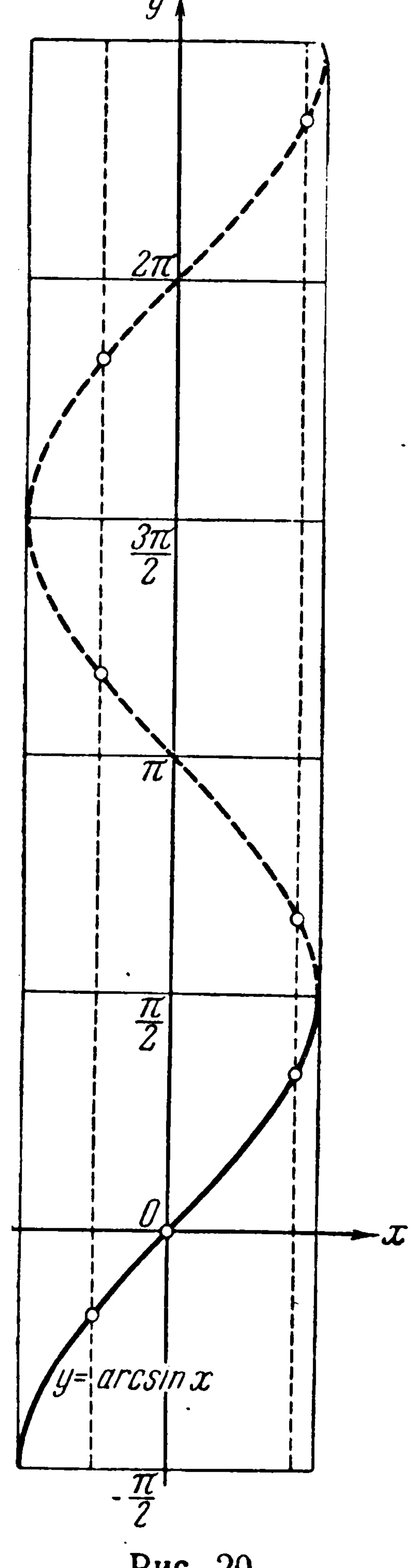


Рис. 20.

Вспоминая из элементарной тригонометрии, как выражаются все значения угла, имеющего данный синус, через одно из этих значений, легко написать формулы, дающие все значения арксинуса:

$$\text{Arcsin}\, x = \arcsin x + 2k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\text{или } (2k+1)\pi - \arcsin x.$$

Исходя из теоремы сложения для синуса

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

можно получить теорему сложения для арксинуса. Именно, положим здесь $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$ (где x и y лежат между -1 и $+1$); тогда

$$\sin\alpha = x, \quad \sin\beta = y; \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - x^2},$$
$$\cos\beta = \sqrt{1 - y^2},$$

причем корни берутся со знаком плюс, так как углы α и β, по характерному свойству главного значения арксинуса, лежат между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, так что косинусы их положительны. Итак,

$$\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2},$$

откуда

$$\alpha + \beta = \arcsin x + \arcsin y = \text{Arcsin}\,(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}).$$

Формула может быть написана проще:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$$

лишь в том случае, если и $\alpha+\beta$ не выходит из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это условие автоматически выполняется, если аргументы x и y (а с ними α и β) имеют разные знаки. В случае же

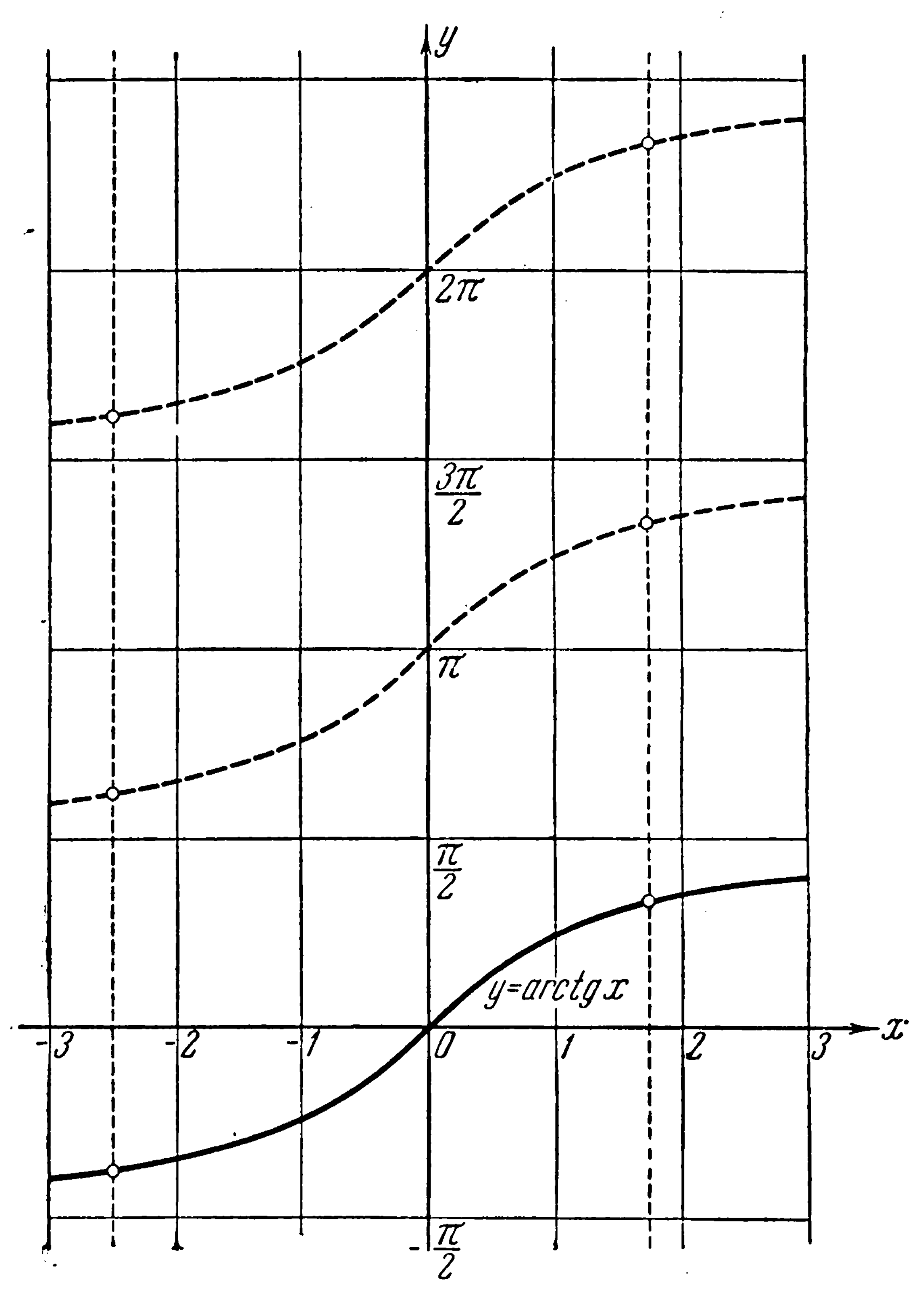


Рис. 21.

одинаковых знаков высказанное условие, как легко видеть, равносильно такому:

$$x^2+y^2 \leqslant 1.$$

Подобные же рассуждения применимы к функции $y=\cos x$ $(-\infty<x<+\infty)$. И здесь обратная функция

$$y=\operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

оказывается (бесконечно-)многозначной (см. рис. 15). Для выделения однозначной ветви, ее подчиняют условию:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

это есть главная ветвь арккосинуса.

Функция $\arccos x$ связана с $\arcsin x$ очевидным соотношением

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

действительно, не только косинус угла $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ равен $\sin(\arcsin x) = x$, но и сам угол содержится именно между 0 и π. Остальные значения $\operatorname{Arccos} x$ выражаются через главное его значение по формуле

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех значений x, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Значения y заполняют здесь промежуток $(-\infty, +\infty)$, причем каждому y снова соответствует бесконечное множество значений x (см. рис. 16). Поэтому обратная функция $x = \operatorname{Arctg} y$, заданная в промежутке $(-\infty, +\infty)$, будет (бесконечно-)многозначной. На рис. 21 изображен график функции $y = \operatorname{Arctg} x$, полученный поворотом на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла графика функции $y = \operatorname{tg} x$. За *главное значение* арктангенса, $\operatorname{arctg} x$, принимают то из значений этой многозначной функции, которое удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Таким путем определяется однозначная функция — *главная ветвь* арктангенса, заданная для всех значений x. Остальные значения арктангенса, как легко показать, получаются так:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Теорема сложения для тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

если положить $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, дает (при $xy \neq 1$)

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{x+y}{1-xy},$$

так что

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

И в данном случае равенство приводится к простому виду

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

лишь если $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, т. е. если $xy < 1$.

Нетрудно установить прямую связь между функциями $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{или} \quad \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$(-\infty < x < +\infty) \qquad\qquad (-1 < x < +1)$$

Например, если положить $\alpha = \operatorname{arctg} x$, так что $\operatorname{tg} \alpha = x$, то $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, причем корень берется со знаком плюс, потому что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; отсюда и вытекает, что $\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Упомянем еще о функции $\operatorname{Arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$; ее главное значение определяется неравенствами

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

и связано с $\operatorname{arctg} x$ соотношением

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Остальные значения арккотангенса имеют вид

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

На функциях $\operatorname{arcsc} x$ $(-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty)$ и $\operatorname{arccsc} x$ (те же промежутки изменения) останавливаться не будем, предоставляя читателю самому в них разобраться.

51. Суперпозиция функций. Заключительные замечания. Познакомимся с понятием *суперпозиции* (или *наложения*) функций, которая состоит в том, что вместо аргумента данной функции подставляется некоторая функция от другого аргумента. Например, суперпозиция функций $y = \sin x$ и $z = \log y$ дает функцию $z = \log \sin x$; аналогично получаются и функции

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad \text{и т. п.}$$

В общем виде, предположим, что функция $z = \varphi(y)$ определена в некоторой области $\mathcal{Y} = \{y\}$, а функция $y = f(x)$ определена в области $\mathcal{X} = \{x\}$, *причем значения ее все содержатся в области* $\mathcal{Y}$. Тогда переменная z, как говорят, *через посредство* y, и сама является функцией от x:

$$z = \varphi(f(x)).$$

По заданному x из $\mathcal{X}$ сначала находят соответствующее ему (по правилу, характеризуемому знаком f) значение y из $\mathcal{Y}$, а затем устанавливают соответствующее *этому* значению y (по правилу,

характеризуемому знаком φ) значение z; его и считают соответствующим выбранному x. Полученная *функция от функции* или *сложная функция* и есть результат *суперпозиции* функций $f(x)$ и $\varphi(y)$.

Предположение, что значения функции $f(x)$ не выходят за пределы той области $\mathcal{Y}$, в которой определена функция $\varphi(y)$, весьма существенно: если его опустить, то может получиться и нелепость. Например, полагая $z = \log y$, а $y = \sin x$, мы можем рассматривать лишь такие значения x, для которых $\sin x > 0$, ибо иначе выражение $\log \sin x$ не имело бы смысла.

Мы считаем полезным здесь же подчеркнуть, что характеристика функции, как сложной, связана не с природой функциональной зависимости z от x, а лишь со способом задания этой зависимости. Например, пусть $z = \sqrt{1-y^2}$ для y в $[-1, 1]$, а $y = \sin x$ для x в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

Здесь функция $\cos x$ оказалась заданной в виде сложной функции.

Теперь, когда полностью выяснено понятие суперпозиции функций, мы можем точно охарактеризовать простейший из тех классов функций, которые изучаются в анализе: это, прежде всего, перечисленные выше элементарные функции 1°—7°, а затем — все те, которые из них получаются с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз. Про них говорят, что они выражаются через элементарные в конечном виде; иногда их все также называют элементарными.

Впоследствии, овладев более сложным аналитическим аппаратом (бесконечные ряды, интегралы), мы познакомимся и с другими функциями, также играющими важную роль в анализе, но уже выходящими за пределы класса элементарных функций.

§ 2. Предел функции

52. Определение предела функции. Рассмотрим числовое множество $\mathcal{X} = \{x\}$. *Точка a называется точкой сгущения этого множества, если в любой близости от a содержатся значения x из $\mathcal{X}$, отличные от a.*

Чтобы выразить это определение в более точных терминах, введем понятие окрестности точки a: так называется любой открытый промежуток $(a-\delta, a+\delta)$ с центром в точке a. Теперь можно сказать, что *точка a будет точкой сгущения множества $\mathcal{X}$, если в каждой ее окрестности содержатся отличные от a значения x из $\mathcal{X}$.*

Сама точка сгущения при этом может принадлежать $\mathscr{X}$ или нет.

Пусть в области $\mathscr{X}$, для которой a является точкой сгущения, задана некоторая функция $f(x)$. Представляет интерес поведение этой функции при приближенном x к a. Говорят, что *функция* $f(x)$ *имеет пределом число* A *при стремлении* x *к* a (*или в точке* a), *если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ лишь только } |x - a| < \delta \tag{1}$$

(где x взято из $\mathscr{X}$ и отлично от a) *). Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \tag{2}$$

Если область $\mathscr{X}$ такова, что в любой близости от a, но *справа от* a, найдутся отличные от a значения x из $\mathscr{X}$ (в этом случае точку a называют *правой точкой сгущения* для $\mathscr{X}$), то можно специализировать только-что данное определение предела функции, ограничившись лишь значениями $x > a$. В этом случае предел функции, если он существует, называется *пределом функции* $f(x)$ *при стремлении* x *к* a *справа* или, короче, *пределом (в точке* a) *справа* и обозначается символом

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad f(a+0) \text{ **)}.$$

Аналогично устанавливается понятие *о левой точке сгущения* и о *пределе функции при стремлении* x *к* a *слева* или *о пределе (в точке* a) *слева*:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad f(a-0) \text{ **)}.$$

Если точка a является одновременно точкой сгущения для $\mathscr{X}$, и правой, и левой, то, как легко установить, *для существования предела* (2) *необходимо и достаточно существование порознь и равенство пределов справа и слева*:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

При стремлении x к конечному пределу a функция может иметь и бесконечный предел. Именно, *функция* $f(x)$ *имеет пределом* $+\infty$ $(-\infty)$ *при стремлении* x *к* a, *если для каждого числа* $E > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что*

$$f(x) > E \quad (f(x) < -E), \text{ лишь только } |x - a| < \delta \tag{3}$$

(где, как и всегда, x взято из $\mathscr{X}$ и отлично от a).

---

*) Именно из того, что a есть точка сгущения для $\mathscr{X}$, явствует, что такие значения x в окрестности $(a - \delta, a + \delta)$ точки a наверное существуют.

**) Если само $a = 0$, то вместо $0+0$ $(0-0)$ пишут просто $+0$ (-0).

Запись этих фактов аналогична (2):

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad (-\infty).$$

Для рассматриваемого случая могут быть повторены сделанные выше замечания относительно односторонних пределов справа и слева.

Если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ содержит сколь угодно большие (по абсолютной величине) положительные (отрицательные) значения x, то говорят, что $+\infty$ $(-\infty)$ является точкой сгущения для $\mathscr{X}$.

В этом предположении: *функция $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ $(-\infty)$ имеет предел A, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него существует такое число $\Delta > 0$, что*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ лишь только } x > \Delta \ (x < -\Delta) \tag{4}$$

(где x берется из $\mathscr{X}$). При этом пишут:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A. \tag{5}$$

Наконец, легко перефразировать все сказанное на случай $A = +\infty$ или $-\infty$.

Сущность всех этих определений одна и та же: функция $f(x)$ должна быть сколь угодно «близка» к своему пределу A, лишь только независимая переменная x достаточно «близка» к своему пределу a. Но переменная «близка» к своему конечному пределу, если разность между ними (по абсолютной величине) мала, а к бесконечному, если она сама (по абсолютной величине) велика и притом сохраняет знак предела.

Ясно, что числа δ (Δ) во всех случаях зависят от ε (E).

Заметим в заключение, что при стремлении функции $f(x)$ к 0 ее называют бесконечно малой; ее называют бесконечно большой, если $|f(x)|$ стремится к ∞. Если последнее обстоятельство имеет место при $x \to a$, то говорят также, что в точке a функция обращается в бесконечность.

53. Сведение к случаю варианты. Если рассматривать варианту, как функцию от независимой переменной n, изменяющейся в пределах натурального ряда, то предел этой функции при $n \to \infty$, как он определен в **52**, очевидно, совпадает с пределом варианты, определенным в **23** и **27** (роль Δ там играет N). Таким образом, *предел варианты есть частный случай предела функции.*

Однако и, обратно, в некотором смысле предел функции может быть сведен к пределу варианты.

Пусть множество $\mathscr{X} = \{x\}$ имеет точку сгущения a (здесь a может быть как конечным числом, так и бесконечностью того или

иного знака). Тогда из $\mathscr{X}$ (бесчисленным множеством способов) можно извлечь такую последовательность

$$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots \tag{6}$$

значений x (отличных от a), которая имела бы своим пределом a.

Действительно, если a конечно, то, задавшись положительной варинтой δ_n, стремящейся к нулю, в каждой окрестности $(a-\delta_n, a+\delta_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ точки a найдем по точке $x=x_n$ из $\mathscr{X}$, отличной от a: так как $|x_n-a|<\delta_n$, то $x_n \to a$. При $a=+\infty$ $(-\infty)$ зададимся положительной вариантой $\Delta_n \to +\infty$ и для каждого Δ_n найдем значение $x=x_n$ из $\mathscr{X}$, для которого $x_n>\Delta_n$ $(x_n<-\Delta_n)$; очевидно, $x_n \to +\infty$ $(-\infty)$, и т. д.

Последовательности (6) значений аргумента отвечает последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n), \ldots \tag{7}$$

Легко усмотреть, что *при наличии равенства* (2) *эта последовательность всегда имеет предел* A. Остановимся для примера на случае конечных a и A.

Если задано произвольное число $\varepsilon>0$, то сначала возьмем то число $\delta>0$, которое ему соответствует в силу определения предела (2). По числу δ, ввиду сходимости последовательности (6) к a, найдется [**23**] такой номер N, что для $n>N$ будет выполняться неравенство $|x_n-a|<\delta$, а следовательно [см. (1)], и $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. Этим и доказана сходимость последовательности (7) к A.

Оказывается, что справедливо и обратное утверждение:

Допустим теперь, что какую бы последовательность (6) (*из* $\mathscr{X}$) *с пределом* a *ни пробегала независимая переменная* x, *соответствующая последовательность* (7) *значений функции всегда имеет предел* A. *Тогда это число* A *будет пределом функции* $f(x)$ — *в согласии с определением в* **52**.

Ограничимся и здесь случаем конечных a и A. Рассуждая от противного, предположим, что A не будет пределом функции в упомянутом смысле. Тогда для некоторого числа $\varepsilon>0$ уже не существовало бы соответствующего δ; т. е., какое бы малое δ ни взять, всегда найдется хоть одно значение переменной $x=x'$ (отличное от a), для которого

$$|x'-a|<\delta, \textit{ но тем не менее } |f(x')-A| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, стремящихся к нулю. На основании только что сказанного, для каждого числа $\delta=\delta_n$ найдется такое значение $x'=x'_n$, что

$$|x'_n-a|<\delta_n, \textit{ но тем не менее } |f(x'_n)-A| \geqslant \varepsilon.$$

Из этих значений, таким образом, составляется некоторая последовательность

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots,$$

для которой

$$|x'_n - a| < \delta_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

так как $\delta_n \to 0$, то $x'_n \to a$.

По допущению теоремы, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ f(x'_3),\ \ldots,\ f(x'_n),\ \ldots$$

должна стремиться к A, а это невозможно ввиду того, что при всех $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ имеем $|f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Таким образом, мы в сущности приходим ко второму определению понятия предела функции, которое в **52** было выражено, так сказать, «на языке ε-δ». Теперь же мы можем выразить его «на языке последовательностей», *понимая равенство* (2) *в том смысле, что для любой последовательности* (6), *имеющей предел a, соответствующая последовательность* (7) *имеет предел A.*

В заключение отметим, что *достаточно предположить одно лишь существование предела для каждой последовательности* (7), *отвечающей любой сходящейся к a последовательности* (6), *чтобы отсюда уже вытекало совпадение всех этих пределов.* Действительно, допустим, что для двух последовательностей:

$$x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots \quad \text{и} \quad x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n,\ \ldots,$$

стремящихся к a, имели бы

$$f(x'_n) \to A' \quad \text{и} \quad f(x''_n) \to A'',$$

где $A' \neq A''$. Тогда, перемежая члены обеих последовательностей, составим новую последовательность:

$$x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2,\ \ldots,\ x'_n,\ x''_n,\ \ldots;$$

она, очевидно, стремится к a, поскольку для достаточно больших n и x'_n, и x''_n отличаются от a произвольно мало. В то же время соответствующая последовательность значений функции:

$$f(x'_1),\ f(x''_1),\ f(x'_2),\ f(x''_2),\ \ldots,\ f(x'_n),\ f(x''_n),\ \ldots,$$

вопреки предположению, не имеет вовсе предела, так как частичные последовательности из ее членов, стоящих на четных или нечетных местах, стремятся к различным пределам [**40**]. Полученное противоречие и доказывает, что последовательности вида (7) на деле стремятся все к одному и тому же пределу.

54. Примеры. 1) Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (\text{при } a > 1).$$

При любом $E > 0$, достаточно взять $\Delta = \log_a E$, чтобы

$$x > \Delta \text{ влекло за собой } a^x > E,$$

что и доказывает наше утверждение *).

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (\text{при } a > 1).$$

Именно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, если взять $\Delta = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a \varepsilon$, то

$$\text{при } x < -\Delta \text{ необходимо } a^x < \varepsilon.$$

Если же $0 < a < 1$, то с помощью преобразования

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

легко установить результаты

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (\text{при } 0 < a < 1).$$

2) Установим, что при $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty.$$

При любом заданном $E > 0$, лишь только $x > a^E$, будем иметь: $\log_a x > E$, и аналогично, лишь только $0 < x < a^{-E}$, выполняется неравенство: $\log_a x < -E$. Этим и доказаны оба соотношения.

3) Имеем, далее,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Остановимся для примера на первом пределе. При любом $\varepsilon > 0$, достаточно взять $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, чтобы было: $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, так что

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon.$$

4) Более тонким является соотношение:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \quad (\text{при } a > 1).$$

Вспомним, что частный случай его мы уже имели:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

[32, (9)]; очевидно, одновременно будет и

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty.$$

---

*) С более частным результатом

$$\lim a^n = +\infty \quad (a > 1)$$

мы уже имели дело в **27**.

Следовательно, по заданному $\mathrm{E} > 0$ найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{a^n}{n+1} > \mathrm{E}.$$

Пусть теперь $x > N+1$; если положить $n = E(x)$, то

$$n > N \text{ и } n \leqslant x < n+1,$$

так что

$$\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > \mathrm{E},$$

что и доказывает наше утверждение.

Отсюда, как и в **32**, 9), легко получить

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \quad (a > 1,\ k > 0).$$

5) Аналогично, опираясь на прежний результат [**32**, 11)]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1),$$

можно установить, что вообще

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0 \quad (a > 1),$$

где x принимает любые положительные вещественные значения.

Заменяя здесь x на x^k $(k > 0)$, легко показать, что и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0 \quad (a > 1, \quad k > 0).$$

Действительно, если, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, взять Δ так, чтобы при $x > \Delta$ выполнялось неравенство

$$\frac{\log_a x}{x} < k_\varepsilon,$$

то при $x > \Delta_1 = \Delta^{\frac{1}{k}}$ будет $x^k > \Delta$ и

$$\frac{\log_a x}{x^k} < \varepsilon.$$

Если заменить здесь x на $\frac{1}{x}$, то полученный результат перепишется в виде

$$\lim_{x\to+0} x^k \log_a x = 0 \quad (a > 1,\ k > 0).$$

6) Из доказанного в **25**, 5) предельного соотношения

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

можно получить более общее

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Заметим, что, очевидно, и

$$\lim_{n\to+\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое натуральное число n_0, что (если, скажем, $a > 1$)

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon.$$

Если теперь

$$|x| < \frac{1}{n_0} \quad \text{или} \quad -\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0},$$

то

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}},$$

откуда

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \quad \text{или} \quad |a^x - 1| < \varepsilon,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

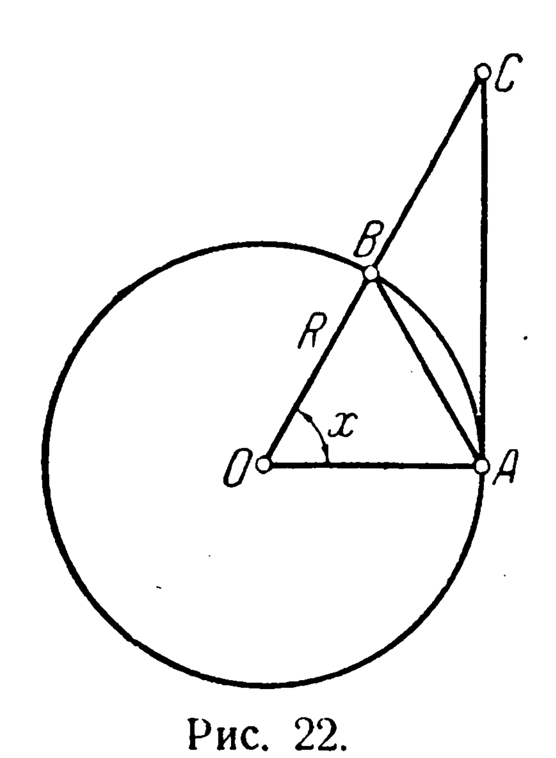


Рис. 22.

7) Теперь мы установим следующий (важный и для дальнейшего) результат:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{8}$$

Предварительно, однако, нам придется доказать некоторые полезные неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

С этой целью в круге радиуса R рассмотрим острый угол $\measuredangle AOB$, хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (рис. 22). Тогда имеем:

площадь $\triangle AOB <$ площади сектора $AOB <$ площади $\triangle AOC$ *).

Если через x обозначить радианную меру угла $\measuredangle AOB$, так что длина дуги $\smile{AB}$ выразится произведением Rx, то эти неравенства перепишутся так:

$$\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Отсюда — по сокращении на $\frac{1}{2} R^2$ — и приходим к неравенствам (9).

В предположении, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенств (9). Мы получим:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

*) При этом мы пользуемся теми сведениями о площадях элементарных фигур, которые излагаются в школьном курсе.

откуда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Но

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

[в силу (9)], так что

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|,$$

которое, очевидно, сохранится и при изменении знака x, т. е. будет справедливо для всех $x \neq 0$, лишь только $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Полученное неравенство и решает вопрос. Действительно, если по произволу задано число $\varepsilon > 0$, то за δ достаточно выбрать наименьшее из чисел ε и $\frac{\pi}{2}$: при $|x| < \delta$, прежде всего, применимо это неравенство $\left(\text{ведь } \delta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, а именно в силу него (так как $\delta \leqslant \varepsilon$)

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

По определению предела функции [**52**], это и означает, что функция $\frac{\sin x}{x}$ при стремлении x к 0 имеет предел 1, так что соотношение (8) оправдано.

7а) Предельное соотношение (8) может быть, в согласии с **53**, понимаемо и так, что, лишь только x пробегает сходящуюся к нулю последовательность $\{x_n\}$, варианта $\frac{\sin x_n}{x_n}$ будет всякий раз стремиться к 1.

Приложим это замечание к разысканию предела варианты

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n},$$

где φ — любое отличное от 0 число.

Очевидно,

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} = 2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^2} = \ldots$$

$$\ldots = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n},$$

так что интересующее нас выражение представится в виде

$$\frac{\sin\varphi}{2^n\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}.$$

Так как $x_n = \frac{\varphi}{2^n} \to 0$, то по сказанному выше

$$\lim \frac{\sin \frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} = 1,$$

и предел нашей варианты оказывается равным числу $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$.

8) Сейчас мы изучим также очень важный предел. Именно, в **36** было определено число e как предел варианты

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{10}$$

Теперь же мы установим более общий результат:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{11}$$

а также и

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{11a}$$

Воспользуемся на этот раз вторым определением предела «на языке последовательностей» [**53**].

Прежде всего, напомним, что наряду с (10) имеет место и равенство

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e, \tag{12}$$

если $\{n_k\}$ есть произвольная последовательность натуральных чисел, растущих вместе с номером k до бесконечности [**40**].

Пусть теперь x пробегает какую-нибудь последовательность $\{x_k\}$, значений, стремящихся к $+\infty$; можно считать даже, что все $x_k > 1$. Положим $n_k = E(x_k)$, так что

$$n_k \leqslant x_k < n_k + 1 \text{ и } n_k \to +\infty.$$

Так как при этом

$$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{n_k},$$

то

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Два крайних выражения могут быть преобразованы так:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right),$$

причем, в силу (12),

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e, \text{ а также } \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e,$$

в то время как, очевидно,

$$1+\frac{1}{n_k} \to 1, \quad 1+\frac{1}{n_k+1} \to 1;$$

таким образом, оба упомянутых выражения стремятся к общему пределу e, а тогда и заключенное между ними выражение также стремится к e [по теореме 3°, **28**]:

$$\lim \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

Этим и завершается доказательство соотношения (11) «на языке последовательностей».

Для доказательства же (11а) предположим теперь, что последовательность $\{x_k\}$ имеет пределом $-\infty$ (причем можно считать все $x_k < -1$). Если положить $x_k = -y_k$, тогда $y_k \to +\infty$ (и все $y_k > 1$). Очевидно,

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right).$$

Так как, по доказанному, первый множитель последнего выражения стремится к e, второй же, очевидно, имеет пределом 1, то и выражение слева также стремится к e. Формула (11а) оправдана.

Заменим теперь в выражении $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ переменную x на $\frac{1}{\alpha}$; если придать α последовательность положительных или отрицательных значений, стремящихся к 0 (но не равных 0), то $x = \frac{1}{\alpha}$ будет стремиться к $\pm\infty$. Поэтому формулы (11) и (11а) можно переписать в виде

$$e = \lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{13}$$

Этот замечательный результат лежит в основе всех приложений числа e.

9) Интересен, наконец, и пример, когда предел функции не существует: функция $\sin x$ при стремлении x к $+\infty$ $(-\infty)$ вовсе не имеет предела.

В отсутствии предела всего проще убедиться, стоя на «точке зрения последовательностей». Достаточно заметить, что двум последовательностям

$$\left\{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

значений x, имеющим пределом $+\infty$, отвечают последовательности значений функции, стремящиеся к различным пределам:

$$\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi=-1\to-1. \qquad \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1\to 1.$$

[То же можно выразить и иначе: если взять последовательность

$$\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

значений x, имеющую пределом $+\infty$, то ей отвечает последовательность значений функции:

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

вовсе не имеющая предела.]

Если вспомнить «колебательный» характер синусоиды, то отсутствие предела в рассматриваемом случае станет наглядным.

Аналогично, и функция $\sin\frac{1}{\alpha}$ при стремлении α к 0 (справа или слева) предела не имеет. Это, в сущности, лишь другая форма приведенного выше примера: стоит лишь в функции $\sin x$ заменить x на $\frac{1}{\alpha}$. Очевидно, если α пробегает последовательность значений, приближающихся к 0 справа (слева), то $x=\frac{1}{\alpha}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, и обратно.

Напишем снова в выражении $\sin\frac{1}{\alpha}$ вместо буквы α букву x (чтобы вернуться к привычному обозначению абсциссы) и рассмотрим поучительный график функции

$$y=\sin\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0),$$

ограничиваясь значениями x от 0 до $\frac{2}{\pi}$ $\left(\text{и от } -\frac{2}{\pi} \text{ до } 0\right)$.

Отметим последовательно убывающие до 0 значения x:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \ldots, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \frac{1}{n\pi}, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \ldots;$$

им отвечают растущие до $+\infty$ значения $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi, \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots$$

В промежутках между указанными значениями (при убывании x) наша функция попеременно убывает от 1 до 0 и от 0 до -1, затем возрастает от -1 до 0 и от 0 до 1, и т. д.

Таким образом, функция $\sin\frac{1}{x}$ производит бесконечное множество колебаний, подобно функции $\sin x$, но, в то время как для последней эти колебания распределяются на бесконечный промежуток, здесь они все умещаются в конечном промежутке, сгущаясь к 0.

График изображен на рис. 23 (разумеется, не полностью — бесконечное множество колебаний воспроизвести невозможно!). Так как при изменении знака x и $\sin\frac{1}{x}$ меняет знак, то левая половина графика симметрична с правой относительно начала.

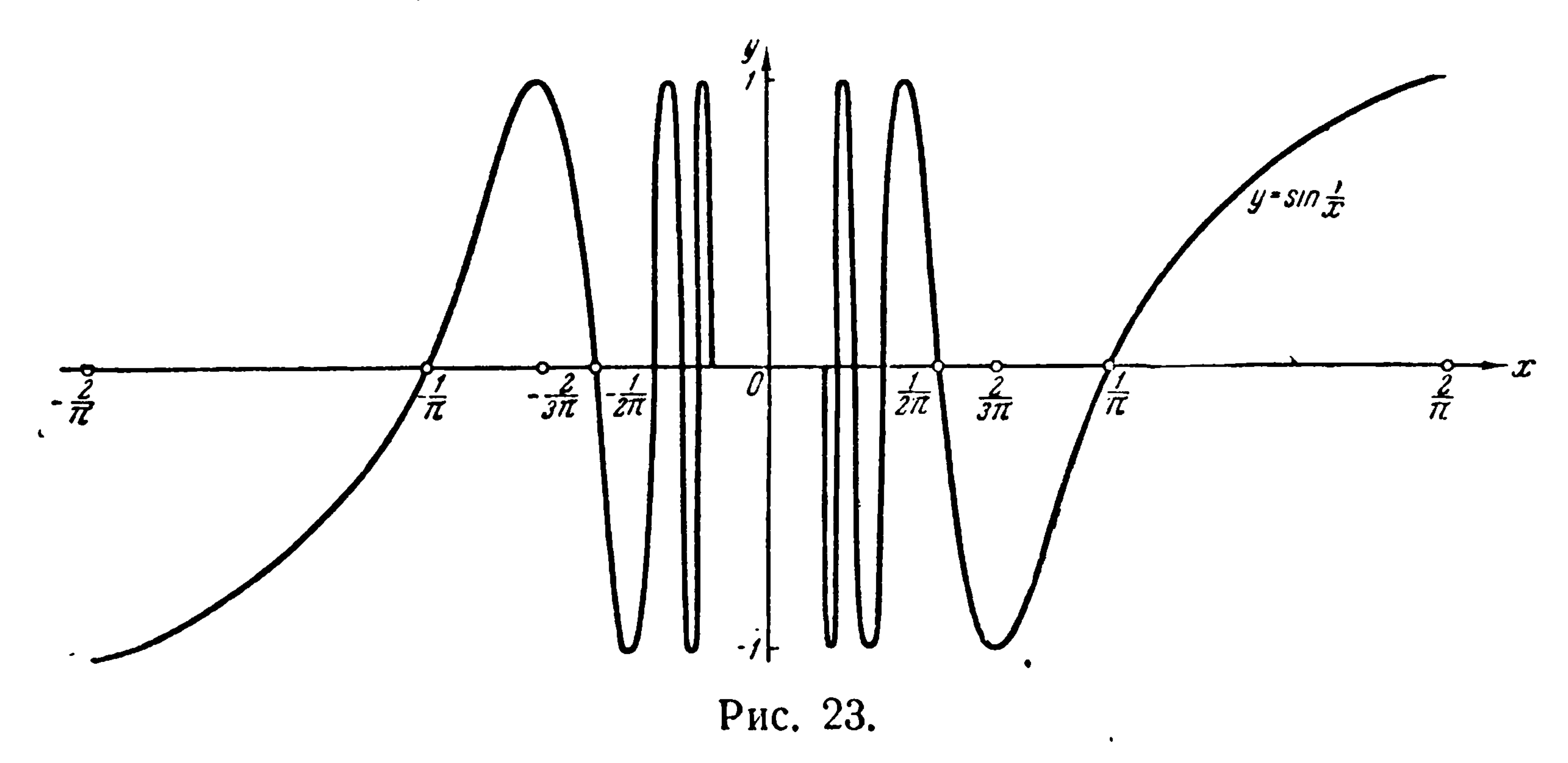


Рис. 23.

10) Если (для $x \neq 0$) рассмотреть функцию $x \cdot \sin\frac{1}{x}$, которая отличается множителем x от только что изученной функции $\sin\frac{1}{x}$, то на этот раз предел при $x \to 0$ существует:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0,$$

что сразу ясно из неравенства

$$\left| x \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \leqslant |x|.$$

При приближении x к 0 наша функция по-прежнему производит бесконечное множество колебаний, но их амплитуда (благодаря множеству x) убывает, стремясь к 0, чем и обеспечивается существование предела.

График функции

$$y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

изображен на рис. 24; он умещается между двумя биссектрисами $y = x$ и $y = -x$ координатных углов *).

Замечание. Мы имели ряд пределов

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

объединенных одной особенностью: ни одна из рассматриваемых здесь функций не определена при $x = 0$. Но это нисколько не мешает говорить об их

*) На рис. 23 и 24 для ясности пришлось по оси x взять бо́льший масштаб, что создает искажение.

пределах при $x \to 0$, ибо, согласно точному смыслу данного в **52** определения, как раз значение $x=0$ при этом не рассматривается.

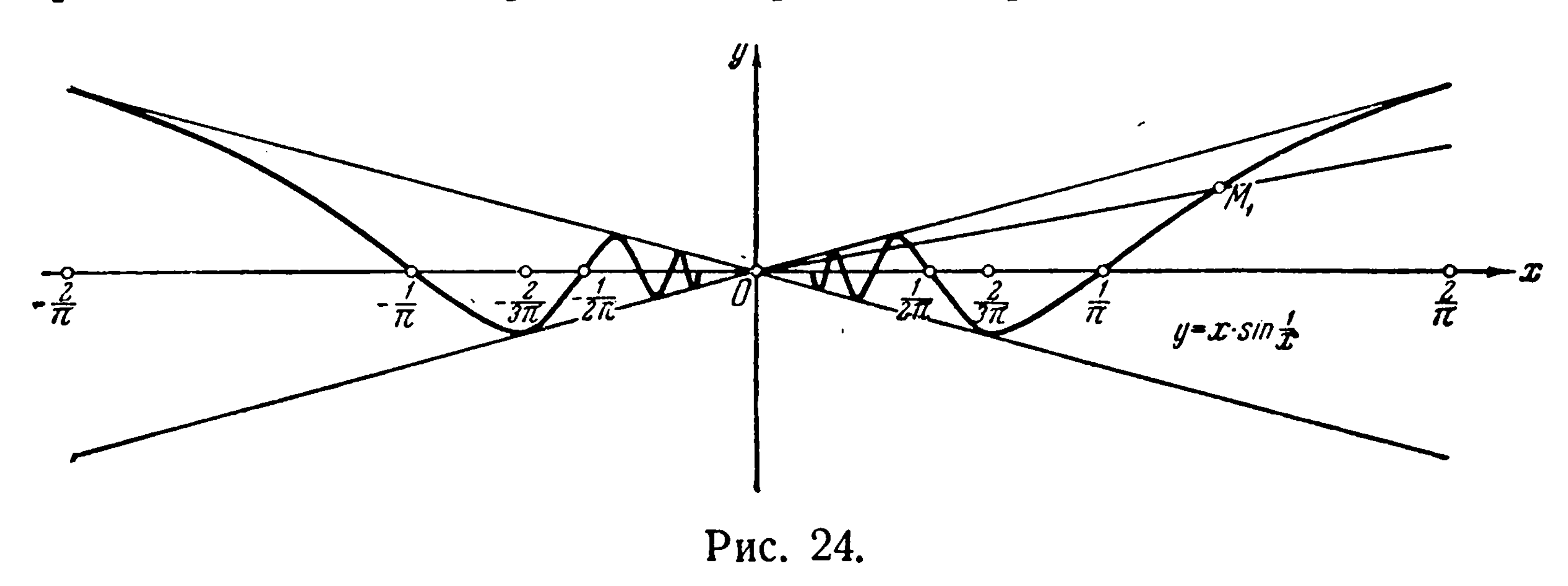


Рис. 24.

Аналогично, то обстоятельство, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет смысла при $x=0$, не мешает ставить вопрос об ее пределе при $x \to 0$; но на этот раз предел оказывается несуществующим.

55. Распространение теории пределов. Естественно встает вопрос о распространении теории пределов, развитой в главе I (§§ 1 и 2) применительно к случаю варианты, на рассматриваемый здесь общий случай произвольной функции.

Для этого существуют два пути:

I. Прежде всего, можно перефразировать здесь изложенные там рассуждения. Мы для примера фактически выполним это по отношению к предложению 1° в **26**.

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную в некоторой области $\mathscr{X}$, с точкой сгущения a *).

1° *Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, и $A>p$ $(A<q)$, то для достаточно близких к a значений x (отличных от a) и сама функция удовлетворяет неравенству*

$$f(x)>p \quad (f(x)<q). \tag{14}$$

Выбрав положительное число $\varepsilon<A-p$ $(q-A)$, будем иметь

$$A-\varepsilon>p \quad (A+\varepsilon<q).$$

Но, по определению предела, для этого ε найдется такое δ, что, лишь только $|x-a|<\delta$ (где x взято из $\mathscr{X}$ и отлично от a), тотчас же

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Для тех же значений x и подавно будет выполняться (14).

Читатель видит, что никаких новых идей для доказательства привлекать не пришлось.

*) Число a может быть и бесконечным, но мы для определенности ограничимся случаем конечного a.

Отсюда непосредственно могут быть оправданы и утверждения 2°, 3° и 5° из **26.** Например, полагая в 1° $p=0$ ($q=0$), получим:

2° *Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный положительный (отрицательный) предел, то и сама функция положительна (отрицательна), по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a, но отличных от a.*

Справедливо и утверждение, аналогичное 4°, но в более узкой форме:

4° *Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, то для значений x, достаточно близких к a, функция будет ограниченной:*

$$|f(x)| \leqslant M' \quad (M' = \text{const}, \ |x-a| < \delta).$$

Напомним, что первоначально и для варианты x_n, имеющей конечный предел, неравенство $|x_n| \leqslant M'$ было получено только для $n > N$ но, так как лишь конечное число значений варианты может не удовлетворять этому неравенству, то нетрудно было, увеличив в случае надобности M', добиться выполнения неравенства для всех x_n. Здесь же этого, вообще говоря, сделать нельзя, ибо значений x, для которых $|f(x)| > M'$, может оказаться и бесконечное множество. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ (для $x > 0$) при $x \to 1$ стремится к единице; очевидно, $f(x) < 2$, если $|x-1| < \frac{1}{2}$, однако для всех рассматриваемых значений x функция $f(x)$ вовсе не будет ограниченной.

II. Переходя к другим теоремам, в которых переменные связываются знаками равенства, неравенства или арифметических действий, мы, прежде всего, должны оговорить, что, соединяя две или несколько функций $f(x)$, $g(x)$, ... (определенных в одной и той же области $\mathcal{X}$) такими знаками, мы всегда подразумеваем, что их значения отвечают одному и тому же значению x.

Все эти теоремы можно было бы доказать аналогичным образом наново, но — и это важно подчеркнуть — *на деле нет необходимости их передоказывать.* Если, говоря о пределе функции, стоять на «точке зрения последовательностей», то, *поскольку для последовательностей теоремы доказаны, они верны и для функций.*

Для примера остановимся на теоремах 1°, 2°, 3° из **30**:

Пусть в области $\mathcal{X}$ (с точкой сгущения a) заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, и при стремлении x к a обе имеют конечные пределы

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

Тогда и функции

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{15}$$

также имеют конечные пределы (в случае частного — в предположении, что $B \neq 0$), именно

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B}.$$

На «языке последовательностей» данные соотношения расшифровываются так: если $\{x_n\}$ есть любая последовательность значений x из $\mathscr{X}$, имеющая пределом a, то

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B.$$

Если к этим двум вариантам применить уже доказанные теоремы, то получаем сразу:

$$\lim [f(x_n) \pm g(x_n)] = A \pm B, \quad \lim f(x_n) g(x_n) = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

а это (на «языке последовательностей») и выражает именно то, что нужно было доказать *).

Таким же образом на общий случай, рассматриваемый нами теперь, автоматически переносится и все сказанное в **31** относительно «неопределенных выражений», условно характеризуемых символами:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty.$$

Как и в простейшем случае, когда мы имеем дело с функциями натурального аргумента, здесь для «раскрытия неопределенности» уже недостаточно знать лишь пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, а нужно учесть и самый закон их изменения.

Читатель легко проверит, что в примерах 4), 5) предыдущего n° мы имели дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $0 \cdot \infty$, а в примере 7) — с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. В следующем n° мы приведем дальнейшие примеры, уже с применением простейших теорем теории пределов.

Мы еще вернемся к этому вопросу и в § 4 главы IV, где будут даны общие методы раскрытия неопределенностей уже с применением дифференциального исчисления.

56. Примеры. 1) Обобщая примеры 1) и 2), **32**, исследуем поведение многочлена

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k,$$

---

*) В случае частного можно было бы заметить (аналогично тому, как мы это сделали для варианты), что для x, достаточно близких к a, знаменатель $g(x) \neq 0$, так что дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет смысл, по крайней мере, для этих значений x.

а затем — и частного двух таких многочленов

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_{l-1}x+b_l}$$

при $x\to\pm\infty$.

Путем преобразования

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_k}{x_k}\right)$$

легко установить, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x)=\pm\infty \qquad (\infty-\infty),$$

причем знак предела при k четном определяется лишь знаком a_0, а при k нечетном — зависит еще и от знака x.

2) Аналогично находим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\pm\infty,\ \frac{a_0}{b_0},\ 0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

в зависимости от того, будет ли $k>l$, $k=l$ или $k<l$. Знак предела (в первом случае) устанавливается по знакам a_0 и b_0, а также (при $k-l$ нечетном) по — знаку x.

3) Докажем для любого положительного рационального показателя r формулу

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r\ ^{*)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Начнем с простейшего случая, когда показатель есть натуральное число: $r=n$. По биному Ньютона

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^2+\ldots+x^n}{x}=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x+\ldots+x^{n-1};$$

так как при $x\to 0$ все члены в последней сумме, кроме первого, стремятся к 0, то, действительно, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n.$$

Пусть теперь $r=\frac{1}{m}$ (где m — натуральное), и рассмотрим выражение

$$\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}.$$

Положим

$$\sqrt[m]{1+x}-1=y, \text{ откуда } x=(1+y)^m-1.$$

Так как (считая $|x|>1$)

$$1-|x|<\sqrt[m]{1+x}<1+|x|, \text{ то } \lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+x}=1,$$

так что, вместе с x, и $y\to 0$. А тогда, по предыдущему случаю,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

---

*) Ниже [77, 5) (в)] она будет обобщена на случай любого вещественного показателя.

Наконец, общий случай $r=\frac{n}{m}$ исчерпывается введением той же вспомогательной переменной y:

$$\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}}-1}{x}=\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\frac{(1+y)^n-1}{y}\cdot\frac{y}{(1+y)^m-1},$$

откуда

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}}-1}{x}=\frac{n}{m}.$$

4) Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}}{x^2}.$$

С помощью той же подстановки $\sqrt[m]{1+x}-1=y$ преобразуем рассматриваемое выражение к виду

$$\frac{y-\frac{1}{m}[(1+y)^m-1]}{[(1+y)^m-1]^2}=\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\ldots}{m^2y^2+\ldots}=\frac{-\frac{m-1}{2}+\ldots}{m^2+\ldots},$$

откуда сразу ясно, что искомый предел равен $-\frac{m-1}{2m^2}$.

5) Предел [**54** 7)]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

часто используется для нахождения других пределов.

(а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right).$$

Очевидно,

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2;$$

так как выражение в скобках стремится к 1, то общий предел и будет $\frac{1}{2}$.

(б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right).$$

И здесь преобразование легко приводит к уже изученным пределам:

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Заметим, что $\cos x\to 1$ при $x\to 0$, как это вытекает, например, из предыдущего результата (а).

(в) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=0\qquad(\infty-\infty).$$

Здесь удобнее перейти к переменной $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$; очевидно $\alpha \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \csc \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \alpha \to 0.$$

57. Предел монотонной функции. Вопрос о самом существовании предела функции

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

особенно просто решается для функций частного типа, представляющих обобщение понятия монотонной варианты [**34**].

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области $\mathscr{X} = \{x\}$. Функция называется возрастающей (убывающей) в этой области, если для любой пары принадлежащих ей значений

$$\text{из } x' > x \text{ следует } f(x') > f(x) \quad [f(x') < f(x)].$$

Если же

$$\text{из } x' > x \text{ следует лишь } f(x') \geqslant f(x) \quad [f(x') \leqslant f(x)],$$

то функцию называют неубывающей (невозрастающей). Иногда удобнее и в этом случае называть функцию возрастающей (убывающей) — но в широком смысле.

Функции всех этих типов носят общее название монотонных. Для монотонной функции имеет место теорема, вполне аналогичная той теореме о монотонной варианте, которая была установлена в **34.**

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает, хотя бы в широком смысле, в области $\mathscr{X}$, имеющей точкой сгущения число a, бо́льшее всех значений x (оно может быть конечным или равным $+\infty$). Если при этом функция ограничена сверху:*

$$f(x) \leqslant M \quad (\text{для всех } x \text{ из } \mathscr{X}),$$

то при $x \to a$ функция имеет конечный предел; в противном случае — она стремится к $+\infty$.

Доказательство. Допустим сначала, что функция $f(x)$ ограничена сверху, т. е. ограничено сверху множество $\{f(x)\}$ значений функции, отвечающих изменению x в области $\mathscr{X}$. Тогда для этого множества существует [**11**] конечная точная верхняя граница A. Докажем, что это число A и будет искомым пределом.

Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, по свойству точной верхней границы, найдем такое значение $x' < a$, что $f(x') > A - \varepsilon$. Ввиду монотонности функции, для $x > x'$ и подавно будет: $f(x) > A - \varepsilon$. Так как, с другой стороны, всегда $f(x) \leqslant A < A + \varepsilon$, то для упомянутых значений x выполнится неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это и доказывает наше утверждение, стоит лишь при a конечном положить $x' = a - \delta$ (т. е. $\delta = a - x'$), а при $a = +\infty$ взять $\Delta = x'$.

Если функция $f(x)$ сверху не ограничена, то, каково бы ни было число E, найдется такое x', что $f(x') > E$; тогда для $x > x'$ и подавно $f(x) > E$, и т. д.

Предоставляем читателю преобразовать эту теорему для случая, когда предельное значение a меньше всех значений x, равно как и для случая монотонно убывающей функции.

Легко усмотреть, что теорема о монотонной варианте в **34** есть просто частный случай этой теоремы. Независимой переменной там был значок n, областью изменения которого служил натуральный ряд $\mathcal{N} = \{n\}$, с точкой сгущения $+\infty$.

В последующем нам чаще придется в качестве области $\mathcal{X}$, в которой рассматривается функция $f(x)$ встречать сплошной промежуток $[a', a)$, где $a' < a$ и a — конечное число или $+\infty$, либо же — промежуток $(a, a']$, где $a' > a$ и a — конечное число или $-\infty$.

58. Общий признак Больцано — Коши. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая — функции $f(x)$, заданной в области $\mathcal{X} = \{x\}$, для которой a служит точкой сгущения. Для существования конечного предела этой функции при стремлении x к a может быть установлен такой же признак, как и в случае варианты **[39]**. Формулировку его мы дадим параллельно для случая конечного a и для случая $a = +\infty$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ при стремлении x к a имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$ ($\Delta > 0$), чтобы неравенство*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

выполнялось, лишь только

$$|x - a| < \delta \text{ и } |x' - a| < \delta \quad (x > \Delta \text{ и } x' > \Delta).$$

Доказательство проведем в предположении, что a — конечное число.

Необходимость. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только $|x - a| < \delta$. Пусть и $|x' - a| < \delta$, так что и

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем

$$|f(x)-f(x')|=|[f(x)-A]+[A-f(x')]|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-A|+|A-f(x')|<\varepsilon,$$

в предположении, что одновременно

$$|x-a|<\delta \text{ и } |x'-a|<\delta.$$

Достаточность может быть установлена с помощью рассуждений, вполне аналогичных тем, которые были применены в случае варианты [39]. Проще, однако, не повторяя этих рассуждений, попросту свести вопрос к уже рассмотренному случаю. Путь для этого нам открывает второе определение понятия предела функции «на языке «последовательностей [53].»

Итак, пусть условие, сформулированное в теореме, выполнено, и по произвольно взятому $\varepsilon>0$ установлено соответствующее $\delta>0$.

Если $\{x_n\}$ есть любая последовательность значений x из $\mathscr{X}$, сходящаяся к a, то, по определению предела последовательности, найдется такой номер N, что для $n>N$ будет: $|x_n-a|<\delta$. Возьмем, наряду с n, и другой номер $n'>N$, так что одновременно

$$|x_n-a|<\delta \text{ и } |x_{n'}-a|<\delta.$$

Тогда, в силу самого выбора числа δ,

$$|f(x_n)-f(x_{n'})|<\varepsilon.$$

Это неравенство, таким образом, выполняется при единственном требовании, чтобы оба номера n и n' были $>N$. Это означает, что для варианты $f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ выполняется условие **39** и, следовательно, последовательность

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

имеет конечный предел.

Мы видели в **53** (см. замечание в конце), что этого уже достаточно, чтобы последний предел был одним и тем же, как бы ни выбирать последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a; этот предел и будет пределом функции, существование которого надлежало доказать.

[Легко вывести достаточность высказанного условия и из теоремы Больцано — Вейерштрасса — наподобие того, как это сделано для варианты в конце **41**.]

59. Наибольший и наименьший пределы функции. Даже при отсутствии определенного предела функции $f(x)$ при стремлении x к a, для отдельных последовательностей значений $x_n\to a$ предел

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

все же может существовать; его называют частичным пределом функции.

Например, для функции $\sin x$ при $x \to \pm\infty$ (или для $\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$) эти частичные пределы заполняют весь промежуток от -1 до $+1$.

Среди частичных пределов функции всегда найдется как **н а и б о л ь ш и й**, *так и* **н а и м е н ь ш и й**; их обозначают так:

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{x\to a}} f(x).$$

Равенство наибольшего и наименьшего пределов есть условие, необходимое и достаточное для существования определенного предела функции, в обычном смысле слова.

Мы ограничимся формулировкой этой теоремы, не приводя доказательства. Оно может быть выполнено в том же порядке идей, что и в 42.

§ 3. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших величин

60. Сравнение бесконечно малых. Предположим, что в каком-либо исследовании одновременно рассматривается ряд бесконечно малых величин:

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots,$$

которые, вообще говоря, будут функциями от одной и той же переменной, скажем, x, стремящейся к конечному или бесконечному пределу a.

Во многих случаях представляет интерес с р а в н е н и е названных бесконечно малых между собой по характеру их приближения к нулю. В основу сравнения двух бесконечно малых α и β кладется поведение их отношения*). На этот счет установим два соглашения:

I. *Если отношение* $\frac{\beta}{\alpha}$ *(а с ним и* $\frac{\alpha}{\beta}$*) имеет* *к о н е ч н ы й и о т л и ч н ы й о т н у л я п р е д е л, то бесконечно малые* α *и* β *считаются величинами о д н о г о п о р я д к а.*

II. *Если же отношение* $\frac{\beta}{\alpha}$ *само оказывается бесконечно малым (а обратное отношение* $\frac{\alpha}{\beta}$ *— бесконечно большим), то бесконечно малая* β *считается величиной* *в ы с ш е г о п о р я д к а*, *чем бесконечно малая* α, *и одновременно бесконечно малая* α *будет* *н и з ш е г о п о р я д к а*, *чем бесконечно малая* β.

Например, если $\alpha = x \to 0$, то по с р а в н е н и ю с э т о й б е с к о н е ч н о м а л о й одного порядка с нею будут бесконечно малые.

$$\sin x, \ \operatorname{tg} x, \ \sqrt[m]{1+x}-1,$$

ибо, как мы знаем [54, 7); 56, 3)],

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{m}.$$

---

*) Мы будем считать, что переменная, на которую мы делим, не обращается в 0, по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a.

Наоборот, бесконечно малые

$$\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m},\quad 1-\cos x,\quad \operatorname{tg} x-\sin x \tag{1}$$

будут, очевидно, высшего порядка, чем x [56, 4); 5), (а) и (б)].

Конечно, может случиться, что отношение двух бесконечно малых не стремится ни к какому пределу; например, если взять (см. 54, 9) и 10)]

$$\alpha=x \text{ и } \beta=x\sin\frac{1}{x},$$

то их отношение, равное $\sin\frac{1}{x}$, при $x\to 0$ предела не имеет. В таком случае говорят, что две бесконечно малые не сравнимы между собой.

Заметим, что если бесконечно малая β оказывается высшего порядка, чем бесконечно малая α, то этот факт записывают так:

$$\beta=o(\alpha).$$

Например, можно писать:

$$1-\cos x=o(x),\quad \operatorname{tg} x-\sin x=o(x) \text{ и т. п.}$$

Таким образом, символ $o(\alpha)$ служит общим обозначением для бесконечно малой высшего порядка, чем α. Этим удобным обозначением мы впредь будем пользоваться.

61. Шкала бесконечно малых. Иной раз встречается надобность в более точной сравнительной характеристике поведения бесконечно малых, в выражении их порядков числами. В этом случае, прежде всего, в качестве своего рода «эталона» выбирают одну из фигурирующих в данном исследовании бесконечно малых (скажем, α); ее называют основной. Конечно, выбор основной бесконечно малой в известной мере произволен, но обычно берут простейшую из всех. Если рассматриваемые величины, как мы предположили, являются функциями от x и становятся бесконечно малыми при стремлении x к a, то в зависимости от того, будет ли a нулем, конечным и отличным от нуля числом или бесконечностью, естественно за основную бесконечно малую взять, соответственно

$$x,\quad x-a,\quad \frac{1}{x}.$$

Далее, из степеней основной бесконечно малой α (мы будем считать $\alpha>0$) с различными положительными показателями, α^k, составляют как бы шкалу для оценки бесконечно малых более сложной природы *).

III. *Уславливаются считать бесконечно малую β величиной k-го порядка (относительно основной бесконечно малой α), если β и α^k $(k>0)$ будут величинами одного порядка,* т. е. если отношение $\frac{\beta}{\alpha^k}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

*) Легко видеть, что при $k>0$ величина α^k будет бесконечно малой одновременно с α.

Теперь, например, можно, не довольствуясь утверждением, что бесконечно малые (1) (при $x \to 0$) будут величинами высшего порядка, чем $\alpha = x$, сказать точно, что первые две из них суть бесконечно малые второго порядка, а последняя — третьего порядка относительно $\alpha = x$, ибо [56, 4); 5), (а) и (б)]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{1}{m}x}{x^2} = -\frac{m-1}{2m^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Чтобы взять более сложный пример, рассмотрим выражение

$$\beta = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x};$$

при $x \to +\infty$ оно будет бесконечно малым, что становится ясным, если представить его в виде

$$\beta = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}.$$

Продолжая это преобразование, найдем:

$$\beta = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \\ = -\frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}.$$

Полагая $\alpha = \frac{1}{x}$, теперь уже нетрудно сообразить, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta}{\alpha^{3/2}} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \\ = -\frac{1}{4}\ ^{*)}.$$

Таким образом, здесь порядок выражается числом $\frac{3}{2}$.

Не следует думать, конечно, что для всякой бесконечно малой β (даже сравнимой со всеми степенями α^k) может быть установлен определенный порядок.

---

*) Повсюду здесь мы пользуемся тем, что $\lim_{z\to 0} \sqrt{1+z} = 1$; это было доказано в 56, 3) (для корня любой степени m).

Любопытные примеры, относящиеся сюда, можно получить из формул, установленных в **54**, 4) и 5) (при $a>1$ и $k>0$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0. \tag{2}$$

Прежде всего, отсюда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\log_a x}=\infty.$$

Заменив теперь здесь x на $\frac{1}{x}$ и положив еще в первом из этих соотношений $a=\frac{1}{c}$, $0<c<1$, мы получим:

$$\lim_{x\to+0}\frac{c^{\frac{1}{x}}}{x^k}=0,\qquad \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\log_a x}}{x^k}=\infty.$$

Таким образом, бесконечно малая $c^{\frac{1}{x}}$ $(0<c<1)$ будет высшего порядка, чем все степени x^k $(k>0)$, в то время как бесконечно малая $\frac{1}{\log_a x}$ $(a>1)$ оказывается низшего порядка, чем все эти степени.

62. Эквивалентные бесконечно малые. Остановимся теперь на одном особенно важном частном случае бесконечно малых одного порядка.

IV. *Будем называть бесконечно малые α и β эквивалентными (в знаках: $\alpha\sim\beta$), если их разность $\gamma=\beta-\alpha$ оказывается величиной высшего порядка, чем каждая из бесконечно малых α и β:*

$$\gamma=o(\alpha)\ \text{ и }\ \gamma=o(\beta).$$

Впрочем, достаточно потребовать, чтобы γ была высшего порядка, чем одна из этих бесконечно малых, потому что, если, например, γ высшего порядка, чем α, то она будет также высшего порядка, чем β. Действительно, из того, что $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$, следует, что и

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}=\lim\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}}=0.$$

Рассмотрим две эквивалентные бесконечно малые α и β, так что $\beta=\alpha+\gamma$, где $\gamma=o(\alpha)$. Если приближенно положить $\beta\doteq\alpha$ *), то — по мере уменьшения обеих величин — стремится к нулю не только абсолютная погрешность от этой замены, представляемая

*) Знак $\doteq$ означает приближенное равенство.

величиной $|\gamma|$, но и относительная погрешность, равная $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$. Иными словами, *при достаточно малых значениях α и β можно со сколь угодно большой относительной точностью положить $\beta=\alpha$.* На этом основана, при приближенных выкладках, замена сложных бесконечно малых эквивалентными им простыми.

Установим полезный критерий эквивалентности двух бесконечно малых, который в сущности дает второе определение этого понятия, равносильное ранее данному:

Для того чтобы две бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=1.$$

Пусть сперва выполняется это соотношение, так что

$$\delta=\frac{\beta}{\alpha}-1\to 0.$$

Тогда

$$\gamma=\beta-\alpha=\delta\cdot\alpha$$

будет величиной высшего порядка, чем α, ибо

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha}=\lim \delta=0.$$

Обратно, пусть теперь α и β эквивалентны, т. е. $\gamma=\beta-\alpha$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем α. Вследствие этого имеем

$$\frac{\beta}{\alpha}-1=\frac{\gamma}{\alpha}\to 0, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{\beta}{\alpha}\to 1,$$

ч. и тр. д.

С помощью этого критерия, например, сразу видно, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ эквивалентны x, а $\sqrt[m]{1+x}-1$ эквивалентно $\frac{1}{m}x$. Отсюда — приближенные формулы:

$$\sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x,$$

$$\sqrt[m]{1+x}-1 \doteq \frac{1}{m}x, \text{ в частности, } \sqrt{1+x}-1 \doteq \frac{1}{2}x.$$

Доказанное свойство эквивалентных бесконечно малых приводит к использованию их при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$, т. е. при разыскании предела отношения двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$. *Каждая из них при этом может быть заменена, без влияния на существование и величину предела, любой эквивалентной ей бесконечно малой.*

Действительно, если $\bar{\alpha}\sim\alpha$ и $\bar{\beta}\sim\beta$, т. е.

$$\lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}=1 \text{ и } \lim \frac{\bar{\beta}}{\beta}=1,$$

то отношение

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\bar\beta}\cdot\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}\cdot\frac{\bar\alpha}{\alpha},$$

отличающееся от отношения $\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}$ множителями, стремящимися к единице, имеет предел одновременно с ним (и притом тот же).

Если удастся выбрать $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ достаточно простыми, то это может сразу значительно упростить задачу; например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

Из доказанного вытекает также, что *две бесконечно малые, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой.*

63. Выделение главной части. Если выбрана основная бесконечно малая α, то простейшими бесконечно малыми естественно считать величины вида $c\cdot\alpha^k$, где c — постоянный коэффициент и $k>0$. Пусть бесконечно малая β будет k-го порядка относительно α, т. е.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c,$$

где c — конечное и отличное от нуля число. Тогда

$$\lim\frac{\beta}{c\alpha^k}=1,$$

и бесконечно малые β и $c\alpha^k$ оказываются эквивалентными: $\beta\sim c\alpha^k$.

Эта *простейшая бесконечно малая $c\alpha^k$, эквивалентная данной бесконечно малой β, называется ее главной частью* (*или главным членом*).

Пользуясь установленными выше результатами, кроме уже указанных простых примеров, легко выделить главные части выражений:

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\qquad \operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3.$$

Здесь $x\to 0$, и именно $\alpha=x$ является основной бесконечно малой.

Наконец, если $x\to+\infty$ и за основную принята бесконечно малая $\alpha=\frac{1}{x}$, то имеем также

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\sim-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Все эти результаты снова приводят к приближенным формулам.

Пусть $\beta\sim c\alpha^k$, т. е. $\beta=c\alpha^k+\gamma$, где $\gamma=o(\alpha^k)$. Можно представить себе, что из бесконечно малой γ снова выделен главный член: $\gamma=c'\alpha^{k'}+\delta$, где $k'>k$, а $\delta=o(\alpha^{k'})$, и т. д.

Например, если положить (считая $x \to 0$):

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m} x + \gamma,$$

то, как мы уже имели [56, 4)],

$$\lim_{x \to 0} \frac{\gamma}{x^2} = -\frac{m-1}{2m^2},$$

так что главная часть γ есть $-\frac{m-1}{2m^2} x^2$. Отсюда

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m} x - \frac{m-1}{2m^2} x^2 + o(x^2).$$

В частности,

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2).$$

Этот процесс последовательного выделения из бесконечно малой простейших бесконечно малых все возрастающих порядков можно продолжать и дальше.

Мы ограничиваемся в настоящем параграфе установлением общих понятий, иллюстрируя их лишь немногими примерами. В последующем мы укажем систематический прием как для построения главной части данной бесконечно малой величины, так и для дальнейшего выделения из нее простейших бесконечно малых, о котором только что шла речь [см. **104, 124**].

В заключение, остановимся еще на таком вопросе: если для двух бесконечно малых β и γ известны их главные члены $c\alpha^k$ и $c'\alpha^{k'}$, что можно сказать о главном члене их суммы $\beta + \gamma$?

При $k \neq k'$ главным членом ее, очевидно, будет тот из членов $c\alpha^k$ и $c'\alpha^{k'}$, в котором показатель меньше. Пусть теперь $k = k'$; тогда главной частью для $\beta + \gamma$ явится сумма $(c + c')\alpha^k$ — в предположении, однако, что $c + c \neq 0$. В случае же, когда оба главных члена взаимно уничтожаются, сумма $\beta + \gamma$ оказывается бесконечно малой высшего порядка, чем каждое из слагаемых.

Так будет, например, при $x \to 0$ для бесконечно малых

$$\beta = \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2} x \text{ и } \gamma = \sqrt{1-x} - 1 \sim -\frac{1}{2} x.$$

Если выделить в них еще следующие члены:

$$\beta = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2), \quad \gamma = -\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2),$$

то ясно, что

$$\beta + \gamma = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = -\frac{1}{4} x^2 + o(x^2),$$

так что $\beta + \gamma$ будет бесконечно малой второго порядка, а ее главный член равен $-\frac{1}{4} x^2$.

64. Задачи. Для иллюстрации изложенных соображений приведем несколько задач, в которых они используются.

1) Пусть прямолинейное расстояние на местности измеряется с помощью мерной рейки длины l *м*. Так как фактически рейка прикладывается не точно вдоль измеряемой прямой, то результат измерения оказывается несколько больше истинной длины. Сделаем самое невыгодное предположение, именно, что рейка прикладывается зигзагом, так что ее концы отстоят от прямой поочередно то в одну, то в другую сторону на расстояние λ *м* (рис. 25). Требуется оценить погрешность.

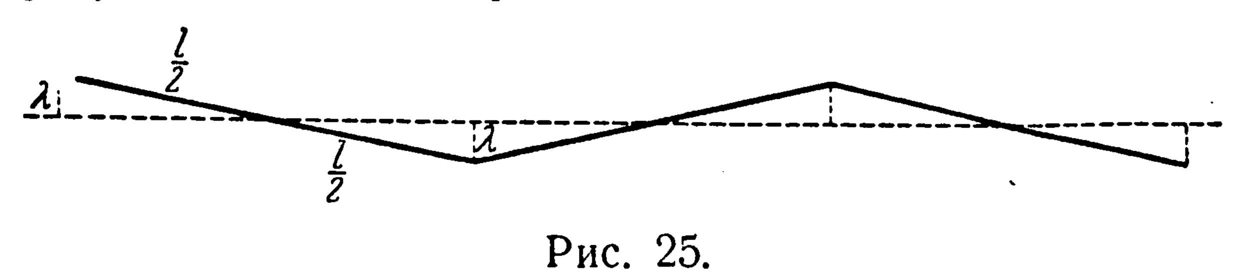


Рис. 25.

При однократном прикладывании рейки абсолютная погрешность равна разности между длиной l рейки и ее проекцией на измеряемую прямую; проекция же эта будет:

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}\,.$$

Воспользовавшись приближенной формулой

$$\sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x$$

при $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ (что оправдано, ввиду малости величины λ относительно l), заменим выражение для проекции следующим:

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)\doteq l-\frac{2\lambda^2}{l}\,.$$

В таком случае, упомянутая погрешность есть $\frac{2\lambda^2}{l}$, а относительная погрешность, очевидно, будет $\frac{2\lambda^2}{l^2}$. Та же относительная погрешность сохранится и при многократном прикладывании рейки.

Если для этой погрешности установлена граница δ, т. е. должно быть $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$, то отсюда $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$.

Например, при измерении двухметровой рейкой ($l=2$), для достижения относительной точности в 0,001 достаточно, чтобы уклонение λ не превосходило $2\sqrt{0{,}0005}\doteq 0{,}045$ *м* $=4{,}5$ *см*.

2) Найти формулу для длины l открытого ремня, надетого на данную пару шкивов радиусов R и r, с расстоянием d между центрами (рис. 26). Из чертежа имеем

$$\frac{l}{2}=\breve{AC}+Cc+\breve{ca}.$$

Но $\breve{AC}=R\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\breve{ca}=r\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, где через α обозначены равные углы $\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle boc$; а из $\triangle ODo$

$$Cc=Do=\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

Таким образом,

$$l = \pi(R+r) + 2\alpha(R-r) + 2\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

Для упрощения этой формулы вспомним, что

$$\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{OD}{Oo} = \frac{R-r}{d}$$

— в предположении, что $R-r$ мало относительно d. В том же предположении

$$\sqrt{d^2-(R-r)^2} = d\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{d}\right)^2} \doteq d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right].$$

После подстановки этих значений и преобразований, получим окончательную

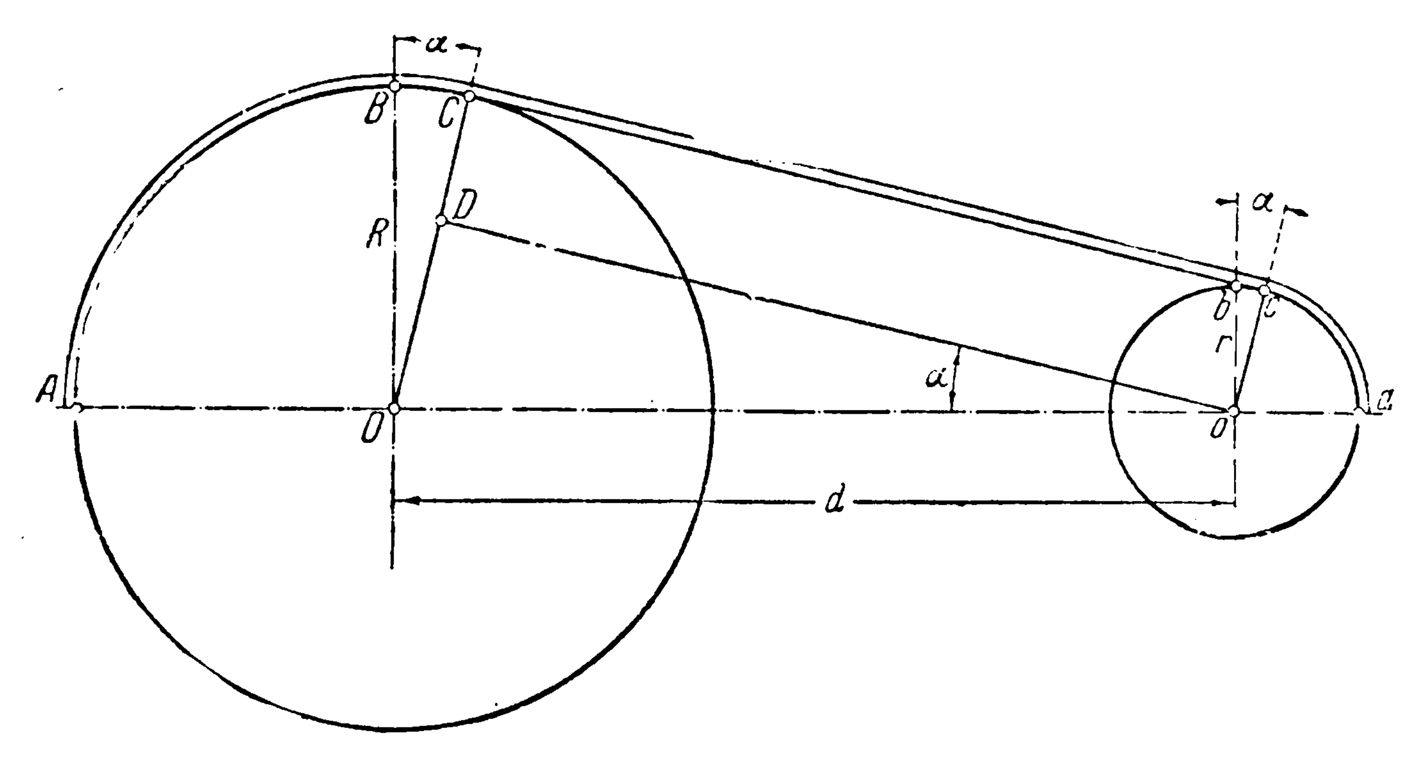


Рис. 26.

формулу:

$$l \doteq \pi(R+r) + 2d + \frac{(R-r)^2}{d}.$$

3) При разбивке дуг окружностей на местности имеет значение следующая задача: *найти отношение стрелы $f = DB$ дуги ABC окружности к стреле $f_1 = D_1B_1$ половины AB_1B этой дуги* (рис. 27).

Если положить радиус окружности равным r, $\sphericalangle AOB = \varphi$, то $\sphericalangle AOB_1 = \frac{\varphi}{2}$ и

$$f = DB = r(1-\cos\varphi),$$

$$f_1 = r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Выражение это слишком сложно, чтобы им удобно было пользоваться на практике. Найдем его предел при $\varphi \to 0$ (ибо для достаточно малых φ это выражение можно приближенно заменить его пределом). С этой целью заменяем числитель и знаменатель их главными частями и сразу находим:

$$\lim \frac{f}{f_1} = \lim \frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2} = 4.$$

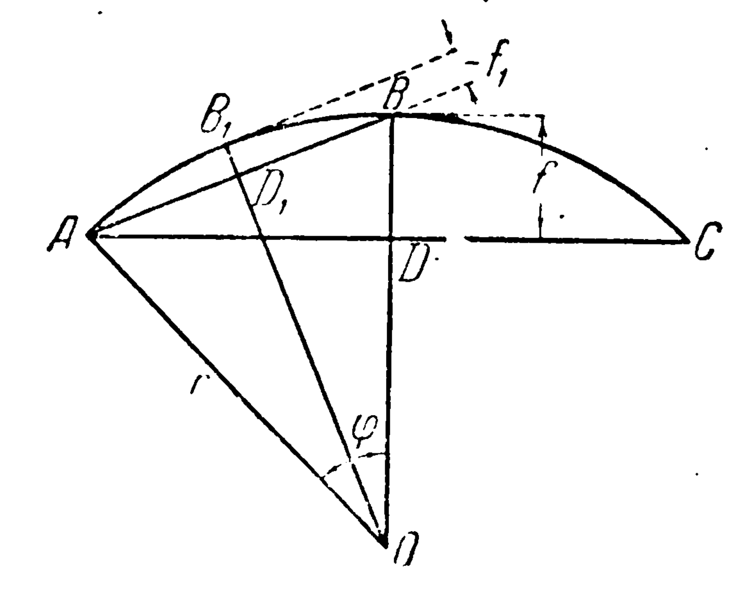


Рис. 27.

Итак, для дуг, соответствующих небольшому центральному углу, приближенно можно считать, что *стрела полудуги вчетверо меньше стрелы дуги.* Это позволяет последовательно строить промежуточные точки дуги, для которой даны концы и середина.

65. Классификация бесконечно больших. Заметим, что для бесконечно больших величин может быть развита подобная же классификация. Как и в **60**, будем считать рассматриваемые бесконечно большие величины функциями от одной и той же переменной x, которые стремятся к $+\infty$, когда x стремится к a.

I. *Две бесконечно большие y и z считаются величинами одного порядка, если их отношение $\frac{z}{y}$ $\left(а с ним и \frac{y}{z}\right)$ имеет конечный и отличный от нуля предел.*

II. *Если же отношение $\frac{z}{y}$ само становится бесконечно большим $\left(а обратное отношение \frac{y}{z} — бесконечно малым\right)$, то z считается бесконечно большой величиной высшего порядка, чем y, и, одновременно, y будет бесконечно большой низшего порядка, чем z.*

В случае, когда отношение $\frac{z}{y}$ ни к какому пределу не стремится, бесконечно большие y и z будут несравнимы.

При одновременном рассматривании ряда бесконечно больших величин, одну из них (скажем, y) выбирают в качестве основной и с ее степенями сравнивают остальные бесконечно большие. Например, если (как мы предположили выше) все они суть функции от x и стремятся к $+\infty$ при $x \to a$, то в качестве основной бесконечно большой обыкновенно берут $|x|$ если $a = \pm\infty$, $\frac{1}{|x-a|}$ — при a конечном.

III. *Бесконечно большая z называется величиной k-го порядка (относительно основной бесконечно большой y), если z и y^k будут одного порядка,* т. е. если отношение $\frac{z}{y^k}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

Мы не станем приводить здесь примеров, ибо их легко получить, заменив рассмотренные выше бесконечно малые величины обратными им. Упомянем только о том, что бесконечно большая a^x $(a>1)$ при $x\to+\infty$ будет высшего порядка, а бесконечно большая $\log_a x$ $(a>1)$ — низшего порядка, чем любая степень x^k (с положительным показателем k); это следует из формул (2) **61**.

§ 4. Непрерывность (и разрывы) функций

66. Определение непрерывности функции в точке. С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой области $\mathscr{X}=\{x\}$, для которой x_0 является точкой сгущения; при этом пусть сама точка x_0 принадлежит области определения функции, так что в этой точке функция имеет определенное значение $f(x_0)$.

Когда устанавливалось понятие о пределе функции при стремлении x к x_0 [**52, 53**]

$$\lim_{x\to x_0} f(x),$$

неоднократно подчеркивалось, что значения x_0 переменная x не принимает; это значение могло даже не принадлежать области определения функции, а если и принадлежало, то значение $f(x_0)$ при образовании упомянутого предела не учитывалось.

Однако особую важность имеет именно случай, когда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

Говорят, что *функция $f(x)$ непрерывна при значении $x=x_0$ (или в точке $x=x_0$), если выполняется это соотношение; если же оно нарушено, то говорят, что при этом значении (или в этой точке) функция имеет разрыв* *).

В случае непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (и, очевидно, только в этом случае), при вычислении предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$ становится безразличным, будет ли x в своем стремлении к x_0 принимать, в частности, и значение x_0, или нет.

Определение непрерывности функции можно сформулировать в других терминах. Переход от значения x_0 к другому значению x можно себе представить так, что значению x_0 придано приращение

---

*) Эта терминология связана с интуитивным представлением о непрерывности и разрывах кривой: функция непрерывна, если непрерывен ее график, точки разрыва функции отвечают точкам разрыва графика. На деле, однако, понятие непрерывности для кривой само требует обоснования, и простейший путь к нему лежит как раз через непрерывность функций!

$\Delta x_0 = x - x_0$ *). Новое значение функции $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x_0)$ разнится от старого $y_0 = f(x_0)$ на приращение

$$\Delta y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy_0 в этой точке стремилось к 0 вместе с приращением Δx_0 независимой переменной. Иными словами: *непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции.*

Возвращаясь к основному определению (1), раскроем его содержание «на языке ε-δ» [**52**]. Смысл непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 сводится к следующему: *каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$, *для него найдется такое число* $\delta > 0$, *что неравенство*

$$|x - x_0| < \delta \text{ влечет за собой } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, таким образом, должно выполняться в достаточно малой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0.

Наконец, «на языке последовательностей» непрерывность выразится так: *какую бы последовательность значений x из* $\mathscr{X}$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящуюся к x_0, ни взять, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

сходится к $f(x_0)$.

Замечание. Пусть точка $x = x_0$, служащая точкой сгущения для области $\mathscr{X}$, в которой определена функция $f(x)$, сама области $\mathscr{X}$ не принадлежит, так что в этой точке функция не определена. Если, однако, существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x),$$

то стоит лишь дополнить определение функции, положив $f(x_0)$ равным этому пределу, чтобы функция оказалась непрерывной и в точке $x = x_0$. Это в подобных случаях мы обычно и будем впредь подразумевать.

Наоборот, если упомянутый предел не существует, то — несмотря на то, что в самой точке $x = x_0$ функция не определена — все же говорят, что функция в этой точке терпит разрыв: она будет иметь здесь разрыв, какое бы значение дополнительно ни приписать функции при $x = x_0$.

---

*) В анализе принято приращения величин x, y, t, ... обозначать через Δx, Δy, Δt, ... Эти обозначения надлежит рассматривать как цельные символы, не отделяя Δ от x, и т. п.

Обычно мы будем в дальнейшем рассматривать функции, определенные в промежутке $\mathcal{X}$; все его точки являются его точками сгущения, так что по отношению к любой из них можно ставить вопрос о непрерывности. Для упрощения речи, условливаются говорить, что функция непрерывна в промежутке $\mathcal{X}$, если она непрерывна в каждой точке промежутка в отдельности.

67. Арифметические операции над непрерывными функциями. Прежде чем перейти к примерам непрерывных функций, установим следующее простое предложение, которое позволит легко расширить их число.

Теорема. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в одном и том же промежутке $\mathcal{X}$ и обе непрерывные в точке x_0, то в той же точке будут непрерывны и функции*

$$f(x) \pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)},$$

последняя при условии, что $g(x_0) \neq 0$.

Это непосредственно вытекает из теорем о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, имеющих порознь пределы [55].

Остановимся для примера на частном двух функций. Предположение о непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 равносильно наличию равенств

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Но отсюда, по теореме о пределе частного (так как предел знаменателя не нуль), имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

а это равенство и означает, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

68. Примеры непрерывных функций. 1° Целая и дробная рациональные функции. Функция $f(x) = x$, очевидно, непрерывна во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$: если $x_n \to x_0$, то $f(x_n) = x_n \to x_0 = f(x_0)$. Точно так же непрерывна и функция, сводящаяся тождественно к постоянной.

Отсюда, на основании теоремы предыдущего n°, вытекает уже непрерывность любого одночленного выражения

$$ax^m = a\cdot \overbrace{x\cdot x \ldots x}^{m \text{ раз}}$$

как произведения непрерывных функций, а затем — и многочлена (целой рациональной функции)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

как суммы непрерывных функций. Во всех упомянутых случаях непрерывность имеет место во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Очевидно, наконец, что и частное двух многочленов (дробная рациональная функция):

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

также будет непрерывно при каждом значении x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

2°. Показательная функция. Докажем непрерывность показательной функции a^x при любом значении $x = x_0$, иными словами, установим, что

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

(При этом достаточно ограничиться предположением: $a > 1$.)

Мы видели в **54**, 6), что

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1.$$

Так как 1 есть как раз значение a^0 нашей функции, то это равенство и выражает непрерывность показательной функции в точке $x = 0$. Отсюда уже легко перейти к любой точке; действительно,

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1),$$

но при $x \to x_0$, очевидно, $x - x_0 \to 0$, так что — по доказанному —

$$a^{x-x_0} \to 1 \quad \text{и} \quad a^x \to a^{x_0},$$

ч. и тр. д.

3° Гиперболические функции. Их непрерывность, по уже упоминавшейся теореме, непосредственно вытекает из доказанной непрерывности показательной функции, ибо все они рационально выражаются через функцию e^x.

4° Тригонометрические функции. Остановимся сначала на функции $\sin x$. Она также непрерывна при любом значении $x = x_0$, т. е. имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Для доказательства заметим, что из неравенства

$$\sin x < x,$$

установленного **54**, (9) для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, легко вывести, что неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

справедливо уже для всех значений x (для $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$ это следует из того, что $|\sin x| \leqslant 1$). Далее, имеем:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2},$$

так что

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \cdot \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2}$$

и, окончательно,

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|, \tag{2}$$

каковы бы ни были значения x и x_0.

Если задано любое $\varepsilon > 0$, то положим $\delta = \varepsilon$; при $|x - x_0| < \delta$ будет

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность $\sin x$. Аналогично устанавливается и непрерывность функции $\cos x$ также при любом значении x.

Отсюда, по теореме предыдущего n°, вытекает уже непрерывность функций

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Исключение представляют для первых двух — значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, обращающие $\cos x$ в 0, для последних двух — значения вида $k\pi$, обращающие $\sin x$ в 0.

69. Односторонняя непрерывность. Классификация разрывов. Выше с помощью равенства (1) мы определили понятие непрерывности функций $f(x)$ в точке x_0. При этом, вычисляя предел (1), мы могли приближать x к x_0 и справа, и слева. Установим теперь понятие об односторонней непрерывности или одностороннем разрыве функции в данной точке.

Говорят, что *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа (слева)*, если выполняется предельное соотношение:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \\ {[f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)].} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Если же то или другое из этих соотношений не осуществляется, то *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв, соответственно, справа или слева.*

По отношению к левому (правому) концу промежутка $\mathscr{X}$ *), в котором функция определена, может идти речь, очевидно, только о непрерывности или разрыве справа (слева). Если же x_0 есть внутренняя точка промежутка $\mathscr{X}$, т. е. не совпадает ни с одним из его концов, то для того, чтобы выполнялось равенство (1), выражающее непрерывность функции в точке x_0 в обычном смысле, необходимо и достаточно, чтобы имели место зараз оба равенства (3) [**52**]. Иными словами, *непрерывность функции в точке x_0 равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно справа и слева.*

Остановимся подробнее на вопросе о непрерывности и разрыве функции $f(x)$ в точке x_0, скажем, справа. Предполагая, что функция $f(x)$ в некотором промежутке $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ справа от этой точки определена, видим, что для непрерывности необходимо и достаточно: во-первых, чтобы существовал конечный предел $f(x_0+0)$ функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 справа, и, во-вторых, чтобы этот предел был равен значению $f(x_0)$ функции в точке x_0.

Поэтому легко дать себе отчет в том, при каких обстоятельствах для функции $f(x)$ в точке x_0 справа появляется разрыв. Может случиться, что хотя конечный предел $f(x_0+0)$ и существует, но он не равен значению $f(x_0)$; такой разрыв называют обыкновенным или разрывом первого рода**). Но может быть и так, что предел $f(x_0+0)$ бесконечен, или его вовсе нет; тогда говорят о разрыве второго рода.

В следующем n° мы приведем примеры этих разрывов.

Замечание. Если в точке $x=x_0$ функция $f(x)$ не определена (см. замечание в **66**), то восстановить непрерывность функции в этой точке можно лишь, если существуют оба конечных предела $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ и равны между собой.

Если какой-либо из этих пределов бесконечен или вовсе не существует, то говорят о наличии разрыва второго рода с соответствующей стороны.

70. Примеры разрывных функций. 1) Рассмотрим функцию $y=E(x)$ (график ее представлен на рис. 8). Если x_0 — не целое число и $E(x_0)=m$, т. е. $m<x_0<m+1$, то и для всех значений x в промежутке $(m, m+1)$ будет $E(x)=m$, так что непрерывность функции в точке x_0 непосредственно ясна.

Иначе обстоит дело, если x_0 равно целому числу m. Справа в этой точке будет иметь место непрерывность, ибо правее $x=m$, именно для значений x в $(m, m+1)$ будет $E(x)=m$, так что и $E(m+0)=m=E(m)$. Наоборот, левее $x=m$, для значений x в $(m-1, m)$, очевидно, $E(x)=m-1$; отсюда, и $E(m-0)=m-1$, что не равно значению $E(m)$, и слева в точке $x=m$ функция имеет обыкновенный разрыв или скачок!

---

*) Предполагая, что этот конец есть число конечное.

**) В этом случае говорят также, что функция $f(x)$ в точке x_0 справа имеет скачок, по величине равный $f(x_0+0)-f(x_0)$.

2) Возьмем функцию, рассмотренную в **46**:

$$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

(ее график дан на рис. **28**.) Она имеет обыкновенные разрывы в точках

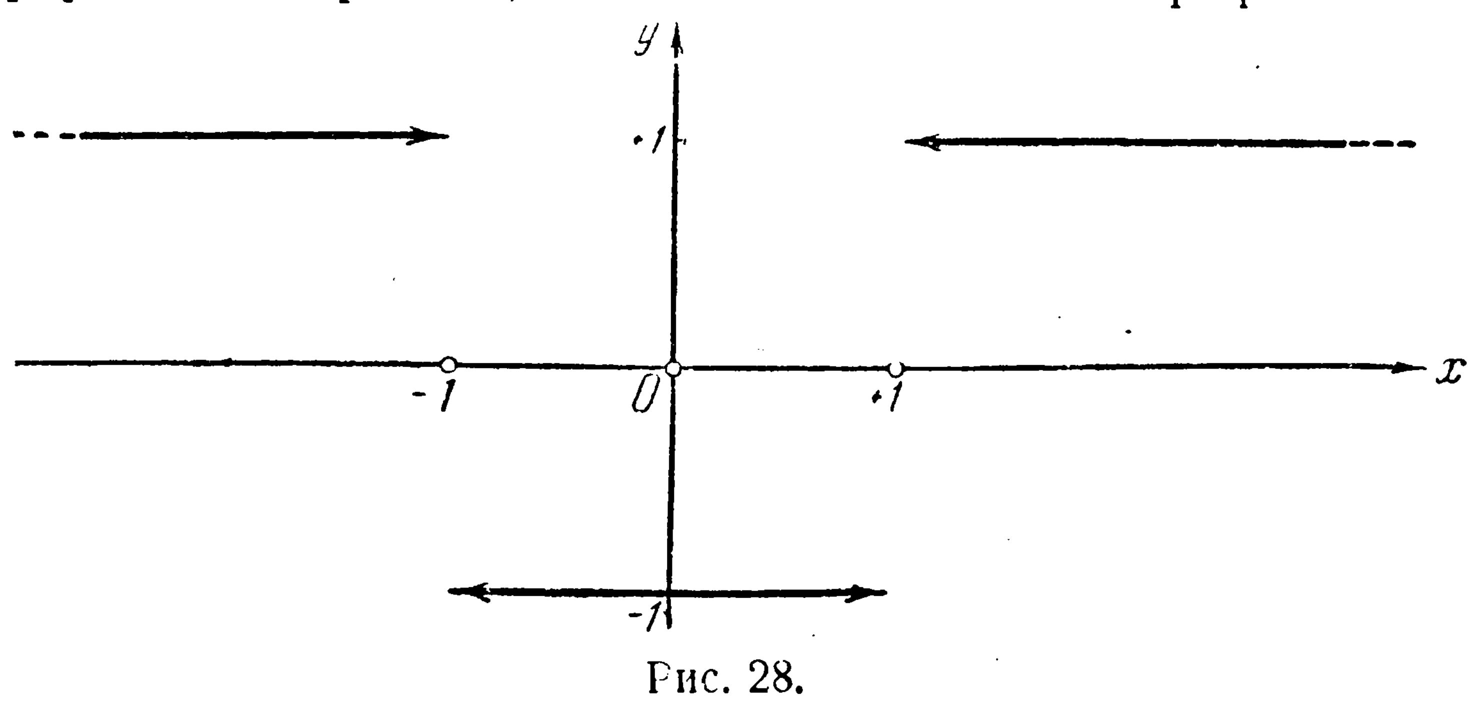


Рис. 28.

$x=\pm 1$ и справа, и слева, ибо:

$$f(\pm 1)=0,\ f(-1-0)=f(1+0)=1,$$
$$f(-1+0)=f(1-0)=-1.$$

3) Для функции

$$f(x)=\frac{1}{x^3}\quad(\text{при } x\neq 0)$$

точка $x=0$ есть точка разрыва второго рода — с обеих сторон: именно, в ней функция и справа и слева обращается в ∞:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty,\ f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

4) Функция

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\quad(\text{при } x\neq 0),$$

рассмотренная в **54**, 9), в точке $x=0$ имеет разрыв второго рода с обеих сторон, так как не существует вовсе предела этой функции при стремлении x к 0 ни справа, ни слева.

5) Наоборот, если взять функцию [**54**, 10)]

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\quad(\text{при } x\neq 0),$$

для которой, как мы видели, существует предел

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$

то, положив — согласно замечанию n° **66** — $f(0)=0$, мы восстановим непрерывность и при $x=0$.

6) Определим две функции равенствами:

$$f_1(x)=a^{\frac{1}{x}},\quad (a>1),\quad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

для $x\neq 0$ и сверх того положим $f_1(0)=f_2(0)=0$.

Для первой из них имеем:

$$f_1(+0) = \lim_{x \to +0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} a^z = +\infty,$$

$$f_1(-0) = \lim_{x \to -0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to -\infty} a^z = 0,$$

так что в точке $x = 0$ справа — разрыв второго рода, а слева — непрерывность. Для второй же —

$$f_2(+0) = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0) = -\frac{\pi}{2},$$

и в точке $x = 0$ — с обеих сторон скачки́. Графики этих функций даны на рис. 29 и 30.

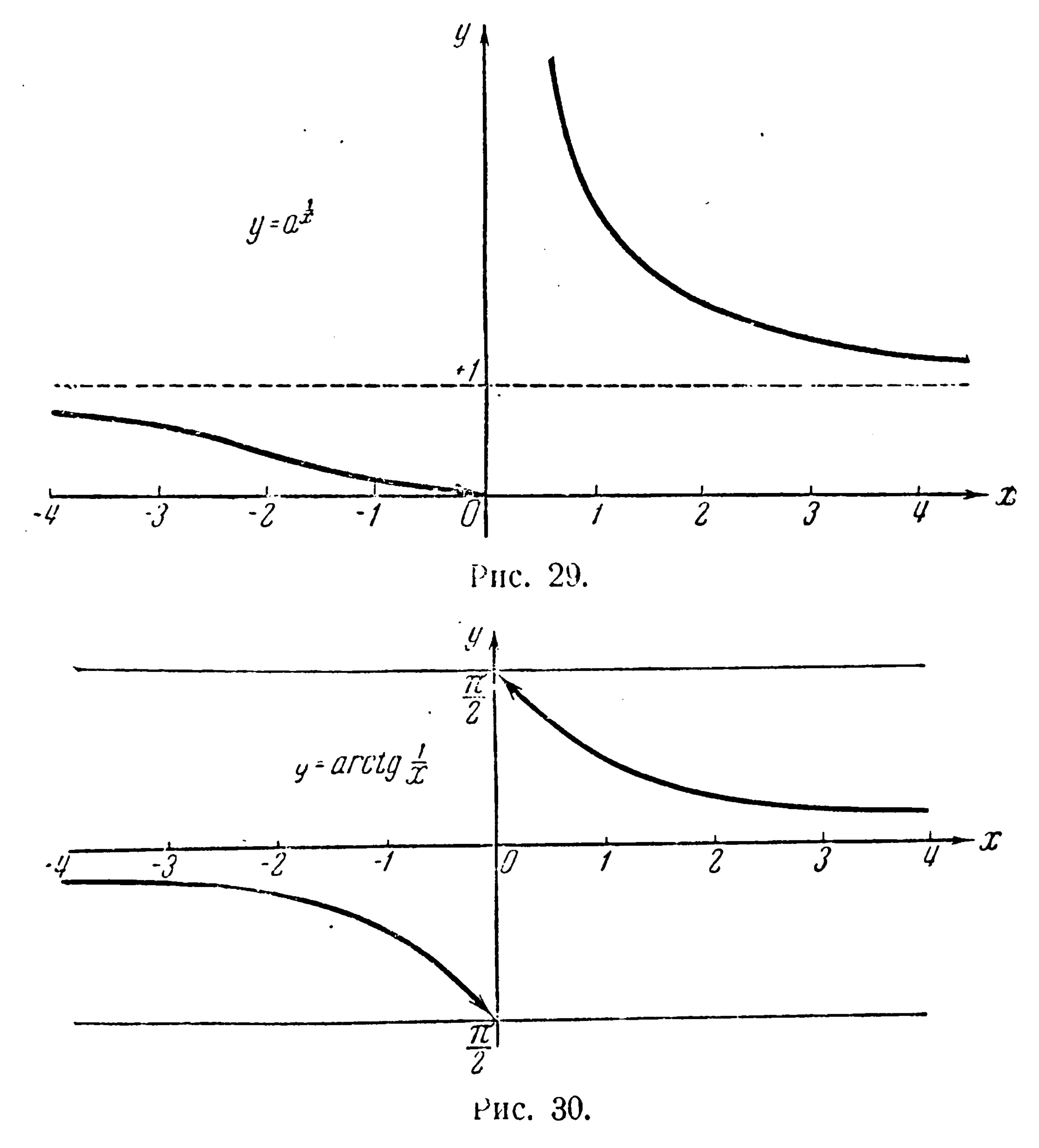


Рис. 29.

Рис. 30.

7) Вспомним еще о функции Дирихле [46]:

$$\chi(x) = 1, \text{ если } x \text{ рационально.}$$
$$\chi(x) = 0, \text{ если } x \text{ иррационально.}$$

Так как в любой близости от рациональной точки найдутся точки иррациональные, и наоборот, то каково бы ни было x_0 в промежутке $(-\infty, +\infty)$, предела $\chi(x)$ при $x \to x_0$ не существует, так что в каждой точке налицо разрыв второго рода (с обеих сторон).

8) Определим, наконец, в промежутке $[0, 1]$ функцию $f(x)$ так: если x рационально и выражается несократимой дробью $\frac{p}{q}$, то $f(x) = \frac{1}{q}$; для x иррационального положим $f(x) = 0$ *). Мы утверждаем, что в каждой рациональной точке функция имеет обыкновенные разрывы, в то время как в каждой иррациональной точке она непрерывна.

Действительно, пусть x_0 будет любая точка в рассматриваемом промежутке. Если задаться произвольным числом $\varepsilon > 0$, то существует лишь конечное число натуральных чисел q, не превосходящих $\frac{1}{\varepsilon}$, а значит в промежутке найдется лишь конечное число рациональных точек $\frac{p}{q}$, для которых $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$. Точку x_0 можно окружить такой окрестностью $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, чтобы в нее не попала ни одна из этих точек (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, лишь только $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$, будет ли x рационально или нет, во всяком случае $|f(x)| < \varepsilon$. Значит, для любой точки x_0 существуют

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

Если x_0 есть иррациональная точка, то и $f(x_0) = 0$, т. е. в этой точке функция непрерывна; если же x_0 рационально, то $f(x_0)$ отлично от 0, и налицо разрыв (обыкновенный), с обеих сторон.

71. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая — при изменении x в промежутке $\mathscr{X}$ **) — монотонно возрастает (убывает), хотя бы в широком смысле [57]. По отношению к таким функциям имеет место следующая теорема:

1° *Монотонно возрастающая (убывающая) функция $f(x)$ может иметь в $\mathscr{X}$ разве лишь разрывы первого рода, т. е. скачки.*

Возьмем любую точку x_0 промежутка $\mathscr{X}$, и пусть она не является левым концом этого промежутка. Рассматривая ту часть промежутка, которая лежит влево от x_0, применим к ней теорему из **57** о пределе монотонной функции; поскольку для $x < x_0$, очевидно, $f(x) \leqslant f(x_0)$, то существует конечный предел

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Если он совпадает со значением $f(x_0)$, то слева в точке x_0 функция непрерывна; в противном случае — налицо скачок.

Аналогично убеждаемся в том, что в каждой точке x_0 промежутка $\mathscr{X}$ (не служащей правым его концом) справа тоже либо имеет место непрерывность, либо скачок.

---

*) Эту функцию рассматривал Риман (B. Riemann).

**) Этот промежуток может быть как конечным, так и бесконечным замкнутым или открытым (с одного или с обеих концов).

С помощью доказанной теоремы легко установить критерий непрерывности монотонной функции, удобный на практике:

2° *Если значения монотонно возрастающей (убывающей) в промежутке $\mathscr{X}$ функции $f(x)$ содержатся в промежутке $\mathscr{Y}$ и сплошь заполняют его (так что каждое значение y из $\mathscr{Y}$ принимается функцией хоть раз), то эта функция непрерывна в $\mathscr{X}$* *).

Попробуем допустить, что в какой-нибудь точке x_0 из $\mathscr{X}$ функция $f(x)$ имеет разрыв, например, слева; как мы видели, этот разрыв может быть только скачком. В этом случае существует предел $f(x_0-0)$, но он меньше значения $f(x_0)$. Так как для $x<x_0$ будет $f(x)\leqslant f(x_0-0)$, а для $x>x_0$, очевидно, $f(x)\geqslant f(x_0)$, то функция не может принимать значений y, лежащих между числами $f(x_0-0)$ и $f(x_0)$, принадлежащими промежутку $\mathscr{Y}$. Это противоречит условию теоремы; значит, на деле функция $f(x)$ разрывов не имеет.

В следующем n° читатель найдет ряд примеров приложения этой полезной теоремы.

72. Непрерывность элементарных функций. Для ряда элементарных функций непрерывность была доказана под видом примеров в **68**. Пользуясь теоремой 2° предыдущего номера, легко, прежде всего, наново установить непрерывность функции a^x или $\sin x$.

Функция $y=a^x$ $(a>1)$ монотонно возрастает при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$. Ее значения положительны и заполняют весь промежуток $\mathscr{Y}=(0, +\infty)$, что видно из существования логарифма $x=\log_a y$ для любого $y>0$ [**20**]. Следовательно, показательная функция непрерывна при любом значении x.

Аналогично, непрерывность функции $y=\sin x$, скажем, при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, вытекает из ее монотонности в этом промежутке, да еще из того факта (устанавливаемого геометрически), что при этом она принимает каждое значение между -1 и $+1$. То же относится и к любому промежутку вида

$$\left[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Однако более интересны для нас новые результаты, которые так же легко могут быть получены применением названной теоремы. Продолжим перечисление основных элементарных функций, начатое в **68**.

5° Логарифмическая функция: $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Ограничиваясь случаем $a>1$, видим, что эта функция возрастает при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=(0, +\infty)$. К тому же она,

*) Условие, чтобы значения $f(x)$ заполняли сплошной промежуток $\mathscr{Y}$, высказано здесь, как достаточное для непрерывности монотонной функции: впоследствии [**82**] мы убедимся, что оно является и необходимым.

очевидно, принимает любое значение y из промежутка $\mathcal{Y}=(-\infty, +\infty)$, именно, для $x=a^y$. Отсюда — ее непрерывность.

6° Степенная функция: $y=x^{\mu}$ ($\mu \gtrless 0$), при возрастании x от 0 до $+\infty$ возрастает, если $\mu>0$, и убывает, если $\mu<0$. При этом она принимает любое положительное значение y (для $x=y^{\frac{1}{\mu}}$), следовательно, и она непрерывна*).

Наконец, упомянем

7° Обратные тригонометрические функции:

$$y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \quad y=\operatorname{arctg} x, \quad y=\operatorname{arcctg} x.$$

Первые две непрерывны в промежутке $[-1, +1]$, а последние — в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Доказательство предоставляем читателю.

Резюмируя, можно сказать, таким образом, что *основные элементарные функции оказываются непрерывными во всех точках, где они имеют смысл* (т. е. в соответствующих естественных областях их определения).

73. Суперпозиция непрерывных функций. Обширные классы непрерывных функций могут быть построены с помощью суперпозиции [**51**] функций, непрерывность которых уже известна.

В основе этого лежит следующая

Теорема. *Пусть функция $\varphi(y)$ определена в промежутке $\mathcal{Y}$, а функция $f(x)$ — в промежутке $\mathcal{X}$, причем значения последней функции не выходят за пределы $\mathcal{Y}$, когда x изменяется в $\mathcal{X}$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 из $\mathcal{X}$, а $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$ из $\mathcal{Y}$, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Зададимся произвольным числом $\varepsilon>0$. Так как $\varphi(y)$ непрерывна при $y=y_0$, то по ε найдется такое $\sigma>0$, что

$$\text{из } |y-y_0|<\sigma \text{ следует } |\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

С другой стороны, ввиду непрерывности $f(x)$ при $x=x_0$, по σ найдётся такое $\delta>0$, что

$$\text{из } |x-x_0|<\delta \text{ следует } |f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\sigma.$$

По самому выбору числа σ отсюда следует, далее,

$$|\varphi(f(x))-\varphi(y_0)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|<\varepsilon.$$

---

*) Если $\mu>0$, то значение 0 включается как в промежуток изменения x, так и в промежуток изменения y; при $\mu<0$ значение 0 не включается. Далее, если μ — целое число $\pm n$ или дробное $\pm\frac{p}{q}$ с нечетным знаменателем, то степень x можно рассматривать и для $x<0$; непрерывность ее для этих значений устанавливается аналогично.

Этим «на языке ε-δ» и доказана непрерывность функции $\varphi(f(x))$ в точке x_0.

Например, если степенную функцию x^μ $(x>0)$ представить в виде сложной функции:

$$x^\mu = e^{\mu \ln x},$$

которая получается от суперпозиции логарифмической и показательной функций, то из непрерывности последних двух функций уже будет вытекать непрерывность степенной функции.

74. Решение одного функционального уравнения. Для облегчения изложения в ближайшем n°, займемся сейчас следующей задачей (которая представляет и самостоятельный интерес):

Найти все непрерывные в промежутке $(-\infty, +\infty)$ функции $f(x)$, удовлетворяющие условию

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{A}$$

каковы бы ни были значения x и y.

Уравнение (А) является простейшим примером так называемых функциональных уравнений, формулирующих некое свойство искомой функции, по которому она и должна быть найдена. Наша задача состоит в разыскании всех непрерывных решений уравнения (А).

Легко видеть, что линейные однородные функции, вида

$$f(x) = cx \quad (c = \text{const.}), \tag{a}$$

удовлетворяют этому уравнению:

$$c(x+y) = cx + cy.$$

Но весь вопрос именно в том, будут ли они единственными непрерывными функциями, имеющими свойства (А).

Для того чтобы установить, что это действительно так, предположим, что некоторая непрерывная функция $f(x)$ уравнению (А) удовлетворяет, и покажем, что тогда она необходимо имеет вид (а).

Прежде всего, с помощью метода математической индукции легко обобщить соотношение (А) на случай любого числа $(=n)$ слагаемых:

$$f(\overbrace{x+y+\ldots+z}^{n}) = f(x) + f(y) + \ldots + f(z). \tag{4}$$

Действительно, если допустить верность его для какого-либо числа $n \geqslant 2$ слагаемых, то оно окажется верным и для $n+1$ слагаемых:

$$f(\overbrace{x+y+\ldots+z}^{n}+u) = f(\overbrace{x+y+\ldots+z}^{n}) + f(u) = \\ = [f(x) + \ldots + f(z)] + f(u).$$

Полагая в (4) $x = y = \ldots = z$, найдем:

$$f(nx) = n \cdot f(x). \tag{5}$$

Заменив здесь x на $\frac{1}{n}x$, мы получим

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n} \cdot f(x),$$

а затем, если подставить mx (m — натуральное) вместо x и использовать предыдущее равенство, придем к соотношению

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x) \tag{6}$$

Положим теперь в основном уравнении (А) $x=y=0$; получим

$$f(0)=2f(0), \text{ так что } f(0)=0. \qquad (7)$$

Если же взять $y=-x$, то, с учетом (7), найдем:

$$f(-x)=-f(x),$$

так что функция $f(x)$ меняет знак при изменении знака x. А тогда из (5) и (6) легко вывести:

$$f(-nx)=-f(nx)=-n\cdot f(x) \qquad (8)$$

и, аналогично, вообще

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x). \qquad (9)$$

Полученные соотношения (5) — (9) могут быть объединены в равенстве

$$f(rx)=r\cdot f(x),$$

справедливом для любого вещественного значения x, каково бы ни было рациональное число r.

Если взять здесь $x=1$ и обозначить $f(1)$ через c, то получим

$$f(r)=cr.$$

Таким образом, мы, собственно говоря, установили уже вид функции f, но пока лишь для рациональных значений аргумента. При этом мы использовали только тот факт, что функция удовлетворяет условию (А), и не опирались на ее непрерывность.

Пусть теперь ρ будет любое иррациональное значение аргумента. Легко построить стремящуюся к нему последовательность рациональных чисел

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

(можно, например, взять отрезки соответствующей бесконечной десятичной дроби). Мы только что видели, что

$$f(r_n)=cr_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Перейдем здесь к пределу при $n\to+\infty$; справа мы получим $c\rho$, слева же, именно ввиду предположенной непрерывности функции f, получится

$$\lim f(r_n)=f(\rho),$$

так что, окончательно,

$$f(\rho)=c\rho.$$

Таким образом, действительно, наша функция при всех вещественных значениях аргумента выражается формулой (а). Эта формула дает самое общее решение уравнения (А) в непрерывных функциях.

75. Функциональная характеристика показательной, логарифмической и степенной функций. 1° Если

$$f(x)=a^x \quad (a>0), \qquad (б)$$

то, каковы бы ни были два вещественных числа x и y, всегда имеет место равенство

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \qquad (Б)$$

выражающее общеизвестное правило умножения степеней:

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y.$$

Оказывается, что функциональным свойством (Б), вместе со свойством непрерывности, показательная функция определяется вполне. Точнее говоря:

единственной функцией, определенной и непрерывной во всем промежутке $(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющей в нем условию (Б), *является показательная функция* (если не считать функции, тождественно равной 0).

Иными словами, формула (б) — за указанным исключением — дает самое общее решение функционального уравнения (Б) в непрерывных функциях.

Для доказательства этого рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, определенную и непрерывную при всех x и удовлетворяющую условию (Б). Исключается тривиальный случай, когда $f(x)\equiv 0$.

Итак, при некотором значении $x=x_0$ эта функция отлична от 0. Полагая в (Б) $y=x_0-x$, получим

$$f(x)\cdot f(x_0-x)=f(x_0)\neq 0;$$

отсюда ясно, что $f(x)$ отлична от 0 при всяком x. Больше того, заменяя в (Б) x и y через $\frac{x}{2}$, найдем:

$$f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2,$$

так что $f(x)$ всегда строго положительна.

Пользуясь этим, прологарифмируем равенство (Б), например, по натуральному основанию e:

$$\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y).$$

Если положить

$$\varphi(x)=\ln f(x),$$

то в лице $\varphi(x)$ мы будем иметь функцию, непрерывную (как результат суперпозиции непрерывных функций, 73) и удовлетворяющую условию:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$

аналогичному (А). В таком случае, как мы установили, необходимо

$$\varphi(x)=\ln f(x)+cx \quad (c=\text{const.}),$$

откуда, наконец,

$$f(x)=e^{cx}=a^x$$

(если положить $a=e^c$), ч. и тр. д.

2° Если

$$f(x)=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1), \tag{в}$$

то при любых положительных значениях x и y будет

$$f(xy)=f(x)+f(y). \tag{В}$$

Это есть запись правила логарифмирования произведения:

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y.$$

И здесь — это равенство, совместно с непрерывностью, вполне характеризует именно логарифмическую функцию:

единственной функцией, определенной и непрерывной в промежутке $(0,+\infty)$ *и удовлетворяющей в нем условию* (В), *является логарифмическая функция* (за тем же исключением), так что формула (в) дает самое общее решение функционального уравнения (В), в непрерывных функциях.

Для доказательства возьмем произвольную функцию $f(x)$, непрерывную для $x>0$ и удовлетворяющую этому уравнению. Введем новую переменную ξ, изменяющуюся в промежутке $(-\infty,+\infty)$ и положим

$$x=e^\xi,\quad \varphi(\xi)=f(e^\xi),$$

откуда

$$\xi=\ln x,\quad f(x)=\varphi(\ln x).$$

Непрерывная (в силу **73**) функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию [см. (В)]

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^{\xi}\cdot e^{\eta})=f(e^{\xi})+f(e^{\eta})=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)$$

типа (А). Значит,

$$\varphi(\xi)=c\xi \text{ и } f(x)=c\cdot\ln x.$$

Если исключить случай $c=0$ (тогда $f(x)\equiv 0$), то полученный результат может быть написан и в виде

$$f(x)=\log_a x,$$

где $a=e^{\frac{1}{c}}$. Этим все доказано.

3° Наконец, обратимся к функции

$$f(x)=x^{\mu}, \tag{г}$$

которая, очевидно, удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y) \tag{Г}$$

(при любых положительных x и y), ибо

$$(xy)^{\mu}=x^{\mu}\cdot y^{\mu}.$$

Уравнение это, в соединении с непрерывностью, в данном случае также характеризует степенную функцию в том смысле, что

единственной функцией, определенной и непрерывной в промежутке $(0, +\infty)$ *и удовлетворяющей в нем условию* (Г), *является степенная функция* (за обычным исключением).

В самом деле, если дана непрерывная для $x>0$ функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (Г), то прибегнем к той же подстановке, что и в 2°. Тогда функция $\varphi(\xi)$ будет удовлетворять условию [см. (Г)]

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^{\xi}\cdot e^{\eta})=f(e^{\xi})\cdot f(e^{\eta})=\varphi(\xi)\cdot\varphi(\eta)$$

типа (Б). Мы уже знаем, что тогда (если исключить тривиальный случай)

$$\varphi(\xi)=a^{\xi}\quad(a>0).$$

Отсюда

$$f(x)=a^{\ln x}=x^{\mu}$$

(если положить $\mu=\ln a$), что и требовалось доказать.

76. Функциональная характеристика тригонометрического и гиперболического косинусов. 4° Если

$$f(x)=\cos ax \quad \text{или } \operatorname{ch} ax \ (a\geqslant 0), \tag{д}$$

то, при любых вещественных значениях x и y, удовлетворяется соотношение

$$f(y+x)+f(y-x)=2f(x)\cdot f(y). \tag{Д}$$

Это с легкостью вытекает из теоремы сложения для обоих косинусов:

$$\cos(y\pm x)=\cos x\cdot\cos y\pm\sin x\cdot\sin y,$$
$$\operatorname{ch}(y\pm x)=\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y.$$

[48, 6°]. Функциональное уравнение (Д), вместе с требованием непрерывности функции, и на этот раз полностью характеризует оба косинуса:

единственными функциями, определенными и непрерывными в промежутке $(-\infty, +\infty)$ *и удовлетворяющими в нем условию* (Д), *являются тригонометрический и гиперболический косинусы* (д) (если, как и выше, не считать функции, тождественно равной нулю).

Итак, пусть $f(x)$ будет непрерывная для всех x функция, удовлетворяющая условию (Д). Полагая $x=0$ и принимая за y какое-либо из значений, для которых $f(y)\neq 0$, заключаем, что

$$f(0)=1. \tag{10}$$

При $y=0$ в таком случае получается

$$f(-x)=f(x), \tag{11}$$

так что функция $f(x)$ оказывается четной.

Поскольку непрерывная функция $f(x)$ при $x=0$ будет положительна, то найдется такое, скажем, положительное число c, что $f(x)$ будет положительна во всем промежутке $[0, c]$. В дальнейшем исследование пойдет по разным путям в зависимости от того, будет ли (α) $f(c)\leqslant 1$ или (β) $f(c)>1$. Займемся сначала случаем (α).

Так как $0<f(c)\leqslant 1$, то найдется такое $\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, что

$$f(c)=\cos\theta. \tag{12}$$

Приведя затем основное соотношение (Д) к виду:

$$f(y+x)=2f(x)\cdot f(y)-f(y-x),$$

станем в нем последовательно полагать

$$x=c,\quad y=c;$$
$$x=c,\quad y=2c;$$
$$x=c,\quad y=3c$$

и т. д. Мы получим [с учетом (10) и (12)]

$$f(2c)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$
$$f(3c)=2\cos\theta\cdot\cos 2\theta-\cos\theta=\cos 3\theta,$$
$$f(4c)=2\cos\theta\cdot\cos 3\theta-\cos 2\theta=\cos 4\theta$$

и т. д. Пользуясь методом математической индукции, легко докажем для любого натурального m формулу

$$f(mc)=\cos m\theta. \tag{13}$$

Если же в (Д) положить $x=y=\frac{1}{2}c$, то получим [снова с учетом (10) и (12)]:

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2=\frac{f(0)+f(c)}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\left[\cos\frac{1}{2}\theta\right]^2;$$

так как $f(x)$ остается положительной между 0 и c, а функция $\cos x$ — между 0 и θ, то, извлекая положительные корни в обеих частях, придем к равенству:

$$f\left(\frac{1}{2}c\right)=\cos\frac{1}{2}\theta.$$

Совершенно так же, полагая в (Д) $x=y=\frac{1}{2^2}c$, найдем, что

$$f\left(\frac{1}{2^2}c\right)=\cos\frac{1}{2^2}\theta,$$

и т. д. Так, последовательно (математическая индукция!), получим и общее соотношение

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right)=\cos\frac{1}{2^n}\theta\quad(n=1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Наконец, повторяя тот процесс, с помощью которого мы, отправляясь от (12), пришли к (13), мы из (14) придем к равенству

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right)=\cos\frac{m}{2^n}\theta.$$

Итак, для положительных значений x вида $\frac{m}{2^n}$ имеем:

$$f(cx)=\cos\theta x. \tag{15}$$

Но так как любое положительное число x можно представить как предел значений этого вида, то, с помощью предельного перехода (и опираясь на непрерывность функций $f(x)$ и $\cos x$), установим справедливость формулы (15) для всех $x>0$. Для $x<0$ она будет верна в силу (11), а для $x=0$ — в силу (10). Если заменить в (15) x на $\frac{x}{c}$ и положить $\frac{\theta}{c}=a$, то и получим окончательно:

$$f(x)=\cos ax.$$

В случае (β) имеем: $f(c)>1$; тогда найдется такое θ, что

$$f(c)=\operatorname{ch}\theta.$$

Повторяя дословно все проведенные только-что рассуждения и опираясь на соотношения для гиперболического косинуса, совпадающие по форме с соответствующими соотношениями для тригонометрического косинуса, мы для рассматриваемого случая найдем, что

$$f(x)=\operatorname{ch}ax \qquad (a>0).$$

При $a=0$ по обеим формулам получили бы: $f(x)\equiv 1$.

Функциональные уравнения (А), (Б), (В), (Г) и (Д) впервые были рассмотрены Коши, который и дал их решения в непрерывных функциях.

77. Использование непрерывности функций для вычисления пределов. Непрерывность функций многообразно может быть использована при вычислении пределов *). Примерам этого рода мы посвящаем настоящий номер.

1) Имеем, при любом вещественном x,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

Действительно, рассматриваемое выражение (считая $x\neq 0$) можно представить в виде

$$\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x.$$

Так как $\frac{x}{n}\to 0$, то варианта в квадратных скобках стремится к e [54 (13)], а тогда — ввиду непрерывности степенной функции (здесь $x=\text{const.}$) — все выражение имеет пределом e^x.

2) Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)}-x\right\} \qquad (\infty-\infty),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ суть данные постоянные числа.

---

*) Фактически мы иной раз это делали и раньше; так, в примере 3) 56 мы попутно установили непрерывность $\sqrt[m]{x}$ при $x=1$ и использовали ее, а в примере 5) (б) так же поступили по отношению к $\cos x$ при $x=0$.

Воспользуемся тождеством

$$y-z=\frac{y^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+\ldots+z^{k-1}},$$

куда подставим

$$y=\sqrt[k]{(x+a_1)\ldots(x+a_k)} \text{ и } z=x.$$

Тогда рассматриваемое выражение представится последовательно в виде

$$\frac{(x+a_1)\ldots(x+a_k)-x^k}{\left(\sqrt[k]{\ldots}\right)^{k-1}+x\left(\sqrt[k]{\ldots}\right)^{k-2}+\ldots+x^{k+1}}=$$

$$=\frac{(a_1+\ldots+a_k)+\dfrac{a_1a_2+\ldots+a_{k-1}a_k}{x}+\ldots}{\left(\sqrt[k]{\left(1+\dfrac{a_1}{x}\right)\ldots\left(1+\dfrac{a_k}{x}\right)}\right)^{k-1}+\ldots+1}.$$

При $x\to+\infty$ подкоренное выражение стремится к 1, следовательно, сам корень имеет пределом $\sqrt[k]{1}=1$ — ввиду непрерывности корня, как частного случая степенной функции. Так как многочлен $(k-1)$-й степени (от корня), стоящий в знаменателе, также есть непрерывная функция, то знаменатель стремится к k, а предел всей дроби будет

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}.$$

3) Вернемся к предложению в **33**, 13). Пусть $a_n>0$ и $a_n\to a$; ограничимся пока допущением, что $0<a<+\infty$. Применим упомянутое предложение к последовательности $\{\ln a_n\}$.

Так как $\ln a_n\to\ln a$ (в силу непрерывности логарифмической функции), то

$$\lim\ln\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=\lim\frac{\ln a_1+\ldots+\ln a_n}{n}=\ln a.$$

В таком случае — по непрерывности показательной функции —

$$\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}=e^{\ln\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}\to e^{\ln a}=a.$$

С помощью пределов 1) и 2), **54**, этот результат распространяется и на случай $a=0$ и $a=+\infty$.

Таким образом, мы получаем следующее преобразование упомянутого предложения:

Если положительная варианта a_n имеет предел (конечный или нет), но тот же предел имеет и варианта

$$b_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}.$$

4) Применив это предложение к последовательности

$$a_1,\ \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \ldots,$$

придем к интересному следствию:

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

в предположении лишь, что существует второй из этих пределов.

Найдем для примера предел

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Полагая $a_n = \frac{n!}{n^n}$, будем иметь

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Значит, и искомый предел есть $\frac{1}{e}$.

5) Установим ряд важных пределов, которые понадобятся нам в следующей главе:

$$\text{(а)} \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a (1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\text{(б)} \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\text{(в)} \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Имеем

$$\frac{\log_a (1+\alpha)}{\alpha} = \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}};$$

так как выражение, стоящее справа под знаком логарифма, при $\alpha \to 0$ стремится к e [**54**, (13)], то (по непрерывности логарифмической функции) его логарифм стремится к $\log_a e$, ч. и тр. д.

Отметим частный случай доказанной формулы, когда речь идет о натуральном логарифме ($a = e$):

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln (1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

В простоте этого результата и коренятся, по существу, те преимущества, которые представляет натуральная система логарифмов.

Обращаясь к формуле (б), положим $a^\alpha - 1 = \beta$; тогда при $\alpha \to 0$ (по непрерывности показательной функции) и $\beta \to 0$.

Имеем, далее, $\alpha = \log_a (1+\beta)$, так что, если воспользоваться уже доказанным результатом:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\log_a (1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a, \text{ ч. и тр. д.}$$

Если, в частности, взять $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то получится интересная формула:

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a \qquad (\infty \cdot 0).$$

Наконец, для доказательства формулы (в), положим $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$; при $\alpha\to 0$ (по непрерывности степенной функции) будет и $\beta\to 0$. Логарифмируя равенство $(1+\alpha)^{\mu}=1+\beta$, получим, что

$$\mu\cdot\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta).$$

С помощью этого соотношения преобразуем данное нам выражение так:

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

По доказанному, оба отношения

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \quad \text{и} \quad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

стремятся к 1, так что все произведение имеет пределом μ, ч. и тр. д.

Предел, рассмотренный в **56**, 3), получается отсюда, как частный случай, при $\mu=r$.

78. Степенно-показательные выражения. Рассмотрим теперь степенно-показательное выражение u^v, где u и v являются функциями от одной и той же переменной x, с областью изменения $\mathscr{X}$, имеющей точку сгущения x_0; в частности, это могут быть две варианты u_n и v_n.

Пусть существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to x_0} u=a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} v=b,$$

причём $a>0$. Требуется найти предел выражения u^v.

Представим его в виде

$$u^v=e^{v\cdot\ln u}.$$

Функции v и $\ln u$ имеют пределы

$$\lim_{x\to x_0} v=b, \qquad \lim_{x\to x_0}\ln u=\ln a$$

(здесь использована непрерывность логарифмической функции), так что

$$\lim_{x\to x_0} v\ln u=b\ln a.$$

Отсюда — по непрерывности показательной функции — окончательно:

$$\lim_{x\to x_0} u^v=e^{b\cdot\ln a}=a^b.$$

Предел выражения u^v можно установить и в других случаях, когда известен предел c произведения $v\ln u$ — конечный или бесконечный. При конечном c искомый предел будет, очевидно, e^c; если же $c=-\infty$ или $+\infty$, то этот предел, соответственно, будет 0 или $+\infty$ [**54**, 1)].

Самое же определение предела $c = \lim \{v \ln u\}$ — лишь по заданным пределам a и b — возможно всегда, кроме случаев, когда это произведение (при $x \to x_0$) представляет неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Легко сообразить, что исключительные случаи отвечают таким комбинациям значений a и b:

$$a = 1, \qquad b = \pm\infty$$
$$a = 0, \qquad b = 0;$$
$$a = +\infty, \qquad b = 0.$$

В этих случаях говорят, что выражение u^v представляет неопределенность вида 1^∞, 0^0, ∞^0 *) (смотря по случаю). Для решения вопроса о пределе выражения u^v здесь мало знать лишь пределы функций u и v, а нужно непосредственно учесть з а к о н, по которому они стремятся к своим пределам.

Варианта $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, при $n \to \infty$, или более общее выражение $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, при $\alpha \to 0$, имеющие пределом e, дают пример неопределенности вида 1^∞. Выше, в **77**, 4), мы рассматривали варианту $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, представляющую неопределенность вида 0^0. Наконец, в **32**, 10), выражение $\sqrt[n]{n}$ тоже было неопределенным — вида ∞^0.

Приведем еще несколько примеров на раскрытие неопределенностей новых видов.

79. Примеры. 1) Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad (\infty^0)$.

Обозначая данное выражение через y, имеем [см. **54**, 2) и 5)]

$$\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} \to 0 \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

так что $y \to e^0 = 1$.

2) Найти $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$ $\quad (0^0)$.

Здесь [**54**, 7) и 5)]

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x = \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x \to 0,$$

следовательно, опять $y \to 1$.

3) Пример 1), **76**, легко теперь следующим образом о б о б щ и т ь: если варианта $x_n \to x$ (где x — конечное число), то

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x \qquad (1^\infty).$$

---

*) Относительно самих этих символов можно было бы повторить сказанное в сноске на стр. 62.

Для доказательства достаточно представить предложенное выражение в виде

$$\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n};$$

основание степени стремится здесь к e, показатель же — к x.

4) К этому можно привести и пример:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n=e^{\lambda x} \qquad (1^\infty).$$

Полагая выражение в скобках равным $1+\frac{x_n}{n}$, имеем

$$x_n=n\left[\cos\frac{x}{n}-1+\lambda\sin\frac{x}{n}\right]=$$

$$=\lambda x\,\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}-x\,\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\to\lambda x$$

и т. д.

5) Аналогично исчерпывается пример $(a,\ b>0)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab} \qquad (1^\infty).$$

Здесь

$$x_n=n\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right]=\frac{1}{2}\,[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)],$$

так что, на основании одного частного следствия из формулы 5) (б), **77**,

$$x_n\to\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab},$$

и искомый предел, действительно, оказывается равным $e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

6) Наконец, рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}. \qquad (1^\infty).$$

Читатель видит, что в случае неопределенности вида 1^∞ удобно приводить дело непосредственно к e.

Как уже указывалось, о б щ и е методы раскрытия неопределенностей всех видов будут даны в главе IV (§ 4).

§ 5. Свойства непрерывных функций

80. Теорема об обращении функции в нуль. Займемся теперь изучением основных свойств функции, непрерывной в некотором промежутке. Интересные и сами по себе, эти свойства в дальнейшем изложении часто будут служить основой для различных умозаключений.

Начнём со следующей простой теоремы, принадлежащей Больцано (B. Bolzano) и Коши (A. L. Cauchy).

Первая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b необходимо найдется точка c, в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c)=0 \quad (a<c<b).$$

Теорема имеет очень простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси x на другую, то она пересекает эту ось (рис. 31).

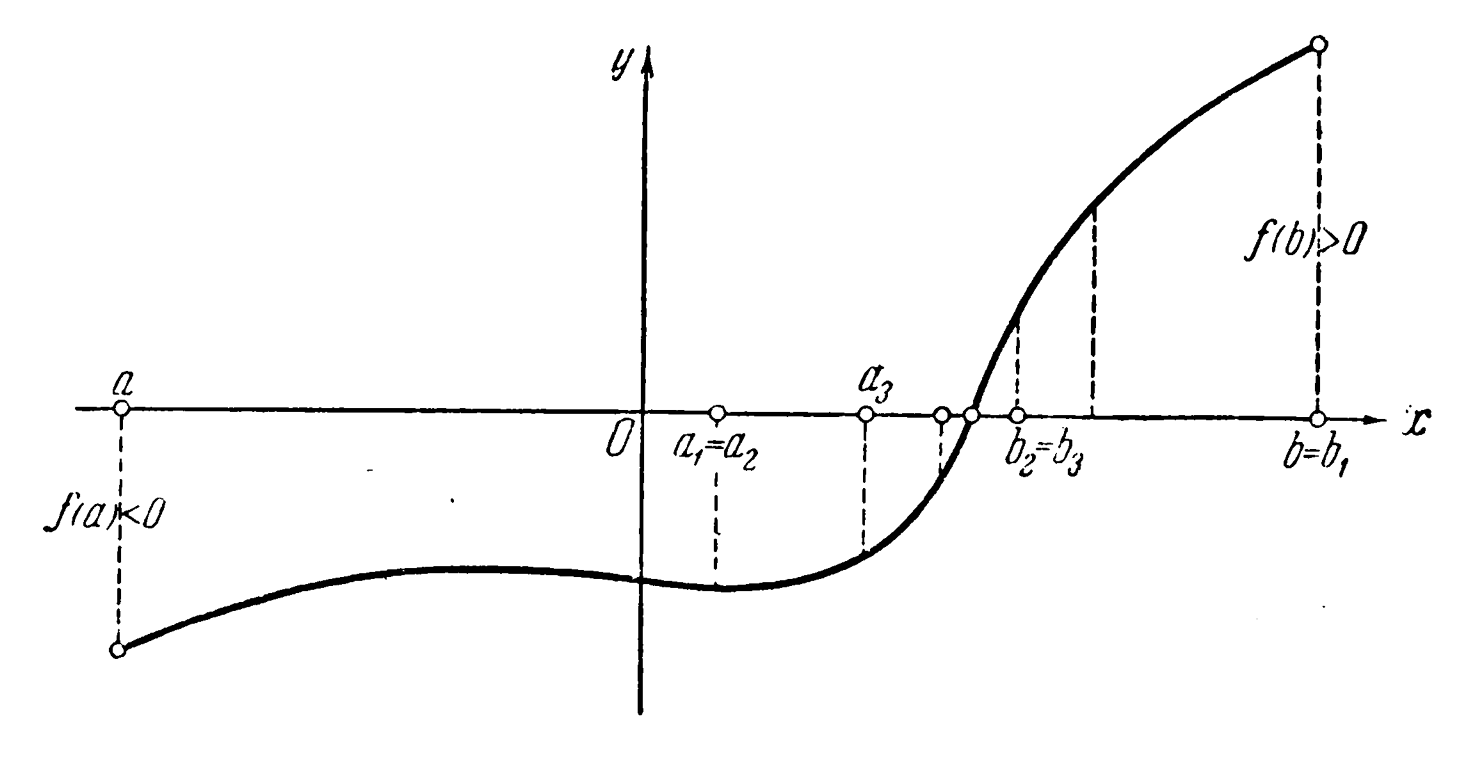


Рис. 31.

1-е доказательство мы проведем по методу Больцано [41] — последовательным делением промежутка. Для определённости положим, что $f(a)<0$, а $f(b)>0$. Разделим промежуток $[a, b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке, тогда теорема доказана: можно положить $c=\frac{a+b}{2}$. Пусть же $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$; тогда на концах одного из промежутков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ функция будет принимать значения разных знаков (и притом отрицательное значение на левом

конце и положительное — на правом). Обозначив этот промежуток через $[a_1, b_1]$, имеем

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$$

Разделим пополам промежуток $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль в середине $\frac{a_1+b_1}{2}$ этого промежутка, ибо тогда теорема доказана. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из половин промежутка, для которой

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

Продолжим этот процесс построения промежутков. При этом либо мы после конечного числа шагов наткнемся в качестве точки деления на точку, где функция обращается в нуль, — и доказательство теоремы завершится, — либо получим бесконечную последовательность вложенных один в другой промежутков. Остановимся на этом последнем случае. Тогда для n-го промежутка $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ будем иметь

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \tag{1}$$

причём длина его, очевидно, равна

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{2}$$

Построенная последовательность промежутков удовлетворяет условиям леммы о вложенных промежутках [38], ибо, ввиду (2), $\lim (b_n - a_n) = 0$; поэтому существует точка c из промежутка $[a, b]$, для которой

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

Покажем, что именно эта точка удовлетворяет требованию теоремы.

Переходя к пределу в неравенствах (1) и используя при этом непрерывность функции (в частности, в точке $x = c$), получим, что одновременно

$$f(c) = \lim f(a_n) \leqslant 0 \text{ и } f(c) = \lim f(b_n) \geqslant 0,$$

так что, действительно, $f(c) = 0$. Теорема доказана.

Мы дадим ниже второе доказательство теоремы Коши, построенное на другой идее. Предпошлем ему следующее очевидное предложение:

Лемма. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и значение $f(x_0)$ отлично от 0, то для всех достаточно близких к x_0 значений x функция $f(x)$ сохраняет тот же знак, какой она имеет в точке x_0.*

Это вытекает из утверждения 2° в **55**, I, причем в данном случае роль предела A функции (именно ввиду непрерывности) играет $f(x_0)$.

II-е доказательство. Рассмотрим все те точки $x = \bar{x}$ промежутка $[a, b]$, для которых $f(\bar{x}) < 0$. К их числу, например, относятся точка a и (в силу леммы) близлежащие к ней точки. Множество $\{\bar{x}\}$ ограничено сверху числом b. Положим теперь $c = \sup\{\bar{x}\}$ [11]; мы утверждаем, что $f(c) = 0$.

Действительно, допустим противное; тогда либо $f(c) < 0$, либо $f(c) > 0$. Если бы было $f(c) < 0$ (тогда заведомо $c < b$, ибо нам дано, что $f(b) > 0$), то — по лемме — и правее c нашлись бы значения $\bar{x}$, для которых $f(\bar{x}) < 0$, а это противоречило бы определению c, как верхней границы для $\{\bar{x}\}$. Если же было бы $f(c) > 0$, то — снова на основании леммы — имели бы $f(x) > 0$ и вблизи c слева, именно — в некотором достаточно малом промежутке $(c - \delta, c]$, а тогда там вовсе не было бы значений $\bar{x}$, что также невозможно, ибо c, по определению, есть точная верхняя граница для $\{\bar{x}\}$.

Теорема доказана.

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a, b]$ существенно: функция, имеющая разрыв хоть в одной точке, может перейти от отрицательного значения к положительному и не обращаясь в 0. Так будет, например, с функцией $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$, которая нигде не принимает значения 0, хотя $f(0) = -\frac{1}{2}$, а $f(1) = \frac{1}{2}$ (скачок при $x = 1$).

81. Применение к решению уравнений. Доказанная теорема имеет применение при решении уравнений.

Прежде всего, с ее помощью устанавливается существование корней. Например, для всех очевиден корень $x = 4$ уравнения

$$2^x = 4x,$$

но труднее заметить существование еще одного корня. А между тем, функция $f(x) = 2^x - 4x$ при $x = 0$ принимает значение $f(0) = 1 > 0$, а при $x = \frac{1}{2}$ — значение $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0$, следовательно (так как она непрерывна), обращается в 0 в некоторой точке между 0 и $\frac{1}{2}$.

Другой пример: рассмотрим, вообще, алгебраическое уравнение нечетной степени (с вещественными коэффициентами)

$$f(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

При достаточно больших по абсолютной величине значениях x многочлен имеет знак старшего члена, т. е. при положительном x — знак a_0, а при отрицательном x — обратный знак. Так как многочлен есть непрерывная функция, то, меняя знак, он в промежуточной точке необходимо обращается в 0. Отсюда: *всякое алгебраическое уравнение нечетной степени (с вещественными коэффициентами) имеет по крайней мере один вещественный корень.*

Теоремой Коши можно пользоваться не только для установления существования корня, но и для приближенного его вычисления. Поясним это примером. Пусть $f(x) = x^4 - x - 1$. Так как $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, то многочлен

имеет корень между 1 и 2. Разделим этот промежуток [1, 2] на 10 равных частей точками 1,1; 1,2; 1,3; ... и станем последовательно вычислять:

$$f(1{,}1) = -0{,}63\ \ldots;\ f(1{,}2) = -0{,}12\ \ldots;\ f(1{,}3) = +0{,}55\ \ldots;\ \ldots$$

Видим, что корень содержится между 1,2 и 1,3. Разделив и этот промежуток на 10 частей, найдем:

$$f(1{,}21) = -0{,}06\ldots;\ f(1{,}22) = -0{,}004\ldots;\ f(1{,}23) = +0{,}058\ldots;\ \ldots$$

Теперь ясно, что корень лежит между 1,22 и 1,23; таким образом, мы уже знаем значение корня с точностью до 0,01 и т. д. *).

В свете этих замечаний интересно сопоставить изложенные выше два доказательства одной и той же теоремы. Второе из них является только «доказательством существования» корня уравнения $f(x) = 0$, ничего не говоря о том, как корень найти. Первое же намечает определенный путь к реальному вычислению корня: путем последовательного деления промежутка пополам (чем мы для простоты ограничились) можно в действительности заключить искомый корень в промежуток произвольно малой длины, т. е. вычислить этот корень с произвольной степенью точности.

82. Теорема о промежуточном значении. Доказанная в **80** теорема непосредственно обобщается следующим образом:

Вторая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке $\mathscr{X}$ (замкнутом или нет, конечном или же бесконечном). Если в двух точках $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ этого промежутка функция принимает неравные значения*

$$f(a) = A \text{ и } f(b) = B,$$

то, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка $x = c$ между a и b, что

$$f(c) = C\ ^{**}).$$

Доказательство. Будем считать, например,

$$A < B, \text{ так что } A < C < B.$$

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна в промежутке $[a, b]$ и на концах его имеет разные знаки:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,\quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда, по первой теореме Больцано — Коши, между a и b найдется точка $x = c$, для которой $\varphi(c) = 0$, т. е.

$$f(c) - C = 0 \text{ или } f(c) = C,$$

ч. и тр. д.

---

*) Впрочем, практически этот путь невыгоден. В главе IV (§ 5) будут указаны гораздо более эффективные приемы.

**) Очевидно, что первая теорема Больцано — Коши есть частный случай этой: если A и B — разных знаков, то в качестве C можно взять и 0.

Мы установили, таким образом, важное свойство функции $f(x)$, непрерывной в промежутке: *переходя от одного своего значения к другому, функция хоть раз принимает, в качестве значения, каждое промежуточное число.*

Иными словами это свойство можно выразить и так: *значения, принимаемые непрерывной функцией $f(x)$, когда x изменяется в каком-либо промежутке $\mathcal{X}$, сами также заполняют сплошь некоторый промежуток $\mathcal{Y}$.*

Действительно, пусть

$$m = \inf\{f(x)\}, \quad M = \sup\{f(x)\} \quad *)$$

и y_0 есть произвольное число между m и M:

$$m < y_0 < M.$$

Необходимо найдутся значения функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ (x_1 и x_2 взяты из промежутка $\mathcal{X}$), такие, что

$$m \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant M;$$

это вытекает из самого определения точных границ числового множества. Но тогда, по доказанной теореме, существует между x_1 и x_2 такое значение $x = x_0$ (очевидно, также принадлежащее $\mathcal{X}$), что $f(x_0)$ в точности равно y_0; следовательно, это число входит в множество $\mathcal{Y}$.

Таким образом, $\mathcal{Y}$ представляет собой промежуток с концами m и M (которые сами могут ему принадлежать или нет — смотря по случаю; ср. **84**).

Мы видели в **71**, 2°, что в случае монотонной функции упомянутое свойство, обратно, влечет за собой непрерывность. Однако не следует думать, что так будет всегда; легко построить заведомо разрывные функции, которые все же этим свойством обладают. Например, значения функции [**70**, 4)]:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \; (x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

когда x изменяется в каком-либо промежутке, содержащем точку разрыва $x = 0$, заполняют сплошь промежуток $[-1, +1]$.

83. Существование обратной функции. Применим изученные в предыдущем n° свойства непрерывной функции к установлению, при некоторых предположениях, существования однозначной обратной функции и ее непрерывности [ср. **49**].

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) **) и непрерывна в некотором промежутке $\mathcal{X}$.*

---

*) Напоминаем читателю, что если множество $\{f(x)\}$ не ограничено сверху (снизу), то мы условились в **11** полагать $M = +\infty$ ($m = -\infty$).

**) В строгом смысле слова (это здесь существенно).

Тогда в соответствующем промежутке $\mathcal{Y}$ значений этой функции существует однозначная обратная функция $x=g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей функции. Мы видели выше, что значения непрерывной функции $f(x)$ заполняют сплошь некоторый промежуток $\mathcal{Y}$, так что для каждого значения y_0 из этого промежутка найдется хоть одно такое значение x_0 (из $\mathcal{X}$), что

$$f(x_0)=y_0.$$

Но ввиду монотонности этой функции такое значение может найтись только одно: если $x_1 >$ или $< x_0$, то, соответственно, и $f(x_1) >$ или $< f(x_0)$.

Сопоставляя именно это значение x_0 произвольно взятому y_0 из $\mathcal{Y}$, мы получим однозначную функцию

$$x=g(y),$$

обратную для функции $y=f(x)$.

Легко видеть, что эта функция $g(y)$, подобно $f(x)$, также монотонно возрастает. Пусть

$$y' < y'' \text{ и } x'=g(y'),\ x''=g(y'');$$

тогда, по самому определению функции $g(y)$, одновременно

$$y'=f(x') \text{ и } y''=f(x'').$$

Если бы было $x' > x''$, то, в силу возрастания функции $f(x)$, было бы и $y' > y''$, что противоречит условию. Не может быть и $x'=x''$, ибо тогда было бы и $y'=y''$, что также противоречит условию. Итак, возможно только неравенство $x' < x''$, так что $g(y)$, действительно, возрастает.

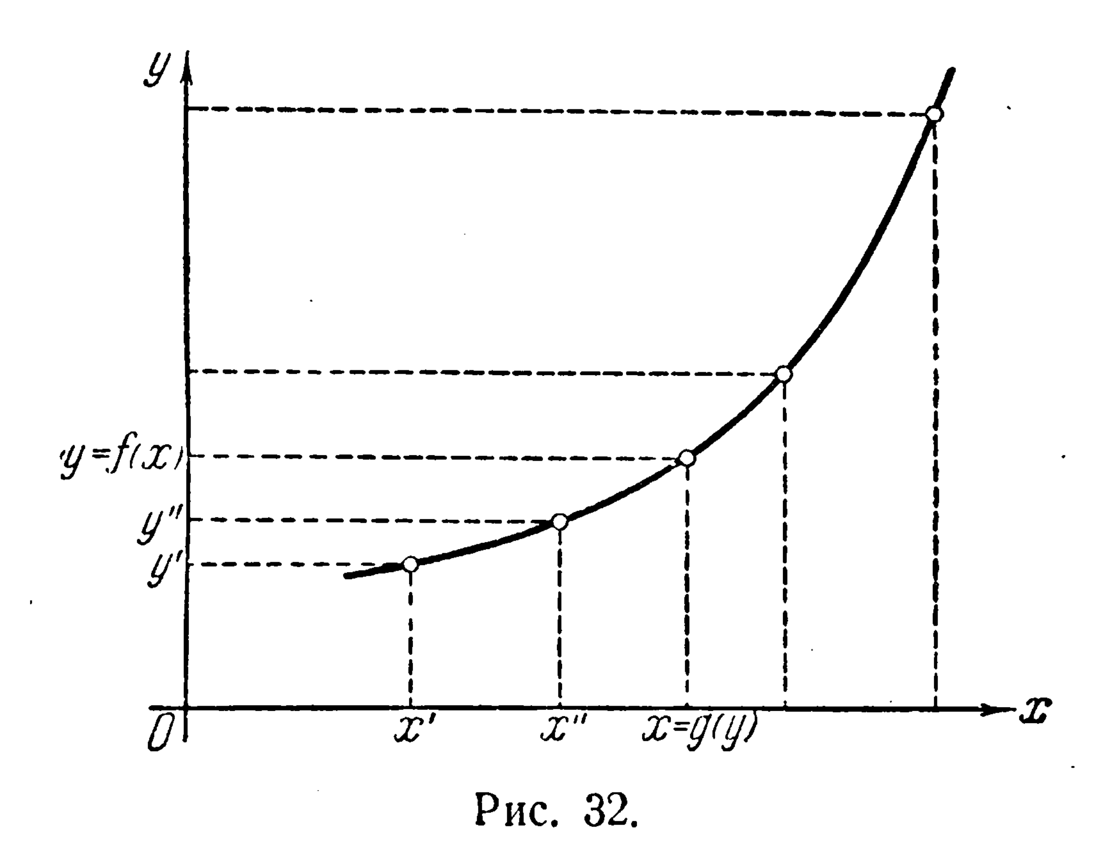


Рис. 32.

Наконец, чтобы доказать непрерывность функции $x=g(y)$, достаточно сослаться на теорему в **71**, 2°, условия которой выполнены: названная функция монотонна, и ее значения, очевидно, заполняют сплошь промежуток $\mathcal{X}$*).

Все утверждения теоремы геометрически очевидны, их легко «прочитать» по рис. 32.

---

*) Какое бы x из $\mathcal{X}$ ни взять, стоит лишь положить $y=f(x)$, чтобы для этого y функция $g(y)$ имела своим значением именно взятое x.

С помощью доказанной теоремы можно наново установить ряд уже известных нам результатов.

Если применить ее к функции x^n (n — натуральное число) в промежутке $\mathscr{X}=[0, +\infty)$, то придем к существованию и непрерывности (арифметического) корня $x=\sqrt[n]{y}$ для y в $\mathscr{Y}=[0, +\infty)$. Исходя из функции $y=a^x$ в промежутке $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$, докажем существование и непрерывность логарифма $x=\log_a y$ в промежутке $\mathscr{Y}=(0, +\infty)$. Наконец, рассматривая функции $y=\sin x$ и $y=\operatorname{tg} x$, первую — в промежутке $\mathscr{X}_1=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а вторую — в открытом промежутке $\mathscr{X}_2=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, убедимся в существовании и непрерывности обратных им функций $x=\arcsin y$ и $x=\operatorname{arctg} y$, соответственно, в промежутках $\mathscr{Y}_1=[-1, +1]$ и $\mathscr{Y}_2=(-\infty, +\infty)$.

[При этом предполагается, что предварительно уже доказана непрерывность функций x^n, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ — без ссылки на с у щ е с т в о в а н и е обратных им функций (иначе получился бы порочный круг). Такие доказательства и были даны в **68**; соображения же n° **72**, очевидно здесь непригодны.]

Рассмотрим еще такой пример.

Пусть для x в $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$

$$y=x-\varepsilon\cdot\sin x, \text{ где } 0<\varepsilon<1. \tag{3}$$

Легко показать, что эта функция будет монотонно возрастающей (в узком смысле). Именно, если $x''>x'$ и y', y'' — соответствующие значения y, то

$$y''-y'=(x''-x')-\varepsilon(\sin x''-\sin x').$$

Но [см. (2), **68**]

$$|\sin x''-\sin x'|\leqslant x''-x',$$

откуда и следует, что

$$y''-y'>0, \text{ т. е. } y''>y'.$$

Применив к этому случаю теорему, убеждаемся в том, что и x является о д н о з н а ч н о й функцией от y, и т. д.

Приведенный пример представляет интерес тем, что соприкасается с одной задачей теоретической астрономии. Уравнение

$$E=M+\varepsilon\cdot\sin E \tag{3a}$$

есть знаменитое *уравнение К е п л е р а*, которое связывает с р е д н ю ю а н о м а л и ю M планеты с ее эксцентрической аномалией E (ε есть эксцентриситет планетной орбиты). Мы доказали, таким образом, что, каково бы ни было значение средней аномалии, уравнение К е п л е р а, действительно, однозначно определяет значение эксцентрической аномалии.

84. Теорема об ограниченности функции. Если функция $f(x)$ определена (следовательно, принимает к о н е ч н ы е значения) для всех значений x в некотором конечном промежутке, то это не влечёт за собой с необходимостью о г р а н и ч е н н о с т и функции,

т. е. ограниченности множества $\{f(x)\}$. принимаемых ею значений. Например, пусть функция $f(x)$ определена так:

$$f(x)=\frac{1}{x}, \text{ если } 0<x\leqslant 1, \text{ и } f(0)=0.$$

Функция эта принимает только конечные значения, но она не ограничена, ибо при приближении x к 0 может принимать сколь угодно большие значения. Заметим попутно, что в полуоткрытом промежутке $(0, 1]$ она непрерывна, но в точке $x=0$ имеет разрыв.

Иначе обстоит дело с функциями, непрерывными в замкнутом промежутке.

Первая теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена, т. е. существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что*

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \text{ при } a\leqslant x\leqslant b.$$

Доказательство поведем от противного: допустим, что функция $f(x)$ при изменении x в промежутке $[a, b]$ оказывается неограниченной.

В таком случае для каждого натурального числа n найдется в промежутке $[a, b]$ такое значение $x=x_n$, что

$$|f(x_n)|\geqslant n. \tag{4}$$

По лемме Больцано — Вейерштрасса [41], из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу:

$$x_{n_k}\to x_0 \quad (\text{при } k\to+\infty),$$

причем, очевидно, $a\leqslant x_0\leqslant b$. Вследствие непрерывности функции в точке x_0, тогда должно быть и

$$f(x_{n_k})\to f(x_0),$$

а это невозможно, так как из (4) следует, что

$$|f(x_{n_k})|\to\infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

85. Наибольшее и наименьшее значения функции. Мы знаем, что бесконечное числовое множество, даже ограниченное, может не иметь в своем составе наибольшего (наименьшего) элемента. Если функция $f(x)$ определена и даже ограничена в некотором промежутке изменения x, то в составе множества ее значений $\{f(x)\}$ может не оказаться наибольшего (наименьшего). В этом случае точная верхняя (нижняя) граница значений функции $f(x)$

не достигается в названном промежутке. Так будет обстоять дело, например, с функцией

$$f(x) = x - E(x)$$

(график ее представлен на рис. 33). При изменении x в любом промежутке $[0, b]$ ($b \geqslant 1$), точной верхней границей значений функции будет 1, но она не достигается, так что наибольшего значения функция не имеет.

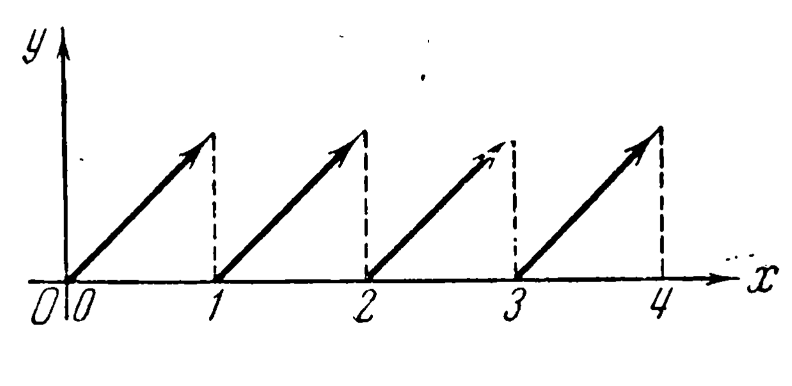


Рис. 33.

Читателю, вероятно, ясна связь этого обстоятельства с наличием у рассматриваемой функции разрывов при натуральных значениях x. Действительно, для непрерывных в замкнутом промежутке функций имеет место:

Вторая теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$, определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней границ.*

Иными словами, *в промежутке $[a, b]$ найдутся такие точки $x = x_0$ и $x = x_1$, что значения $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будут, соответственно, наибольшим и наименьшим из всех значений функции $f(x)$.*

1-е доказательство. Положим

$$M = \sup\{f(x)\};$$

по предыдущей теореме, это число — конечное. Предположим (вопреки тому, что нужно доказать), что всегда $f(x) < M$, т. е. что граница M не достигается. В таком случае, можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Так как, по предположению, знаменатель здесь в нуль не обращается, то эта функция будет непрерывна, а следовательно (по предыдущей теореме) ограничена: $\varphi(x) \leqslant \mu$ ($\mu > 0$). Но отсюда легко получить, что тогда

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu},$$

т. е. число $M - \frac{1}{\mu}$, меньшее, чем M, оказывается верхней границей для множества значений функции $f(x)$, чего быть не может, ибо M есть точная верхняя граница этого множества. Полученное противоречие доказывает теорему: в промежутке $[a, b]$ найдётся такое значение x_0, что $f(x_0) = M$ будет наибольшим из всех значений $f(x)$.

Аналогично может быть доказано утверждение и относительно наименьшего значения.

II-е доказательство. Можно и здесь исходить из леммы Больцано — Вейерштрасса [41]. Ограничимся утверждением о наибольшем значении. Если, как и только что,

$$M = \sup\{f(x)\},$$

то по свойству точной верхней границы [11], для любого n найдется такое $x = x_n$ в $[a, b]$, что

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \qquad (5)$$

Тогда из последовательности $\{x_n\}$ может быть извлечена частичная последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому значению x_0 из $[a, b]$: $x_{n_k} \to x_0$, так что, ввиду непрерывности функции, и

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0).$$

В то же время из (5) имеем

$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k} \text{ и, в пределе, } f(x_0) \geqslant M.$$

Но $f(x_0)$ не может быть больше верхней границы M множества значений функции и, следовательно,

$$f(x_0) = M,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что оба приведенные доказательства суть чистые «доказательства существования». Средств для вычисления, например, значения $x = x_0$ никаких не дано. Впоследствии [в главе IV, § 1], правда, при более тяжелых предположениях относительно функции, мы научимся фактически находить значения независимой переменной, доставляющие функции наибольшее или наименьшее значения.

Если функция $f(x)$, при изменении x в каком-либо промежутке $\mathscr{X}$, ограничена, то ее колебанием в этом промежутке называется разность

$$\omega = M - m.$$

Иначе можно определить колебание ω как точную верхнюю границу множества всевозможных разностей $f(x'') - f(x')$, где x' и x'' принимают независимо одно от другого произвольные значения в промежутке $\mathscr{X}$:

$$\omega = \sup_{x',\, x'' \text{ из } \mathscr{X}} \{f(x'') - f(x')\}.$$

Когда речь идет о непрерывной функции $f(x)$ в замкнутом конечном промежутке $\mathscr{X} = [a, b]$, то, как следует из доказанной теоремы, колебанием будет попросту разность между

наибольшим и наименьшим значениями функции в этом промежутке.

В этом случае промежуток $\mathcal{Y}$ значений функции есть замкнутый промежуток $[m, M]$, и колебание дает его длину.

86. Понятие равномерной непрерывности. Если функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathcal{X}$ (замкнутом или нет, конечном или бесконечном) и непрерывна в точке x_0 этого промежутка, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

или [«на языке ε-δ», 66]: *для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что*

$$|x - x_0| < \delta \text{ влечет за собой } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке $\mathcal{X}$, т. е. непрерывна в каждой точке x_0 этого промежутка. Тогда для каждой точки x_0 из $\mathcal{X}$ в отдельности по заданному ε найдется δ, соответствующее ему в упомянутом выше смысле. При изменении x_0 в пределах $\mathcal{X}$, даже если ε неизменно, число δ, вообще говоря, будет меняться. Одного взгляда на рис. 34 достаточно, чтобы убедиться в том, что число δ, пригодное на участке, где функция изменяется медленно (график представляет пологую кривую), может оказаться слишком большим для участка быстрого изменения функции (где график круто поднимается или опускается). Иными словами, *число* δ *вообще зависит не только от* ε, *но и от* x_0.

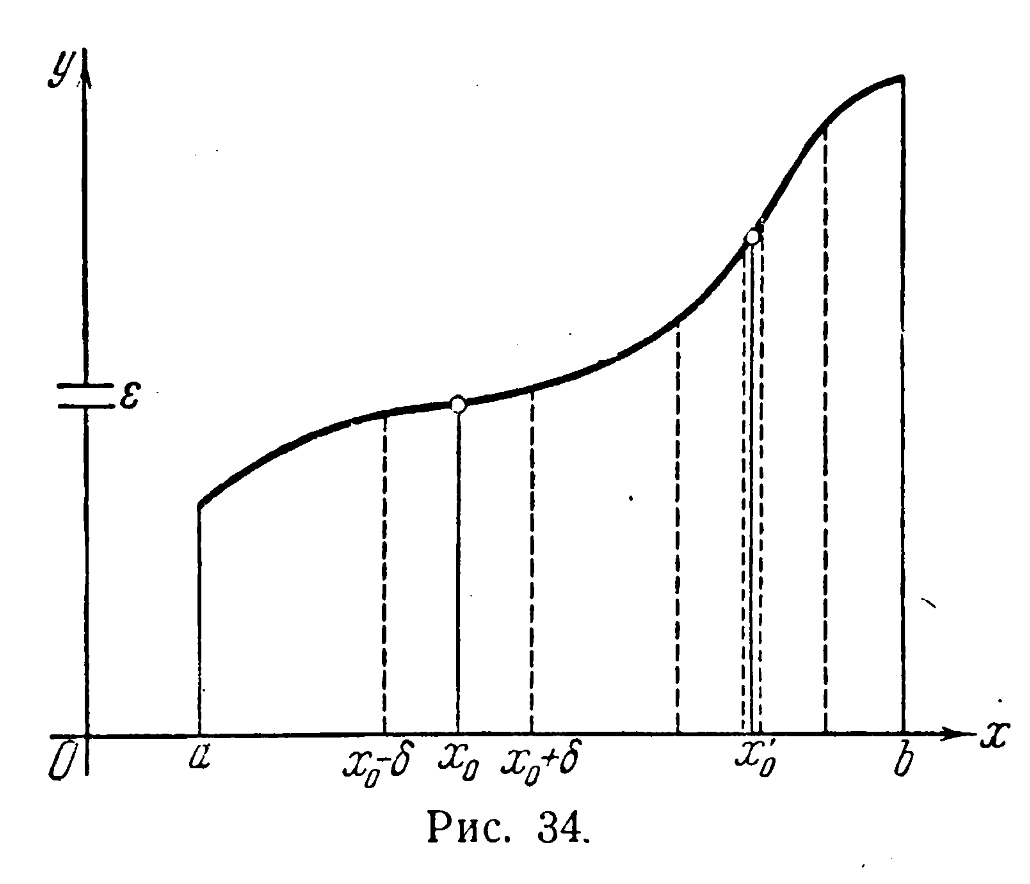


Рис. 34.

Если бы речь шла о конечном числе значений x_0 (при неизменном ε), то из конечного числа соответствующих им чисел δ можно было бы выбрать наименьшее, и это последнее годилось бы, очевидно, и для всех рассматриваемых точек x_0 одновременно.

Но по отношению к бесконечному множеству значений x_0, содержащихся в промежутке $\mathcal{X}$, так уже рассуждать нельзя: им (при постоянном ε) соответствует бесконечное множество чисел δ, среди которых могут найтись и сколь угодно малые. Таким образом, по отношению к функции $f(x)$, непрерывной в промежутке $\mathcal{X}$, встает

вопрос: существует ли, при заданном ε, такое δ, которое годилось бы для всех точек x_0 из этого промежутка?

Если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что

$$|x-x_0|<\delta \text{ влечет за собой } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

где бы в пределах рассматриваемого промежутка $\mathscr{X}$ ни лежали точки x_0 и x, то функцию $f(x)$ называют равномерно непрерывной в промежутке $\mathscr{X}$.

В этом случае число δ оказывается зависящим только от ε и может быть указано до выбора точки x_0: δ годится для всех x_0 одновременно.

Равномерная непрерывность означает, что во всех частях промежутка достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Можно показать на примере, что непрерывность функции во всех точках промежутка не влечет необходимо за собой ее равномерной непрерывности в этом промежутке. Пусть, например, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ для x, содержащихся между 0 и $\frac{2}{\pi}$, исключая 0. В этом случае область изменения x есть незамкнутый промежуток $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, и в каждой его точке функция непрерывна. Положим теперь $x_0=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x=\frac{1}{n\pi}$ (где n — любое натуральное число); тогда

$$f(x_0)=\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}=\pm 1, \quad f(x)=\sin n\pi=0,$$

так что

$$|f(x)-f(x_0)|=1,$$

несмотря на то, что $|x-x_0|=\frac{1}{n(2n+1)\pi}$ с возрастанием n может быть сделано сколь угодно малым. Здесь при $\varepsilon=1$ нельзя найти δ, которое годилось бы одновременно для всех точек x_0 в $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, хотя для каждого отдельного значения x_0, ввиду непрерывности функции, такое δ существует!

Весьма замечательно, что в замкнутом промежутке $[a, b]$ аналогичного положения вещей быть уже не может, как явствует из следующей теоремы, принадлежащей Кантору (G. Cantor).

87. Теорема Кантора. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна в этом промежутке.*

Доказательство поведем от противного. Пусть для некоторого определенного числа $\varepsilon>0$ не существует такого числа

$\delta>0$, о котором идет речь в определении равномерной непрерывности. В таком случае, какое бы число $\delta>0$ ни взять, найдутся в промежутке $[a, b]$ такие два значения x_0' и x', что

$$|x'-x_0'|<\delta, \text{ и тем не менее } |f(x')-f(x_0')|\geqslant\varepsilon.$$

Возьмем теперь последовательность $\{\delta_n\}$ положительных чисел так, что $\delta_n\to 0$.

В силу сказанного, для каждого δ_n найдутся в $[a, b]$ значения $x_0^{(n)}$ и $x^{(n)}$ (они играют роль x_0' и x'), такие, что (при $n=1, 2, 3, \ldots$)

$$|x^{(n)}-x_0^{(n)}|<\delta_n, \text{ и тем не менее } |f(x^{(n)})-f(x_0^{(n)})|\geqslant\varepsilon.$$

По лемме Больцано — Вейерштрасса [41] из ограниченной последовательности $\{x^{(n)}\}$ можно извлечь частичную последовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0 промежутка $[a, b]$. Для того чтобы не осложнять обозначений, будем считать, что уже сама последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится к x_0.

Так как $x^{(n)}-x_0^{(n)}\to 0$ (ибо $|x^{(n)}-x_0^{(n)}|<\delta_n$, а $\delta_n\to 0$), то одновременно и последовательность $\{x_0^{(n)}\}$ сходится к x_0. Тогда, ввиду непрерывности функции в точке x_0, должно быть

$$f(x^{(n)})\to f(x_0) \text{ и } f(x_0^{(n)})\to f(x_0),$$

так что

$$f(x^{(n)})-f(x_0^{(n)})\to 0,$$

а это противоречит тому, что при всех значениях n

$$|f(x^{(n)})-f(x_0^{(n)})|\geqslant\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает такое следствие, которое ниже будет нам полезно:

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$. Тогда по заданному $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что если промежуток произвольно разбить на частичные промежутки с длинами, меньшими δ, то в каждом из них колебание функции $f(x)$ будет меньше ε.*

Действительно, если, по заданному ε, в качестве δ взять число, о котором говорится в определении равномерной непрерывности, то в частичном промежутке с длиной, меньшей δ, разность между любыми двумя значениями функции будет по абсолютной величине меньше ε. В частности, это справедливо и относительно наибольшего и наименьшего из этих значений, разность которых и дает колебание функции в упомянутом частичном промежутке [85].

88. Лемма Бореля. Мы докажем сейчас одно интересное вспомогательное утверждение, которое — подобно лемме Больцано —

Вейерштрасса — может быть полезно при проведении многих тонких рассуждений; оно принадлежит Борелю (E. Borel).

Рассмотрим, наряду с промежутком $[a, b]$, еще некоторую систему $\sum$ открытых промежутков σ, которая может быть как конечной, так и бесконечной. Условимся говорить, что система $\sum$ покрывает промежуток $[a, b]$ (или что этот промежуток покрывается системой $\sum$, и т. п.), если для каждой точки x промежутка $[a, b]$ найдется в $\sum$ промежуток σ, содержащий ее. Этот способ речи облегчит нам формулировку и доказательство упомянутого утверждения.

Лемма Бореля. *Если замкнутый промежуток $[a, b]$ покрывается бесконечной системой $\sum = \{\sigma\}$ открытых промежутков, то из неё всегда можно выделить конечную подсистему*

$$\sum{}^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\},$$

которая также покрывает весь промежуток $[a, b]$.

1-е доказательство поведем от противного, применив метод Больцано [41]. Допустим же, что промежуток $[a, b]$ не может быть покрыт конечным числом промежутков σ из $\sum$. Разделим промежуток $[a, b]$ пополам. Тогда хоть одна из половин его тоже не может быть покрыта конечным числом σ; действительно, если бы одна из них могла быть покрыта промежутками $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ (из $\sum$), а другая — промежутками $\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots, \sigma_n$ (из $\sum$), то из всех этих промежутков составилась бы конечная система $\sum^*$, покрывающая уже весь промежуток $[a, b]$, вопреки допущению. Обозначим через $[a_1, b_1]$ ту половину промежутка, которая не покрывается конечным числом σ (если же обе таковы, то — любую из них). Этот промежуток снова разделим пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из его половин, которую нельзя покрыть конечным числом σ, и т. д.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим бесконечную последовательность вложенных промежутков $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, каждый из которых составляет половину предшествующего. Промежутки эти все выбираются так, что ни один из них не покрывается конечным числом промежутков σ. По лемме о вложенных промежутках [38], существует общая им всем точка c, к которой стремятся концы a_n, b_n.

Эта точка c, как и всякая точка промежутка $[a, b]$, лежит в одном из промежутков σ, скажем в $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$, так что $\alpha < c < \beta$. Но варианты a_n и b_n, стремящиеся к c, начиная с некоторого номера будут сами содержаться между α и β [26, 1°], так что определяемый ими промежуток $[a_n, b_n]$ окажется покрытым всего лишь одним промежутком σ_0, вопреки самому выбору этих промежутков $[a_n, b_n]$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Приведем еще одно доказательство, построенное на новой идее; она принадлежит Лебегу (H. Lebesgue).

II-е доказательство. Рассмотрим точки x^* промежутка $[a, b]$, обладающие тем свойством, что промежуток $[a, x^*]$ покрывается конечным числом промежутков σ. Такие точки x^*, вообще, найдутся: так как, например, точка a лежит в одном из σ, то и все близлежащие к ней точки содержатся в этом σ и, следовательно, оказываются точками x^*.

Нашей задачей является установить, что и точка b принадлежит к числу точек x^*.

Так как все $x^* \leqslant b$, то существует [11] и

$$\sup\{x^*\} = c \leqslant b.$$

Как и всякая точка промежутка $[a, b]$, c принадлежит некоторому $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$, $\alpha < c < \beta$. Но, по свойству точной верхней границы, найдется x_0^*, такое, что $\alpha < x_0^* \leqslant c$. Промежуток $[a, x_0^*]$ покрывается конечным числом промежутков σ (по самому определению точек x^*); если к этим промежуткам присоединить еще лишь один промежуток σ_0, то покроется и весь промежуток $[a, c]$, так что c есть одна из точек x^*.

Вместе с тем, ясно, что c не может быть $< b$, ибо иначе между c и β нашлись бы еще точки x^*, вопреки определению числа c как верхней границы всех x^*. Таким образом, необходимо $b = c$; значит b есть одно из x^*, т. е. промежуток $[a, b]$ покрывается конечным числом промежутков σ, ч. и тр. д.

Заметим, что для справедливости заключения леммы в равной мере существенно как предположение о замкнутости основного промежутка $[a, b]$, так и предположение о том, что промежутки σ, составляющие систему $\sum$, — открытые. Например, система открытых промежутков

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots$$

покрывает промежуток $(0, 1]$, но из них нельзя выделить конечной подсистемы с тем же свойством. Аналогично, система замкнутых промежутков

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right], \ldots \text{ и } [1, 2]$$

покрывает промежуток $[0, 2]$, но и здесь выделение конечной подсистемы невозможно.

89. Новые доказательства основных теорем. Покажем теперь, как лемма Бореля может быть использована для доказательства основных теорем о непрерывных функциях Больцано—Коши, Вейерштрасса и Кантора.

1° *1-я теорема Больцано—Коши* [**80**]. На этот раз доказывать ее будем от противного. Допустим, что — при соблюдении предположения

теоремы — все же ни в одной точке функция $f(x)$ не обращается в нуль. Тогда, по лемме n° **80**, к а ж д у ю точку x' промежутка $[a, b]$ можно окружить такой окрестностью $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$, что в ее пределах*) $f(x)$ сохраняет определённый знак.

Бесконечная система $\sum = \{\sigma\}$ этих окрестностей покрывает, таким образом, весь данный промежуток $[a, b]$. Тогда, по лемме Б о р е л я, для этого оказывается достаточно уже к о н е ч н о г о числа упомянутых окрестностей, образующих систему $\sum^*$.

Левый конец a нашего промежутка принадлежит одной из окрестностей этой системы $\sum^*$, скажем, окрестности $\sigma_1 = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$.

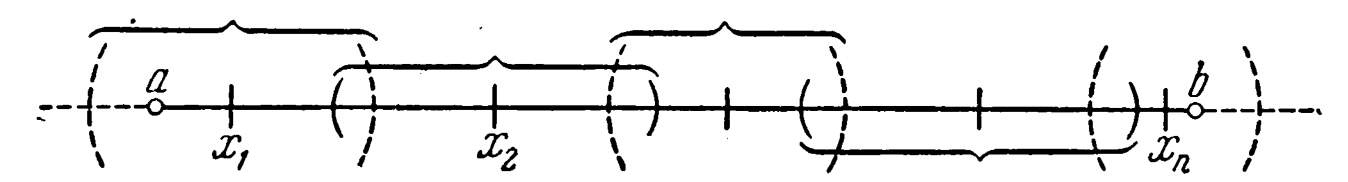


Рис. 35.

Ее правый конец $x_1 + \delta_1$, в свою очередь, принадлежит окрестности $\sigma_2 = (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ из $\sum^*$, точка $x_2 + \delta_2$ содержится в окрестности $\sigma_3 = (x_3 - \delta_3, x_3 + \delta_3)$ из $\sum^*$, и т. д. (рис. 35). После конечного числа шагов, передвигаясь направо, мы придем к окрестности $\sigma_n = (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$ из $\sum^*$, заключающей в себе уже правый конец b данного промежутка. Если бы $\sum^*$ содержала еще какие-либо другие промежутки, кроме

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \tag{6}$$

то их, очевидно, можно было бы просто опустить.

В окрестности σ_1 функция $f(x)$ сохраняет определенный знак, именно, знак $f(a)$. Но и в σ_2 функция имеет определенный знак, который должен тоже совпадать со знаком $f(a)$, п о с к о л ь к у σ_1 и σ_2 в з а и м н о н а л е г а ю т. Так же убеждаемся в том, что тот же знак функция сохраняет и в следующей по порядку окрестности σ_3, н а л е г а ю щ е й на σ_2, и т. д. В конце концов, придем к заключению, что и в последней окрестности σ_n функция имеет знак $f(a)$, так что и $f(b)$ совпадает по знаку с $f(a)$, а это уж противоречит предположению. Теорема доказана.

2° 1-*я теорема В е й е р ш т р а с с а* [**84**]. Ввиду непрерывности функции $f(x)$, какую бы точку x' промежутка $[a, b]$ ни взять, задавшись числом $\varepsilon > 0$, можно окружить эту точку столь малой окрестностью $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$, чтобы для всех принадлежащих ей значений x выполнялись неравенства

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

или

$$f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon.$$

*) То есть в общей части этой окрестности и промежутка $[a, b]$, в котором x только и может изменяться.

Таким образом, в пределах каждой такой окрестности функция $f(x)$ заведомо ограничена: снизу — числом $f(x')-\varepsilon$, а сверху — числом $f(x')+\varepsilon$.

Читателю ясно, что и здесь к бесконечной системе $\sum$ окрестностей, обладающих указанным свойством, надлежит применить лемму Бореля. Из нее следует, что найдется в $\sum$ конечное число окрестностей (6), также в совокупности покрывающих весь промежуток $[a, b]$. Если

$$m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1 \text{ в } \sigma_1,$$
$$m_2 \leqslant f(x) \leqslant M_2 \text{ в } \sigma_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$m_n \leqslant f(x) \leqslant M_n \text{ в } \sigma_n,$$

то, взяв в качестве m наименьшее из чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$, а в качестве M — наибольшее из чисел $M_1, M_2, \dots, M_n$, очевидно, будем иметь

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

во всем промежутке $[a, b]$, ч. и тр. д.

3°. ***Теорема Кантора*** [87]. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. На этот раз каждую точку x' промежутка $[a, b]$ окружим такой окрестностью $\sigma' = (x'-\delta', x'+\delta')$, чтобы в ее пределах выполнялось неравенство

$$|f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если x_0 также есть точка этой окрестности, то одновременно и

$$|f(x')-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любых точек x и x_0 из σ' будем иметь

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Стянем каждую окрестность σ' вдвое, сохраняя ее центр, т. е. вместо σ' рассмотрим окрестность

$$\overline{\sigma'} = \left(x' - \frac{\delta'}{2},\ x' + \frac{\delta'}{2}\right).$$

Из этих окрестностей также составится система $\overline{\sum}$, покрывающая промежуток $[a, b]$, и именно к ней мы применим лемму Бореля. Промежуток $[a, b]$ покроется конечным числом промежутков из $\overline{\sum}$:

$$\overline{\sigma}_i = \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Пусть теперь δ будет наименьшим из всех чисел $\frac{\delta_i}{2}$, и x_0, x — любые две точки нашего промежутка, удовлетворяющие условию:

$$|x-x_0| < \delta. \tag{7}$$

Точка x_0 должна принадлежать одной из выделенных окрестностей, например, окрестности

$$\bar{\sigma}_{i_0} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right),$$

так что $|x_0 - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$.

Так как $\delta \leqslant \frac{\delta_{i_0}}{2}$, то, ввиду (7), $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$, откуда $|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}$, т. е. точка x (а подавно — и точка x_0) принадлежит той первоначально взятой окрестности

$$(x_{i_0} - \delta_{i_0},\ x_{i_0} + \delta_{i_0}),$$

стягиванием которой получена окрестность $\bar{\sigma}_{i_0}$. В таком случае, по свойству всех первоначально взятых окрестностей,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Поскольку δ было выбрано вне зависимости от положения точки x_0, равномерная непрерывность функции $f(x)$ доказана.

Как видно из приведенных рассуждений, лемма Бореля с успехом прилагается в тех случаях, когда «локальное» свойство, связанное с окрестностью отдельной точки, подлежит распространению на весь рассматриваемый промежуток.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 1. Производная и ее вычисление

90. Задача о вычислении скорости движущейся точки. Начнем с частного примера, именно, рассмотрим свободное падение (в пустоте — чтобы не учитывать сопротивления воздуха) тяжелой материальной точки.

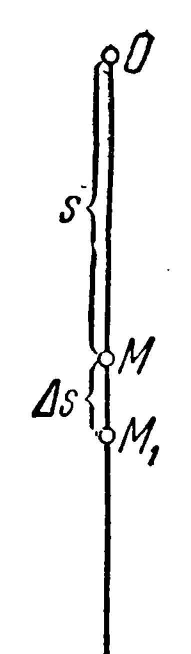


Рис. 36.

Если время t (сек.) отсчитывается от начала падения, то пройденный за это время путь s (*м*), по известной формуле, выразится так:

$$s=\frac{g}{2}t^2, \qquad (1)$$

где $g=9{,}81\left(\frac{м}{сек^2}\right)$. Исходя из этого, *требуется определить скорость v движения точки в данный момент t*, когда точка находится в положении M (рис. 36).

Придадим переменной t некоторое приращение Δt и рассмотрим момент $t+\Delta t$, когда точка будет в положении M_1. Приращение MM_1 пути за промежуток времени Δt обозначим через Δs. Подставляя в (1) $t+\Delta t$ вместо t, получим для нового значения пути выражение

$$s+\Delta s=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2,$$

откуда

$$\Delta s=\frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t+\Delta t^2).$$

Разделив Δs на Δt, мы получим среднюю скорость падения точки на участке MM_1:

$$v_{ср.}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t.$$

Как видим, эта скорость меняется вместе с изменением Δt, тем лучше характеризуя состояние падающей точки в момент t, чем меньше промежуток Δt, протекший после этого момента.

Скоростью v точки в момент времени t называют предел, к которому стремится средняя скорость $v_{ср.}$ за промежуток Δt, когда Δt стремится к 0.

В нашем случае, очевидно,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t\right) = gt.$$

Аналогично вычисляется скорость v и в общем случае прямолинейного движения точки. Положение точки определяется ее расстоянием s, отсчитываемым от некоторой начальной точки O; это расстояние и называется пройденным путем. Время t отсчитывается от некоторого начального момента, причем не обязательно, чтобы в этот момент точка находилась в O. Движение считается вполне заданным, когда известно уравнение движения: $s = f(t)$, из которого положение точки определяется для любого момента времени; в рассмотренном примере такую роль играло уравнение (1).

Для определения скорости v в данный момент t пришлось бы, как и выше, придать t приращение Δt; этому отвечает увеличение пути s на Δs. Отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

выразит среднюю скорость $v_{ср.}$ за промежуток Δt. Истинная же скорость v в момент t получится отсюда предельным переходом:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Мы рассмотрим ниже другую важную задачу, приводящую к подобной же предельной операции.

91. Задача о проведении касательной к кривой. Пусть дана кривая (K) (рис. 37) и на ней точка M; обратимся к установлению самого понятия касательной к кривой в ее точке M.

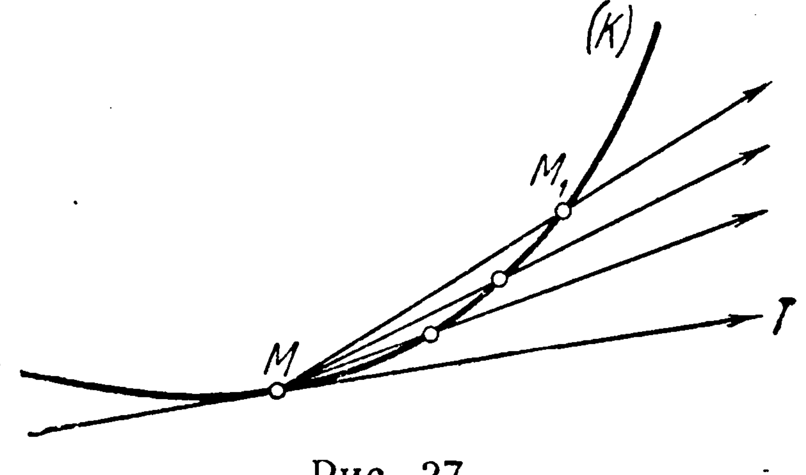


Рис. 37.

В школьном курсе касательную к окружности определяют как «прямую, имеющую с кривой лишь одну общую точку». Но это определение имеет частный характер, не вскрывая существа дела. Если попытаться применить его, например, к параболе $y = ax^2$ (рис. 38а), то в начале координат O обе координатные оси подошли бы под это определение; между тем, — как, вероятно, непосредственно ясно и читателю, — на деле лишь ось x служит касательной к параболе в точке O!

Мы дадим сейчас общее определение касательной. Возьмем на кривой (K) (рис. 37), кроме точки M, еще точку M_1 и проведем

секущую MM_1. Когда точка M_1 будет перемещаться вдоль по кривой, эта секущая будет вращаться вокруг точки M.

Касательной к кривой (К) в точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к совпадению с M. (Смысл этого определения состоит в том, что угол $\sphericalangle M_1MT$ становится сколь угодно малым, лишь только достаточно мала хорда MM_1).

Применим для примера это определение к параболе $y = ax^2$, в любой ее точке $M(x, y)$. Так как касательная проходит через

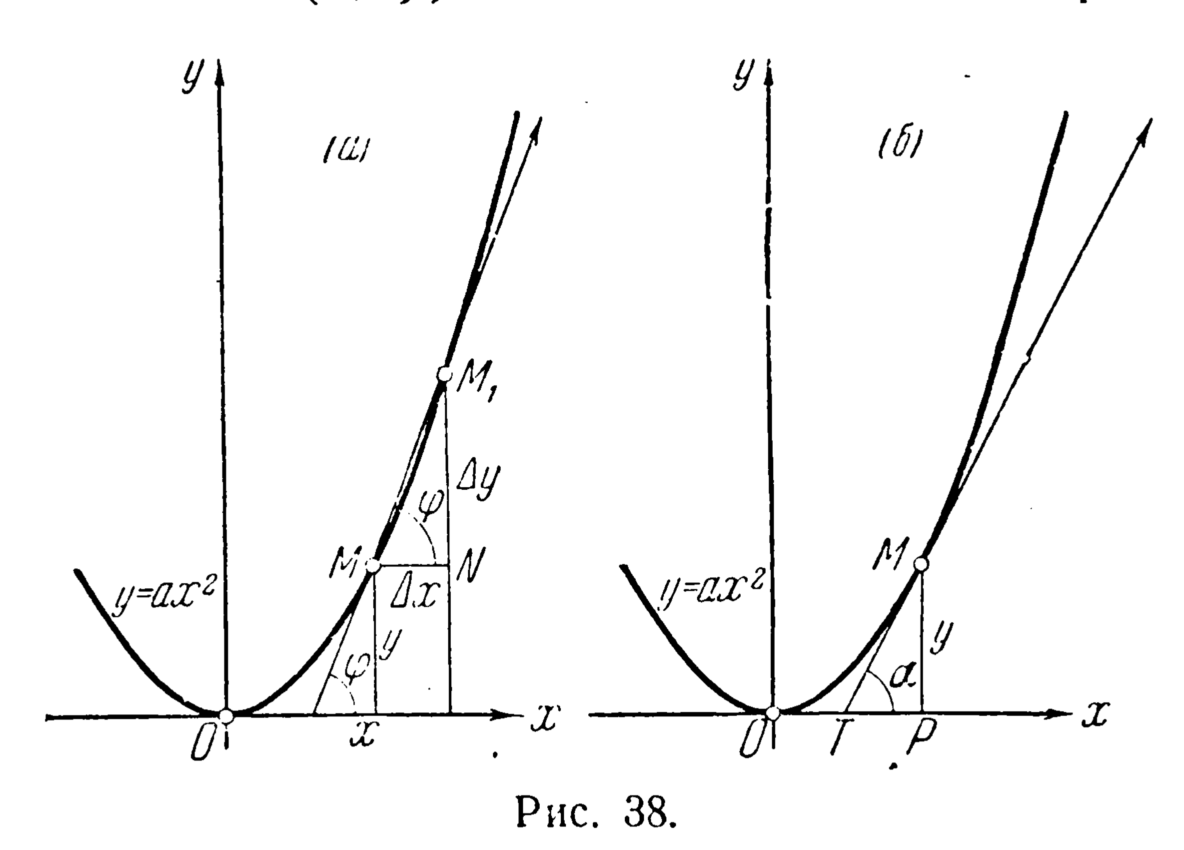


Рис. 38.

эту точку, то для уточнения ее положения достаточно знать еще ее угловой коэффициент. Мы и поставим себе задачей *найти угловой коэффициент* $\operatorname{tg} \alpha$ *касательной к точке* M.

Придав абсциссе x приращение Δx, от точки M кривой перейдем к точке M_1 с абсциссой $x + \Delta x$ и ординатой

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$

(рис. 38, *а*). Угловой коэффициент $\operatorname{tg} \varphi$ секущей MM_1 определится из прямоугольного $\triangle MNM_1$. В нем катет MN равен приращению абсциссы Δx, а катет NM_1, очевидно, есть соответствующее приращение ординаты

$$\Delta y = a(2x \cdot \Delta x + \Delta x^2),$$

так что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a \cdot \Delta x.$$

Для получения углового коэффициента касательной, как легко понять, нужно перейти здесь к пределу при $\Delta x \to 0$. Мы приходим таким образом к результату:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a \cdot \Delta x) = 2ax.$$

[Заметим попутно, что отсюда вытекает удобный прием для фактического построения касательной к параболе. Именно, из $\triangle MPT$ (рис. 38, *б*), отрезок

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

так что T есть середина отрезка OP. Итак, для того чтобы получить касательную к параболе в ее точке M, достаточно разделить пополам отрезок OP и середину его соединить с точкой M.]

В случае любой кривой, с уравнением

$$y = f(x),$$

угловой коэффициент касательной устанавливается подобным же образом. Приращению Δx абсциссы отвечает приращение Δy ординаты, и отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

выражает угловой коффициент секущей, $\operatorname{tg}\varphi$. Угловой же коэффициент касательной получается отсюда путём перехода к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

92. Определение производной. Сопоставляя операции, которые мы осуществляли при решении рассмотренных выше фундаментальных задач, легко усмотреть, что в обоих случаях — если отвлечься от различия в истолковании переменных — по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной и затем вычислялся предел их отношения. Таким путем мы и приходим к основному понятию дифференциального исчисления — к понятию производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $\mathcal{X}$. Исходя из некоторого значения $x = x_0$ независимой переменной, придадим ему приращение $\Delta x \lesseqgtr 0$, не выводящее его из промежутка $\mathcal{X}$, так что и новое значение $x_0 + \Delta x$ принадлежит этому промежутку. Тогда значение $y = f(x_0)$ функции заменится новым значением $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, т. е. получит приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx, при стремлении Δx к 0, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

и называется производной функции $y=f(x)$ по независимой переменной x, при данном ее значении (или в данной точке) $x=x_0$.

Таким образом, производная при данном значении $x=x_0$ — если существует — есть определенное число*); если же производная существует во всем промежутке $\mathcal{X}$, т. е. при каждом значении x в этом промежутке, то она является функцией от x.

Пользуясь только что введенным понятием, сказанное в **90** о скорости движущейся точки можно резюмировать так:

Скорость v есть производная от пройденного пути s по времени t.

Если слово «скорость» понимать в более общем смысле, то можно было бы производную всегда трактовать, как некую «скорость». Именно, имея функцию y от независимой переменной x, можно поставить вопрос о скорости изменения переменной y по сравнению с переменной x (при данном значении последней).

Если приращение Δx, приданное x, влечет за собой приращение Δy для y, то, по аналогии с **90**, средней скоростью изменения y по сравнению с x, при изменении x на величину Δx, можно считать отношение

$$v_{\text{ср.}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Скоростью же изменения y при данном значении x естественно назвать предел этого отношения при стремлении Δx к 0:

$$v=\lim_{\Delta x\to 0} v_{\text{ср.}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. как раз — производную от y по x.

В **91** мы рассматривали кривую, заданную уравнением $y=f(x)$, и решили вопрос о проведении касательной к ней в заданной точке. Теперь мы можем сформулировать полученный нами результат так:

Угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ касательной есть производная от ординаты y по абсциссе x.

Это геометрическое истолкование производной часто бывает полезным.

Приведем в дополнение к рассмотренным выше еще несколько примеров, выявляющих роль понятия производной.

Если скорость движения v не постоянна и сама изменяется с течением времени t: $v=f(t)$, то рассматривают ускорение — «скорость изменения скорости».

---

*) Пока мы ограничиваемся случаем, когда упомянутый выше предел конечен [см. **101**].

Именно, если приращению времени Δt отвечает приращение скорости Δv, то отношение

$$a_{\text{ср.}}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

выразит среднее ускорение за промежуток времени Δt, а предел его даст ускорение движения в данный момент времени:

$$a=\lim_{\Delta t\to 0} a_{\text{ср.}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Таким образом, *ускорение есть производная от скорости по времени.*

Обратимся к учению о теплоте — и с помощью производной установим понятие теплоемкости тела при данной температуре.

Обозначим входящие в вопрос физические величины следующим образом: θ — температура (в градусах C), W — количество тепла, которое нужно сообщить телу, при нагревании его от $0°$ до $\theta°$ (в калориях). Ясно, что W есть функция от θ: $W=f(\theta)$. Придадим θ некоторое приращение $\Delta\theta$, тогда W также получит приращение ΔW. Средняя теплоемкость при нагревании от $\theta°$ до $(\theta+\Delta\theta)°$ будет

$$c_{\text{ср.}}=\frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

Но так как, вообще говоря, при изменении $\Delta\theta$ эта средняя теплоемкость меняется, мы не можем принять ее за теплоемкость при данной температуре θ. Для получения последней нужно перейти к пределу:

$$c=\lim_{\Delta\theta\to 0} c_{\text{ср.}}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

Итак, можно сказать, что *теплоемкость тела есть производная от количества тепла по температуре.*

Наконец, возьмем пример из учения об электричестве: установим понятие о силе переменного тока в данный момент.

Обозначим через t время (в секундах), отсчитываемое от некоторого начального момента, а через Q — количество электричества (в кулонах), протекавшего за это время через поперечное сечение цепи. Очевидно, что Q есть функция от t: $Q=f(t)$. Повторив предыдущие рассуждения, получим, что средняя сила тока за промежуток времени Δt будет

$$I_{\text{ср.}}=\frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

а сила тока в данный момент выразится пределом

$$I=\lim_{\Delta t\to 0} I_{\text{ср.}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

т. е. *сила тока есть производная от количества протекшего электричества по времени.*

Все эти применения производной (число которых легко было бы увеличить) с достаточной яркостью обнаруживают тот факт, что понятие производной существенным образом связано с основными понятиями из различных областей знания.

Вычисление производных, изучение и использование их свойств и составляет главный предмет *дифференциального исчисления.*

Для обозначения производной употребляют различные символы:

$\frac{dy}{dx}$	или	$\frac{df(x_0)}{dx}$ *)	Лейбниц (G. W. Leibniz);
y'	или	$f'(x_0)$	Лагранж (J. L. Lagrange);
Dy	или	$Df(x_0)$	Коши (A. L. Cauchy).

Мы будем пользоваться преимущественно простыми обозначениями Лагранжа. Если применяют функциональное обозначение (см. второй столбец), то буква x_0 в скобках указывает то именно значение независимой переменной, при котором берется производная. Наконец, заметим, что в случаях, когда может возникнуть сомнение относительно переменной, по которой взята производная (по сравнению с которой устанавливается «скорость изменения функции»), эта переменная указывается в виде значка внизу:

$$y'_x,\ f'_x(x_0),\ D_x y,\ D_x f(x_0),$$

причем значок x не связан с тем частным значением x_0 независимой переменной, при котором берется производная.

[В некотором смысле, можно сказать, что цельные символы

$$\frac{df}{dx},\quad f' \text{ или } f'_x,\quad Df \text{ или } D_x f$$

играют роль функциональных обозначений для производной функции.]

Запишем теперь, пользуясь введенными для обозначения производных символами, некоторые из полученных выше результатов. Для скорости движения имеем:

$$v=\frac{ds}{dt}\quad\text{или}\quad v=s'_t,$$

а для ускорения

$$a=\frac{dv}{dt}\quad\text{или}\quad a=v'_t.$$

*) Пока мы рассматриваем обозначения Лейбница как цельные символы; ниже [104] мы увидим, что их можно рассматривать и как дроби.

Аналогично, угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ напишется так:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha=y'_x,$$

и т. п.

93. Примеры вычисления производных. В качестве примеров вычислим производные для ряда элементарных функций:

1° Отметим, прежде всего, очевидные результаты: если $y=c=$ $=\text{const.}$, то $\Delta y=0$, каково бы ни было Δx, так что $y'=0$; если же $y=x$, то $\Delta y=\Delta x$ и $y'=1$.

2° Пусть теперь $y=x^n$, где n — натуральное число.

Придадим x приращение Δx *); тогда новое значение y будет

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots,$$

так что

$$\Delta y=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\ldots,$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots$$

Так как при $\Delta x\to 0$ все слагаемые, кроме первого, стремятся к нулю, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

3° Если $y=\frac{1}{x}$, то $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$, так что

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

Отсюда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2}.$$

При этом предполагается, конечно, $x\neq 0$.

---

*) Если производная вычисляется при любом значении аргумента, то обыкновенно его обозначают той же буквой, что и аргумент, без каких-либо значков при нем.

4° Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$ (при $x>0$). Имеем:

$$y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x},$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}};$$

наконец, пользуясь непрерывностью корня, получим

$$y'=\lim_{x\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Все эти результаты содержатся как частные случаи в следующем.

5° Степенная функция: $y=x^{\mu}$ (где μ — любое вещественное число). Область изменения x зависит от μ; она была указана в **48**, 2°. Имеем (при $x\neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Если воспользоваться пределом, вычисленным в **77** [5) (в)], то получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}\ {}^{*)}.$$

В частности

$$\text{если } y=\frac{1}{x}=x^{-1}, \text{ то } y'=(-1)\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2},$$

$$\text{если } y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \text{ то } y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6° Показательная функция: $y=a^x$ ($a>0$, $-\infty<x<+\infty$). Здесь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Воспользовавшись пределом, вычисленным в **77** [5) (б)], найдем:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a.$$

В частности,

$$\text{если } y=e^x, \text{ то и } y'=e^x.$$

Итак, скорость возрастания показательной функции (при $a>1$) пропорциональна значению самой функции: чем большего значения

*) Если $\mu>1$, то при $x=0$ легко непосредственно получить значение производной: $y'=0$.

функция уже достигла, тем быстрее в этот момент она растет. Это дает точную характеристику роста показательной функции, о котором мы имели уже случай говорить [ср. **65**].

7° Логарифмическая функция: $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1,\ 0<x<+\infty)$. В этом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Воспользуемся пределом, вычисленным в **77** [5) (а)]:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}.$$

В частности, для натурального логарифма получается исключительно простой результат:

$$\text{при } y=\ln x \text{ имеем } y'=\frac{1}{x}.$$

Это дает (хотя, по существу, и не новое) основание для предпочтения, которое оказывается натуральным логарифмам при теоретических исследованиях.

То обстоятельство, что скорость возрастания логарифмической функции (при $a>1$) обратно пропорциональна значению аргумента и, оставаясь положительной, стремится к нулю при безграничном возрастании аргумента, хорошо согласуется со сказанным по этому поводу раньше [**65**].

8° Тригонометрические функции. Пусть $y=\sin x$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Пользуясь непрерывностью функции $\cos x$ и известным [**54**, (8)] пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x\ ^{*)}.$$

---

*) Отметим, что эта формула обязана своей простотой тому, что угол измеряется в радианах. Если бы мы стали измерять x, например, в градусах, предел отношения синуса к углу был бы равен не единице, а, как легко видеть, $\frac{\pi}{180}$, и тогда мы имели бы

$$(\sin x)'=\frac{\pi}{180}\cos x.$$

Аналогично найдем:

$$\text{если } y=\cos x, \text{ то } y'=-\sin x.$$

В случае $y=\operatorname{tg} x$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sin(x+\Delta x)\cdot\cos x-\cos(x+\Delta x)\cdot\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}.$$

Отсюда, как и выше,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

Аналогично,

$$\text{если } y=\operatorname{ctg} x, \text{ то } y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

94. Производная обратной функции. Прежде чем заняться вычислением производных от обратных тригонометрических функций, докажем следующую общую теорему.

Теорема. *Пусть* 1) *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* n° **83** *о существовании обратной функции,* 2) *в точке* x_0 *имеет конечную и отличную от нуля производную* $f'(x_0)$. *Тогда для обратной функции* $g(y)$ *в соответствующей точке* $y_0=f(x_0)$ *также существует производная, равная* $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Придадим значению $y=y_0$ произвольное приращение Δy, тогда соответственное приращение Δx получит и функция $x=g(y)$. Заметим, что при $\Delta y\neq 0$, ввиду однозначности самой функции $y=f(x)$, и $\Delta x\neq 0$. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь $\Delta y\to 0$ по любому закону, то — в силу непрерывности функции $x=g(y)$ — и приращение $\Delta x\to 0$. Но тогда знаменатель правой части написанного равенства стремится к пределу $f(x_0)\neq 0$, следовательно, существует предел для левой части, равный обратной величине $\frac{1}{f'(x_0)}$; он и представляет собой производную $g'(y_0)$.

Итак, имеем простую формулу:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Легко выяснить ее геометрический смысл. Мы знаем, что производная y'_x есть тангенс угла α, образованного касательной к графику функции $y=f(x)$ с осью x. Но обратная функция $x=g(y)$ имеет тот же график, лишь независимая переменная для нее откладывается по оси y. Поэтому производная x'_y равна тангенсу угла β, составленного той же касательной с осью y (рис. 39). Таким образом, выведенная формула сводится к известному соотношению

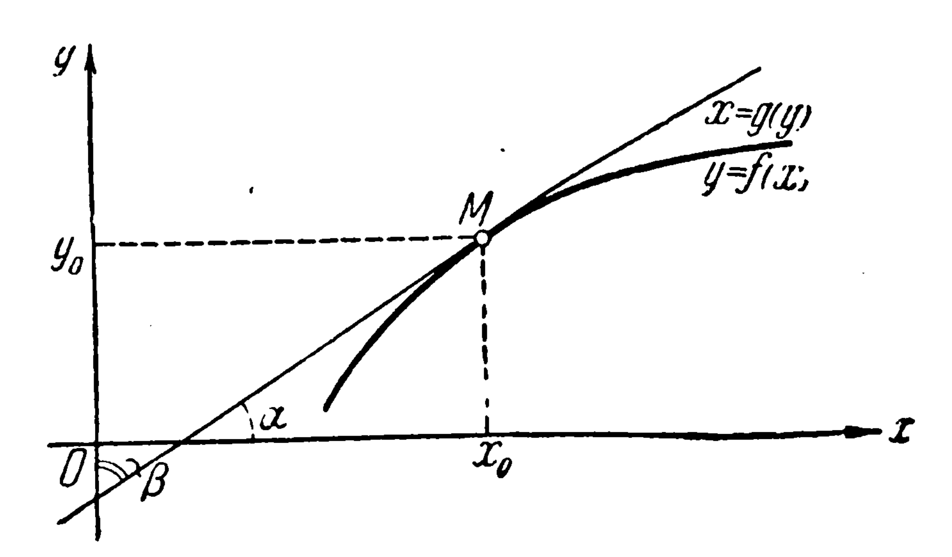


Рис. 39.

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

связывающему тангенсы двух углов α и β, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$.

Положим для примера $y=a^x$. Обратной для нее функцией будет $x=\log_a y$. Так как (см. 6°) $y'_x=a^x\cdot\ln a$, то, по нашей формуле,

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{a^x\cdot\ln a}=\frac{\log_a e}{y},$$

в согласии с 7°.

Переходя теперь к вычислению производных от обратных тригонометрических функций, мы для удобства обменяем ролями переменные x и y, переписав доказанную формулу в виде

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

9° **Обратные тригонометрические функции.** Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$ $(-1<x<1)$, причем $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Она является обратной для функции $x=\sin y$, имеющей для указанных значений y *положительную* производную $x'_y=\cos y$. В таком случае существует также производная y'_x и равна, по нашей формуле,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

корень мы берем со знаком плюс, так как $\cos y>0$.

Мы исключили значения $x=\pm 1$, ибо для соответствующих значений $y=\pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y=\cos y=0$.

Функция $y=\operatorname{arctg} x$ $(-\infty<x<+\infty)$ служит обратной для функции $x=\operatorname{tg} y$. По нашей формуле

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично можно получить:

для $y = \arccos x$ $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$,

для $y = \operatorname{arcctg} x$ $\quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$.

95. Сводка формул для производных. Сделаем сводку всех выведенных нами формул:

1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^{\mu}$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
5. $y = \log_a x$	$y' = \frac{\log_a e}{x}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
6. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
7. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

96. Формула для приращения функции. Докажем здесь два простых утверждения, имеющих приложения в дальнейшем.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $\mathscr{X}$. Исходя из определенного значения $x = x_0$ из этого промежутка, обозначим через $\Delta x \gtrless 0$ произвольное приращение x, подчиненное лишь тому ограничению, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы $\mathscr{X}$. Тогда соответствующим приращением функции будет

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1° *Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную $y'_x=f'(x_0)$, то приращение функции может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{2}$$

или, короче,

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x, \tag{2a}$$

где α есть величина, зависящая от Δx и вместе с ним стремящаяся к нулю.

Так как, по самому определению производной, при $\Delta x\to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'_x,$$

то, полагая

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'_x,$$

видим, что и $\alpha\to 0$. Определяя отсюда Δy, придем к формуле (2а).

Так как величина $\alpha\cdot\Delta x$ (при $\Delta x\to 0$) будет бесконечно малой высшего порядка, чем Δx, то, употребляя введенное в **60** обозначение, можно наши формулы переписать в виде

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x) \tag{3}$$

или

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+o(\Delta x). \tag{3a}$$

Замечание. До сих пор мы считали $\Delta x\lessgtr 0$; величина α и не определена была при $\Delta x=0$. Когда мы говорили, что $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то (как обычно) предполагали, что Δx стремится к 0 по любому закону, но не принимая нулевого значения. Положим теперь $\alpha=0$ при $\Delta x=0$; тогда, разумеется, формула (2) сохранится и при $\Delta x=0$. Кроме того, соотношение $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$ можно понимать и в более широком смысле, чем раньше, не исключая для Δx возможности стремится к 0, принимая в числе прочих и нулевые значения.

Из доказанных формул непосредственно вытекает:

2° *Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную, то в этой точке функция необходимо непрерывна.*

Действительно, из (2а) ясно, что соотношение $\Delta x\to 0$ влечет за собой $\Delta y\to 0$.

97. Простейшие правила вычисления производных. В предыдущих пп° мы вычислили производные для элементарных функций. Здесь и в следующем п° мы установим ряд простых правил, с помощью которых станет возможным вычисление производной для любой

функции, составленной из элементарных при посредстве конечного числа арифметических действий и суперпозиций [51].

I. *Пусть функция* $u=\varphi(x)$ *имеет* (*в определенной точке* x) *производную* u'. Докажем, что и *функция* $y=cu$ ($c=\text{const.}$) *также имеет производную* (*в той же точке*), и вычислим ее.

Если независимая переменная x получит приращение Δx, то функция u получит приращение Δu, перейдя от исходного значения u к значению $u+\Delta u$. Новое значение функции y будет $y+\Delta y= =c(u+\Delta u)$.

Отсюда $\Delta y=c\cdot\Delta u$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=c\cdot u'.$$

Итак, производная существует и равна

$$y'=(c\cdot u)'=c\cdot u'.$$

Эта формула выражает такое правило: постоянный множитель может быть вынесен за знак производной.

II. *Пусть функции* $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ *имеют* (*в определенной точке*) *производные* u', v'. Докажем, что *функция* $y=u\pm v$ *также имеет производную* (*в той же точке*), и вычислим ее.

Придадим x приращение Δx; тогда u, v и y получат, соответственно, приращения Δu, Δv и Δy. Их новые значения $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ и $y+\Delta y$ связаны тем же соотношением:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v).$$

Отсюда

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v',$$

так что производная y' существует и равна

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

Этот результат легко может быть распространен на любое число слагаемых (и притом — тем же методом).

III. *При тех же предположениях относительно функций* u, v докажем, что *функция* $y=u\cdot v$ *также имеет производную*, и найдем ее.

Приращению Δx отвечают, как и выше, приращения Δu, Δv и Δy; при этом $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$, так что

$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v.$$

Так как при $\Delta x \to 0$, в силу **96**, 2°, и $\Delta v \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

т. е. существует производная y' и равна

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Если $y = uvw$, причем u', v', w' существуют, то

$$y' = [(uv) \cdot w]' = (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Легко сообразить, что для случая n сомножителей будем иметь аналогично:

$$[\overbrace{uvw \ldots s}^{n}]' = u'vw \ldots s + uv'w \ldots s + uvw' \ldots s + \ldots \\ \ldots + uvw \ldots s'. \quad (4)$$

Для того чтобы доказать это, воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что формула (4) верна для некоторого числа n сомножителей, и установим ее справедливость для $n+1$ сомножителей:

$$[\overbrace{uvw \ldots st}^{n+1}]' = [(\overbrace{uvw \ldots s}^{n}) \cdot t]' = (uvw \ldots s)' \cdot t + (uvw \ldots s) \cdot t';$$

если производную $(uvw \ldots s)'$ развернуть по формуле (4), то придем к формуле

$$[uvw \ldots st]' = u'vw \ldots st + uv'w \ldots st + \ldots + uvw \ldots s't + uvw \ldots st',$$

совершенно аналогичной (4). Так как в верности формулы (4) при $n = 2$ и 3 мы убедились непосредственно, то эта формула верна при любом n.

IV. Наконец, *если u, v удовлетворяют прежним предположениям и, кроме того, v отлично от нуля, то* мы докажем, что *функция $y = \frac{u}{v}$ также имеет производную,* и найдем ее.

При тех же обозначениях, что и выше, имеем

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

так что

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v\,(v + \Delta v)}$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot (v + \Delta v)}.$$

Устремляя здесь Δx к нулю (причем одновременно и $\Delta v \to 0$), убеждаемся в существовании производной

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

98. Производная сложной функции. Теперь мы можем установить весьма важное при практическом нахождении производных правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих функций.

V. *Пусть* 1) *функция* $u = \varphi(x)$ *имеет в некоторой точке* x_0 *производную* $u'_x = \varphi'(x_0)$, 2) *функция* $y = f(u)$ *имеет в соответствующей точке* $u_0 = \varphi(x_0)$ *производную* $y'_u = f'(u)$. *Тогда сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *в упомянутой точке* x_0 *также будет иметь производную, равную произведению производных функций* $f(u)$ и $\varphi(x)$:

$$[f(\varphi(x))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)\ ^{*)},$$

или, короче,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Для доказательства придадим x_0 произвольное приращение Δx; пусть Δu — соответствующее приращение функции $u = \varphi(x)$ и, наконец, Δy — приращение функции $y = f(u)$, вызванное приращением Δu. Воспользуемся соотношением (2а), которое, заменяя x на u, перепишем в виде

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α зависит от Δu и вместе с ним стремится к нулю). Разделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Если Δx устремить к нулю, то будет стремиться к нулю и Δu [**96**, 2°], а тогда, как мы знаем, будет также стремиться к нулю зависящая от Δu величина α. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

который и представляет собою искомую производную y'_x.

З а м е ч а н и е. Здесь сказывается полезность замечания в **96** относительно величины α при $\Delta x = 0$: покуда Δx есть приращение н е з а в и с и м о й   п е р е м е н н о й, мы могли предполагать его отличным от нуля, но когда Δx заменено приращением ф у н к ц и и $u = \varphi(x)$, то даже при $\Delta x \neq 0$ мы уже не вправе считать, что $\Delta u \neq 0$.

---

*) Подчеркнем, что символ $f'_u(\varphi(x_0))$ означает производную функцию $f(u)$ п о е е а р г у м е н т у u (а н е п о x), при значении $u_0 = \varphi(x_0)$ этого аргумента.

99. Примеры *). Сначала приведем несколько примеров приложения правил I—IV.

1) Рассмотрим многочлен:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

По правилу II, а затем I, будем иметь

$$y' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1}) + \ldots + (a_{n-2}x^2)' + (a_{n-1}x)' + (a_n)' =$$
$$= a_0(x^n)' + a_1(x^{n-1})' + \ldots + a_{n-2}(x^2) + a_{n-1}(x)' + (a_n)'.$$

Использовав же формулы 1, 2, 3 [95], окончательно получим

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

2) $y = (2x^2 - 5x + 1)\cdot e^x$. По правилу III

$$y' = (2x^2 - 5x + 1)'\cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1)\cdot(e^x)'.$$

Опираясь на предыдущий пример и формулу 4 [95], найдем:

$$y' = (4x - 5)\cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1)\cdot e^x = (2x^2 - x - 4)\cdot e^x.$$

3) $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$. По правилу IV,

$$y' = \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{a(x^2+1) - (ax+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}.$$

4) Вычислим снова производную функции $y = \operatorname{tg} x$, исходя из формулы $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Пользуясь правилом IV (и формулами 6, 7, 95) получим

$$y' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(ср. 8, 95).

5) $y = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$. Здесь приходится пользоваться сначала правилом IV, а затем правилами II и III (и формулами 6, 7, 95):

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2} =$$
$$= \frac{x\cos x\cdot(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)\cdot(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

Вычисление производных числителя и знаменателя мы произвели, не расчленяя его на отдельные шаги. Путем упражнения необходимо добиться того, чтобы вообще писать производные сразу.

Примеры на вычисление производных сложных функций:

6) Пусть $y = \ln\sin x$, иначе говоря, $y = \ln u$, где $u = \sin x$.

По правилу V, $y'_x = y'_u\cdot u'_x$. Производная $y'_u = (\ln u)'_u = \dfrac{1}{u}$ (формула 5) должна быть взята при $u = \sin x$. Таким образом,

$$y'_x = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \qquad \text{(формула 6).}$$

---

*) Буквами x, y, u, v ниже обозначены переменные, а другими буквами — постоянные величины.

7) $y=\sqrt{1+x^2}$, т. е. $y=\sqrt{u}$, где $u=1+x^2$; по правилу V,

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ (формула 3; пример 1).

8) $y=e^{x^2}$, т. е. $y=e^u$, где $u=x^2$;

$$y'_x=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2x\cdot e^{x^2}$$ (V; 4 и 3).

Конечно, в отдельном выписывании составляющих функций на деле нет надобности.

9) $y=\sin ax$; $y'_x=\cos ax\cdot(ax)'=a\cdot\cos ax$ (V; 7, 1, 2).

10) $y=(x^2+x+1)^n$; $y'_x=n(x^2+x+1)^{n-1}\cdot(x^2+x+1)'=$
$=n(2x+1)(x^2+x+1)^{n-1}$ (V; 3, пример 1).

11) $y=2^{\sin x}$;

$$y'_x=2^{\sin x}\cdot\ln 2\cdot(\sin x)'=\ln 2\cdot\cos x\cdot 2^{\sin x}$$ (V; 4, 6)

12) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

$$y'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$$ (V; 12, 3).

Случай сложной функции, полученной в результате нескольких суперпозиций, исчерпывается последовательным применением правила V:

13) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}$; тогда

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)'_x=$$ (V; 3)

$$=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}\cdot\sec^2\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'_x=$$ (V; 8)

$$=\frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}.$$

14) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$; в этом случае

$$y'_x=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'_x=$$ (V; 4)

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'_x=$$ (V; 3)

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'_x=$$ (V; 6)

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot e^{\sin^2\frac{1}{x}}$$ (V; 3)

Дадим еще несколько примеров на применение всех правил:

15) $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$$y' = \frac{1}{2}[(e^x)'_x - (e^{-x})'_x] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Наоборот, если $y = \operatorname{ch} x$, то $y' = \operatorname{sh} x$. Наконец, как и в 4), легко получить:

$$\text{если } y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \text{ то } y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$\text{если же } y = \operatorname{cth} x, \text{ то } y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

16) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; $y'_x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot (x + \sqrt{x^2+1})'_x =$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Тот же результат можно получить и из других соображений. Мы видели в **49**, 4), что функция $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ является обратной для функции $x = \operatorname{sh} y$; поэтому [**94**; пример 15; **48**, 6°]

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17) $y = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$;

$$y' = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+a^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{(\sqrt{x^2+a^2})^2} = \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

18) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$;

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

19) $y = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}}$

(мы предполагаем: $b - ac > 0$);

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \left[\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}} - \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} \right] =$$

$$= \frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

20) $y = \frac{2}{\sqrt{ac-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}$

(здесь предположено: $ac - b > 0$);

$$y' = \frac{2}{\sqrt{ac-b}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{ax+b}{ac-b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ac-b}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$$

21) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\left(|b|<a;\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right);$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}\times$$
$$\times\frac{a\cos x\cdot(a+b\sin x)-(a\sin x+b)\cdot b\cos x}{(a+b\sin x)^2}=\frac{1}{a+b\sin x}.$$

22) $y=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cdot\cos x}{a+b\sin x}\ (|a|<|b|);$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\frac{a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}-\frac{b\cos x}{a+b\sin x}\right]=$$
$$=\frac{1}{a+b\sin x}.$$

23) В виде упражнения, исследуем еще вопрос о производной степенно-показательного выражения $y=u^v$ $(v>0)$, где u и v суть функции от x, имеющие в данной точке производные u', v'.

Прологарифмировав равенство $y=u^v$, получим

$$\ln y=v\cdot\ln u. \tag{5}$$

Таким образом, выражение для y можно переписать в виде $y=e^{v\ln u}$, откуда уже ясно, что производная y' существует. Самое же вычисление ее проще осуществить, приравнивая производные по x от обеих частей равенства (5). При этом мы используем правила V и III (помня о том, что u, v и y суть функции от x). Мы получим

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

откуда

$$y'=y\left(\frac{vu'}{u}+v'\ln u\right),$$

или, подставляя вместо y его выражение,

$$y'=u^v\left(\frac{vu'}{u}+v'\ln u\right). \tag{6}$$

Эта формула впервые была установлена Лейбницем и И. Бернулли (Johann Bernoulli).

Например,

$$\text{если } y=x^{\sin x}, \text{ то } y'_x=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right).$$

24) Предполагая, что функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, написать выражения производных для функций

(а) $\sin f(x)$, (б) $e^{f(x)}$, (в) $\ln f(x)$

по x, и для функций

(г) $f(\sin t)$, (д) $f(e^t)$, (е) $f(\ln t)$

по t.

Ответ: (а) $\cos f(x)\cdot f'(x)$; (б) $e^{f(x)}\cdot f'(x)$; (в) $\frac{f'(x)}{f(x)}$;

(г) $f'(\sin t)\cdot\cos t$; (д) $f'(e^t)e^t$; (е) $f'(\ln t)\cdot\frac{1}{t}$.

По поводу последних трех примеров (г), (д), (е) обращаем внимание читателя на то, что символ $f'(\ldots)$ означает производную по аргументу x, от которого зависит функция $f(x)$, но при значении этого аргумента, соответственно, $x=\sin t$, e^t, $\ln t$, уже зависящем от t. Ср. сноску на стр. 202.

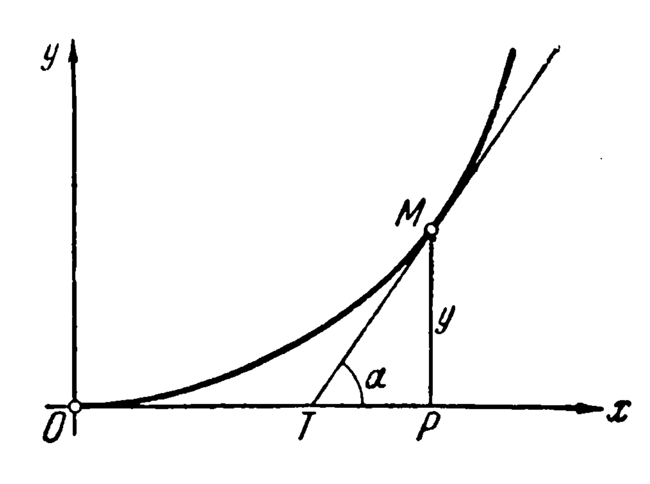


Рис. 40.

25) Функция $f(x)$, определенная в симметричном относительно 0 промежутке, называется *четной*, если $f(-x)=f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$. [Примерами четных функций могут служить четные степени x^2, x^4, ... , а также $\cos x$, $\operatorname{ch} x$; примеры нечетных функций: нечетные степени x, x^3, ..., $\sin x$, $\operatorname{sh} x$].

Доказать, что производная четной функции (если существует) сама является нечетной функцией, а производная нечетной функции сама будет четной.

26) Вычислить производную для функции $y=\ln|x|$ при $x \gtrless 0$.

При $x>0$, очевидно, $y'=\frac{1}{x}$; покажем, что та же формула сохраняется и при $x<0$. Действительно, вычисляя производную для функции

$$y=\ln|x|=\ln(-x),$$

как сложной функции, будем иметь

$$y'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

и в этом случае.

27) Рассмотрим кривую

$$y=ax^m \quad (m>0).$$

Угловой коэффициент касательной к ней в некоторой ее точке (x, y) будет [**91**—**92**]:

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=max^{m-1}.$$

По рис. 40 видно, что отрезок TP (так называемая подкасательная) равен

$$TP=\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{ax^m}{max^{m-1}}=\frac{x}{m}.$$

Это обстоятельство делает легким самое построение касательной. [Обобщение результата n° **91**.]

28) Для кривой (цепная линия)

$$y=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a} \quad (a>0),$$

подобным же образом,

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

На этот раз определим (считая $x>0$)

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}=\frac{a}{y},$$

так что $y \cdot \cos\alpha = a$. Если из основания D ординаты $y = DM$ (рис. 41) опустить перпендикуляр DS на касательную MT, то отрезок DS окажется равным a. Отсюда снова вытекает простой способ построения касательной к рассматриваемой кривой: на ординате DM, как на диаметре, строят полуокружность и из точки D делают засечку S радиусом a: прямая MS и будет касательной.

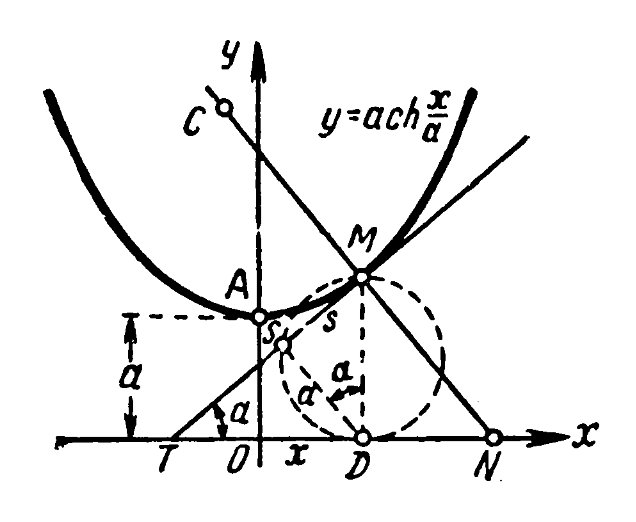


Рис. 41.

29) Пусть материальная точка колеблется по оси около некоторого среднего положения по закону

$$s = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \qquad (A,\ \omega > 0).$$

Такое колебание носит название *гармонического*; A — его амплитуда, ω — частота, α — начальная фаза.

Взяв производную от пути s по времени t, найдем скорость движения:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Наибольшей величины $\pm A\omega$ скорость достигает в моменты, когда $s = 0$, т. е. точка проходит через среднее положение. Наоборот, когда точка находится в наибольшем удалении от этого среднего положения ($s = \pm A$), скорость $v = 0$.

Производная от v по t:

$$a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

даст нам ускорение, с которым движется точка; очевидно,

$$a = -\omega^2 \cdot s.$$

Отсюда, если ввести массу m движущейся точки, то, по закону Ньютона, сила F, под действием которой происходит гармоническое колебание, выразится так:

$$F = -m\omega^2 \cdot s.$$

Как видим, она всегда направлена к среднему положению (ибо имеет знак, обратный знаку s) и пропорциональна удалению точки от него.

30) Движение, происходящее по закону

$$s = Ae^{-kt} \sin\omega t \qquad (A,\ k,\ \omega > 0),$$

называется *затухающим колебанием*, ибо наличие множителя e^{-kt} заставляет точку, хоть и колеблясь около среднего положения, все же стремиться к совпадению с ним:

$$\lim_{t \to +\infty} s = 0.$$

В этом случае

$$v = s'_t = Ae^{-kt}(\omega \cdot \cos\omega t - k \cdot \sin\omega t)$$

и

$$a = v'_t = -Ae^{-kt}(\omega^2 \cdot \sin\omega t + 2\omega k \cdot \cos\omega t - k^2 \cdot \sin\omega t).$$

Вводя в скобках еще члены $\pm k^2 \cdot \sin\omega t$, после очевидных преобразований получим

$$a = -Ae^{-kt}[(\omega^2 + k^2)\sin\omega t + 2k(\omega \cdot \cos\omega t - k \cdot \sin\omega t)] = -(\omega^2 + k^2) \cdot s - 2k \cdot v.$$

Сила, под действием которой происходит подобное движение, равна

$$F = -(\omega^2 + k^2)\, m \cdot s - 2km \cdot v.$$

Мы видим, что она слагается из двух сил: 1) из силы, пропорциональной расстоянию точки от среднего положения и направленной к этому среднему

положению (как и в случае гармонического колебания), и 2) из тормозящей движение силы, пропорциональной скорости и направленной обратно скорости.

100. Односторонние производные. Обратимся, в заключение, к обзору ряда особых случаев, которые могут представиться в отношении производных. Начнем с установления понятия об односторонних производных. Если рассматриваемое значение x является одним из концов того промежутка $\mathscr{X}$, в котором определена функция $y=f(x)$, то при вычислении предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приходится ограничиться приближением Δx к нулю лишь справа (когда речь идет о левом конце промежутка) или слева (для правого конца). В этом случае говорят об односторонней производной, справа или слева. В соответствующих точках график функции имеет одностороннюю касательную.

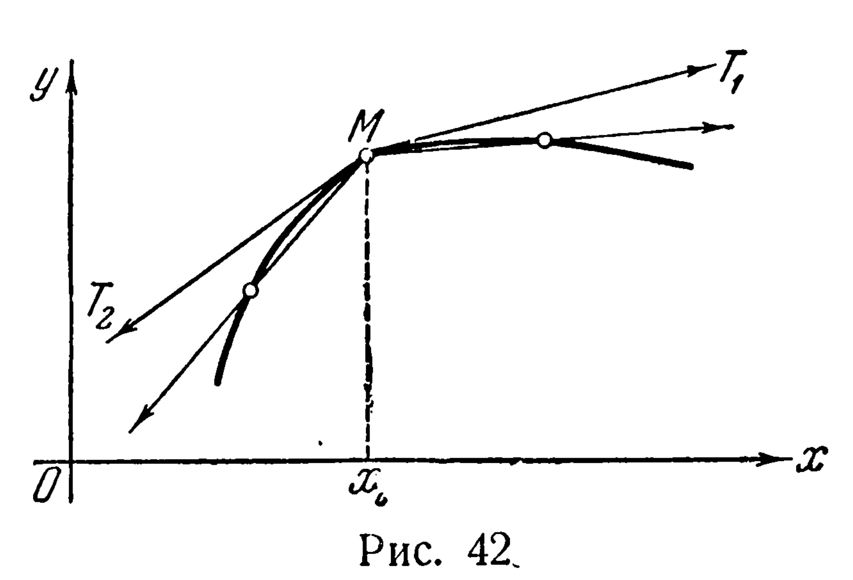


Рис. 42.

Может случиться, что и для внутренней точки x существуют лишь односторонние пределы отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (при $\Delta x \to +0$ или $\Delta x \to -0$), не равные между собой; их также называют односторонними производными. Для графика функции в соответствующей точке будут существовать лишь односторонние касательные, составляющие угол; точка будет угловой (рис. 42).

В качестве примера рассмотрим функцию $y=f(x)=|x|$. Исходя из значения $x=0$, будем иметь

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

Если $\Delta x > 0$, то

$$\Delta y = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Если же $\Delta x < 0$, то

$$\Delta y = -\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Начало координат является угловой точкой для графика этой функции, состоящей из биссектрис первого и второго координатных углов.

101. Бесконечные производные. Если отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, то это несобственное число также называют производной (и обозначают как обычно). Аналогично устанавливается понятие об односторонней бесконечной производной. Геометрическое истолкование производной как углового

коэффициента касательной распространяется и на этот случай; но здесь — касательная оказывается параллельной оси y (рис. 43, а, б, в, г).

В случаях (а) и (б) эта производная равна, соответственно, $+\infty$ и $-\infty$ (обе односторонние производные совпадают по знаку); в случаях же (в) и (г) односторонние производные разнятся знаками.

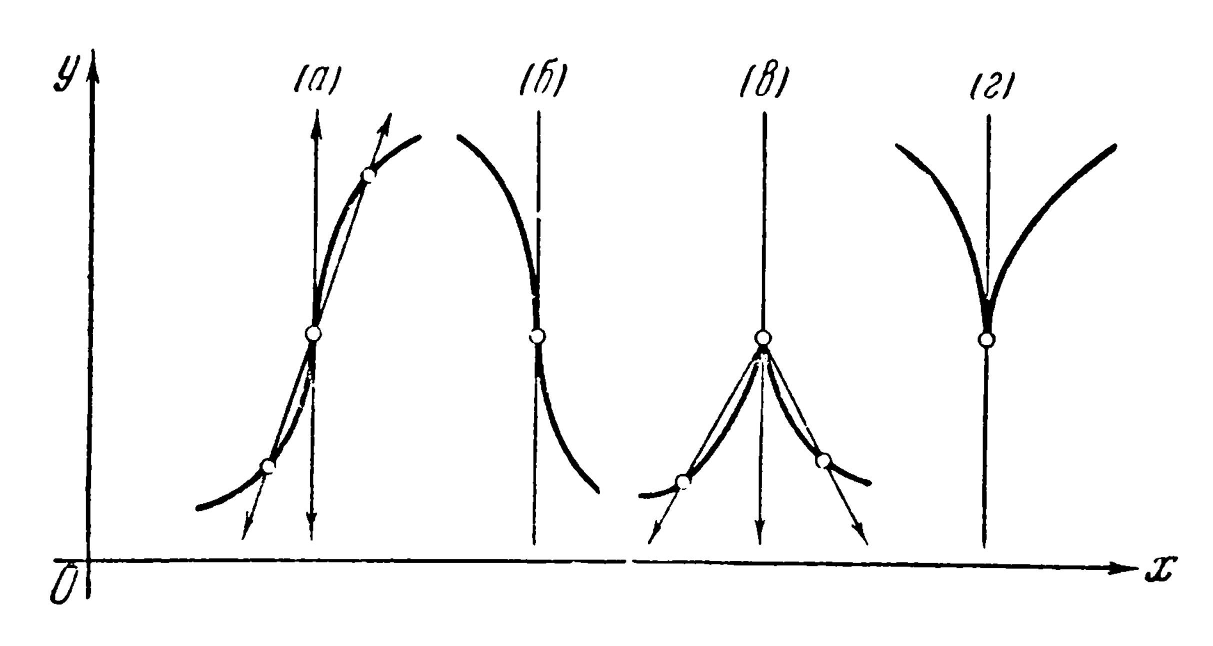


Рис. 43.

Пусть, например, $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$; при $x \neq 0$ формула 3, **95** даст

$$f_1'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

но она неприложима при $x = 0$. В этой точке вычислим производную, исходя непосредственно из ее определения; составив отношение

$$\frac{f_1(0 + \Delta x) - f_1(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}},$$

видим, что его пределом при $\Delta x \to 0$ будет $+\infty$. Аналогично убеждаемся, что для функции $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ при $x = 0$ производная слева равна $-\infty$, а справа $+\infty$.

Пользуясь расширением понятия производной, можно дополнить теорему n° **94** о производной обратной функции указанием, что и в тех случаях, когда $f'(x_0)$ равна 0 или $\pm\infty$, производная обратной функции $g'(y_0)$ существует и равна, соответственно $\pm\infty$ или 0. Например, так как функция $\sin x$ при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ имеет производную $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то для обратной функции $\arcsin y$ при $y = \pm 1$ существует бесконечная производная (именно, $+\infty$).

102. Дальнейшие примеры особых случаев. 1° *Примеры несуществования производной.* Уже функция $y=|x|$ в точке $x=0$ [см. **100**] не имеет обычной, двусторонней, производной. Но интереснее пример функции

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\quad(\text{при } x\neq0),\quad f(0)=0,$$

непрерывной и при $x=0$ [70, 5)], но не имеющей в этой точке даже односторонних производных. Действительно, отношение

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

не стремится ни к какому пределу при $\Delta x\to\pm0$.

По графику этой функции (рис. 24) легко усмотреть, что секущая OM_1, исходящая из начальной точки O, не имеет предельного положения при стремлении M_1 к O, так что касательной к кривой в начальной точке нет (даже односторонней).

Впоследствии (во втором томе) мы познакомимся с замечательным примером функции, непрерывной при всех значениях аргумента, но ни при одном из них не имеющей производной.

2° *Примеры разрывов производной.* Если для данной функции $y=f(x)$ существует конечная производная $y'=f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка $\mathscr{X}$, то эта производная, в свою очередь, представляет собой в $\mathscr{X}$ функцию от x. В многочисленных примерах, которые нам до сих пор встречались, эта функция сама оказывалась непрерывной. Однако, это может быть и не так. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\quad(\text{при } x\neq0),\quad f(0)=0.$$

Если $x\neq0$, то ее производная вычисляется обычными методами:

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

но полученный результат неприложим при $x=0$. Обращаясь в этом случае непосредственно к самому определению понятия производной, будем иметь

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

Вместе с тем ясно, что $f(x)$ при $x\to0$ не стремится ни к какому пределу, так что при $x=0$ функция $f'(x)$ имеет разрыв.

То же справедливо и для любой функции

$$f(x)=x^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x}\quad(\text{при } x\neq0),\quad f(0)=0,$$

если только $2>\alpha>1$.

В этих примерах разрывы производной оказываются второго рода. Это — не случайность: ниже [113] мы увидим, что разрывов первого рода, т. е. скачков, производная иметь не может.

§ 2. Дифференциал

103. Определение дифференциала. Пусть имеем функцию $y=f(x)$, определенную в некотором промежутке $\mathscr{X}$ и непрерывную в рассматриваемой точке x_0. Тогда приращению Δx аргумента отвечает приращение

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с Δx. Большую важность имеет вопрос: *существует ли для Δy такая линейная относительно Δx бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ ($A = \text{const}$), что их разность оказывается, по сравнению с Δx, бесконечно малой высшего порядка:*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

При $A \neq 0$ наличие равенства (1) показывает, что бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy и, значит, служит для последней ее главной частью, если за основную бесконечно малую взята Δx [**62, 63**].

Если равенство (1) *выполняется, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой (при данном значении $x = x_0$), само же выражение $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции* и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

[В последнем случае, в скобках указывается исходное значение x *).]

Еще раз повторяем, что дифференциал функции характеризуется двумя свойствами: (а) он представляет линейную (однородную) функцию от приращения Δx аргумента и (б) разнится от приращения функции на величину, которая при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой порядка высшего, чем Δx.

Рассмотрим примеры.

1) Площадь Q круга радиуса r задается формулой $Q = \pi r^2$. Если радиус r увеличить на Δr, то соответствующее приращение ΔQ величины Q будет площадью кругового кольца, содержащегося между концентрическими окружностями радиусов r и $r + \Delta r$. Из выражения

$$\Delta Q = \pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi (\Delta r)^2$$

сразу усматриваем, что главной частью ΔQ при $\Delta r \to 0$ будет $2\pi r \cdot \Delta r$; это и есть дифференциал, dQ. Геометрически он выражает площадь прямоугольника (полученного как бы «выпрямлением» кольца) с основанием, равным длине окружности $2\pi r$, и высотой Δr.

2) Аналогично, для объема $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ шара радиуса r, при увеличении радиуса на Δr, получается приращение

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \cdot \Delta r + 4\pi r \cdot (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi (\Delta r)^3,$$

главной частью которого при $\Delta r \to 0$, очевидно, будет $dV = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$. Это — объем плоского слоя с основанием, равным поверхности шара $4\pi r^2$, и с высотой Δr; в подобный слой как бы «распластывается» слой, содержащийся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями радиусов r и $r + \Delta r$.

---

*) Здесь df как единый символ играет роль функционального обозначения.

3) Наконец, рассмотрим свободное падение материальной точки, по закону $s=\frac{gt^2}{2}$. За промежуток времени Δt, от t до $t+\Delta t$, движущаяся точка пройдет путь

$$\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

При $\Delta t\to 0$ его главной частью будет $ds=gt\cdot\Delta t$. Вспомнив, что скорость в момент t будет $v=gt$ [**90**], видим, что дифференциал пути (приближенно заменяющий приращение пути) вычисляется как путь, пройденный точкой, которая в течение всего промежутка времени Δt двигалась бы именно с этой скоростью.

104. Связь между дифференцируемостью и существованием производной. Легко установить теперь справедливость следующего утверждения:

Для того чтобы функция $y=f(x)$ в точке x_0 была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этой точке существовала конечная производная $y'=f'(x_0)$. При выполнении этого условия равенство (1) *имеет место при значении постоянной A, равном именно этой производной:*

$$\Delta y=y'_x\Delta x+o(\Delta x). \tag{1a}$$

Необходимость. Если выполняется (1), то отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

так что, устремляя Δx к 0, действительно, получаем

$$A=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x.$$

Достаточность сразу вытекает из **96**, 1° [см. там (3а)].

Итак, *дифференциал функции $y=f(x)$ всегда равен* *)

$$dy=y'_x\cdot\Delta x. \tag{2}$$

Подчеркнем здесь же, что под Δx в этом выражении мы разумеем произвольное приращение независимой переменной, т. е. произвольное число (которое часто удобно бывает считать не зависящим от x). При этом вовсе не обязательно предполагать Δx бесконечно малой; но если $\Delta x\to 0$, то дифференциал dy также будет бесконечно малой, и именно (при $y'_x\neq 0$) — главной частью

*) Легко проверить, что именно так и составлялся дифференциал во всех случаях, рассмотренных в предыдущем n°. Например, в случае 1), имеем:

$$Q=\pi r^2,\quad Q'_r=2\pi r,\quad dQ=2\pi r\cdot\Delta r,$$

и т. д.

бесконечно малого приращения функции Δy. Это и дает основание приближенно полагать

$$\Delta y \doteq dy, \qquad (3)$$

с тем большей точностью, чем меньше Δx. Мы вернемся к рассмотрению приближенного равенства (3) в **107**.

Чтобы истолковать геометрически дифференциал dy и его связь с приращением Δy функции $y=f(x)$, рассмотрим график этой функции (рис. 44). Значением x аргумента и y функции определится точка M на кривой. Проведем в этой точке кривой касательную MT; как мы уже видели [92], ее угловой коэффициент, $\operatorname{tg}\alpha$, равен производной y'_x. Если абсциссе x придать приращение Δx, то ордината кривой y получит приращение $\Delta y = NM_1$. В то же время ордината касательной получит приращение NK. Вычисляя NK как катет прямоугольного треугольника MNK, найдем:

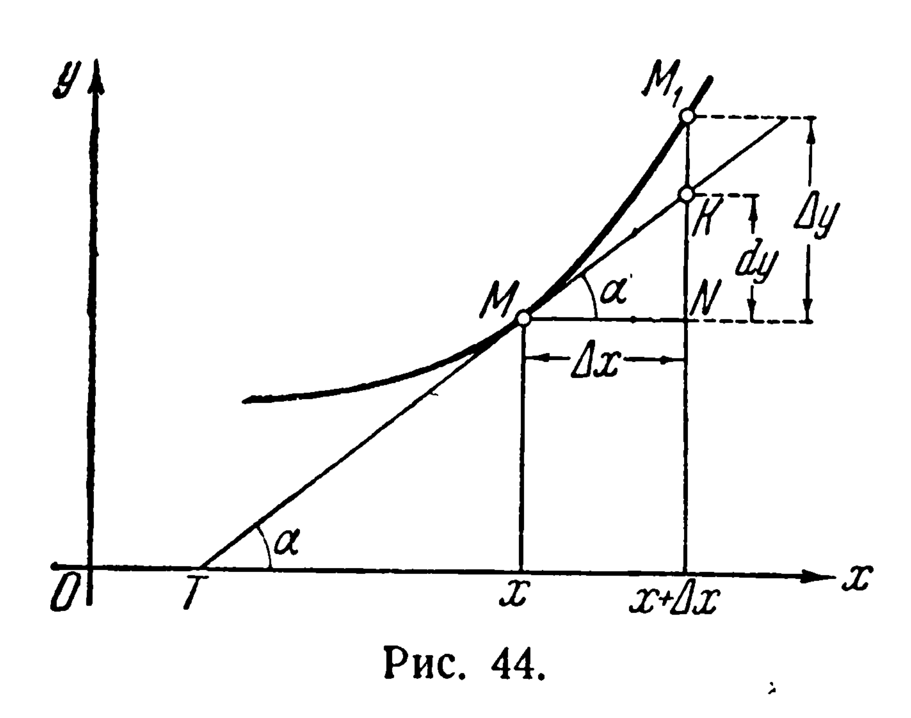


Рис. 44.

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

Итак, в то время как Δy есть приращение ординаты кривой, dy является соответственным приращением ординаты касательной.

В заключение остановимся на самой независимой переменной x: ее дифференциалом называют именно приращение Δx, т. е. условно полагают

$$dx = \Delta x. \qquad (4)$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y=x$ (в этом — тоже своего рода соглашение!), то формулу (4) можно и доказать, ссылаясь на (2): $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Учитывая соглашение (4), можно теперь переписать формулу (2), дающую определение дифференциала, в виде

$$dy = y'_x \cdot dx \qquad (5)$$

— так ее обычно и пишут.

Отсюда получается

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \qquad (6)$$

так что выражение, которое мы раньше рассматривали как цельный символ, теперь можно трактовать как дробь. То обстоятельство, что слева здесь стоит вполне определенное число, в то

время как справа мы имеем отношение двух неопределенных чисел dy и dx (ведь $dx = \Delta x$ произвольно), не должно смущать читателя: числа dx и dy изменяются пропорционально, причем производная y'_x как раз является коэффициентом пропорциональности.

Понятие дифференциала и самый термин «дифференциал» *) принадлежат Лейбницу, который не дал, однако, точного определения этого понятия. Наряду с дифференциалами, Лейбниц рассматривал и «дифференциальные частные», т. е. частные двух дифференциалов, что равносильно нашим производным; однако именно дифференциал был для Лейбница первоначальным понятием. Со времени Коши, который своей теорией пределов создал фундамент для всего анализа и впервые отчетливо определил производную как предел, стало обычным отправляться именно от производной, а понятие дифференциала строить уже на основе производной.

105. Основные формулы и правила дифференцирования. Вычисление дифференциалов функций носит название дифференцирования **). Так как дифференциал dy лишь множителем dx отличается от производной y'_x, то по таблице производных для элементарных функций [95] легко составить таблицу дифференциалов для них:

1. $y = c$	$dy = 0$
2. $y = x^{\mu}$	$dy = \mu x^{\mu-1} \cdot dx$
$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x$	$dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$
$y = e^x$	$dy = e^x \cdot dx$
4. $y = \log_a x$	$dy = \frac{\log_a e \cdot dx}{x}$
$y = \ln x$	$dy = \frac{dx}{x}$
5. $y = \sin x$	$dy = \cos x \cdot dx$
6. $y = \cos x$	$dy = -\sin x \cdot dx$
7. $y = \operatorname{tg} x$	$dy = \sec^2 x \cdot dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$

*) От латинского слова differentia, означающего «разность».

**) Впрочем, тем же термином обычно обозначают и вычисление производных, для которого на русском языке нет особого термина. В большинстве иностранных языков для обозначения этих операций существуют два различных термина; например, по-французски различают «dérivation» и «différentiation».

8. $y = \operatorname{ctg} x$ $\quad dy = -\csc^2 x \cdot dx = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

9. $y = \arcsin x$ $\quad dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y = \arccos x$ $\quad dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \operatorname{arctg} x$ $\quad dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$

12. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\quad dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

Правила дифференцирования*) выглядят так:

I. $d(cu) = c \cdot du$,

II. $d(u \pm v) = du \pm dv$,

III. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$,

IV. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Все они легко получаются из соответствующих правил для производных. Докажем, например, два последних:

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' \cdot dx = (u' \cdot v + u \cdot v')\, dx = \\ = v \cdot (u' \cdot dx) + u \cdot (v' \cdot dx) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot dx = \frac{v \cdot (u' \cdot dx) - u \cdot (v' \cdot dx)}{v^2} = \\ = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

106. Инвариантность формы дифференциала. Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то — по правилу V [98] — существует и производная

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{7}$$

Дифференциал dy, если x считать независимой переменной, выразится по формуле (5). Перейдем теперь к независимой переменной t; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

*) Если речь идет именно о вычислении дифференциалов.

Заменяя, однако, производную y'_t ее выражением (7) и замечая, что $x'_t \cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t, окончательно получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t\,dt = y'_x \cdot dx,$$

т. е. вернемся к прежней форме дифференциала!

Таким образом, мы видим, что *форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.* Мы всегда имеем право писать дифференциал y в форме (5), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t, то dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. Это свойство и называют инвариантностью формы дифференциала.

Так как из формулы (5) непосредственно получается формула (6), выражающая производную y'_x через дифференциалы dx и dy, то и последняя формула сохраняет силу, по какой бы независимой переменной (конечно, одной и той же в обоих случаях) ни были вычислены названные дифференциалы.

Пусть, например, $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$, так что

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Положим теперь $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, и мы будем иметь: $dx = \cos t \cdot dt$, $dy = -\sin t \cdot dt$. Легко проверить, что формула

$$y'_x = \frac{-\sin t \cdot dt}{\cos t \cdot dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

дает лишь другое выражение для вычисленной выше производной.

Этим обстоятельством особенно удобно пользоваться в случаях, когда зависимость y от x не задана непосредственно, а вместо этого задана зависимость обеих переменных x и y от некоторой третьей, вспомогательной, переменной (называемой параметром):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{8}$$

Предполагая, что обе эти функции имеют производные и что для первой из них существует обратная функция $t = \theta(x)$, имеющая производную [**83, 94**], легко видеть, что тогда и y оказывается функцией от x:

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x), \tag{9}$$

для которой также существует производная. Вычисление этой производной может быть выполнено по указанному выше правилу:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{10}$$

не восстанавливая непосредственной зависимости y от x.

Например, если $x = \sin t$, $y = \cos t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, то производную y'_x можно определить, как это сделано выше, не пользуясь вовсе зависимостью $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Если рассматривать x и y как прямоугольные координаты точки на плоскости, то уравнения (8) каждому значению параметра t ставят в соответствие некоторую точку, которая с изменением t описывает кривую на плоскости. Уравнения (8) называются *параметрическими уравнениями* этой кривой.

В случае параметрического задания кривой, формула (10) позволяет непосредственно по уравнениям (8) установить угловой коэффициент касательной, не переходя к заданию кривой уравнением (9); именно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{11}$$

Замечание. Возможность выражать производную через дифференциалы, взятые по любой переменной, в частности, приводит к тому, что формулы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

выражающие в лейбницевых обозначениях правила дифференцирования обратной функции и сложной функции, становятся простыми алгебраическими тождествами (поскольку все дифференциалы здесь могут быть взяты по одной и той же переменной). Не следует думать, впрочем, что этим дан новый вывод названных формул: прежде всего, здесь не доказывалось *существование* производных слева, главное же — мы существенно пользовались инвариантностью формы дифференциала, которая сама есть следствие правила V.

107. Дифференциалы как источник приближенных формул. Мы видели, что при $\Delta x \to 0$ дифференциал dy функции y (если только $y'_x \neq 0$) представляет собой *главную часть* бесконечно малого приращения функции Δy. Таким образом, $\Delta y \sim dy$, так что

$$\Delta y \doteq dy, \tag{3}$$

или подробнее

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{3a}$$

с точностью до бесконечно малой высшего порядка, чем Δx. Это значит [62], что *относительная* погрешность этого равенства становится сколь угодно малой при достаточно малом Δx.

Рассмотрим простой пример: пусть $y = x^3$. Тогда

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3,$$

и линейной частью Δy (как мы это выше установили в общем виде), действительно, является дифференциал $dy = 3x_0^2 \cdot \Delta x = y'_x \cdot \Delta x$. Положим конкретно $x_0 = 2{,}3$; если взять $\Delta x = 0{,}1$, то будем иметь $\Delta y = 2{,}4^3 - 2{,}3^3 = 1{,}657$ и $dy = 3 \cdot 2{,}3^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}587$, так что погрешность от замены первого числа вторым будет 0,070, а *относительная* погрешность превысит 4%. При $\Delta x = 0{,}01$ получим $\Delta y = 0{,}159391$ и $dy = 0{,}1587$, что дает *относительную* погрешность, уже меньшую 0,5%; при $\Delta x = 0{,}001$ — *относительная* погрешность меньше 0,05% и т. д.

Подобное же обстоятельство может быть и непосредственно усмотрено из рис. 44, дающего геометрическое истолкование дифференциала. На графике видно, что при уменьшении Δx мы, действительно, все с большей *относительной* точностью можем заменять приращение ординаты кривой приращением ординаты касательной.

Выгода замены приращения функции Δy ее дифференциалом dy состоит, как ясно читателю, в том, что dy зависит от Δx *линейно*, в то время как Δy представляет собою обыкновенно более сложную функцию от Δx.

Если положить $\Delta x = x - x_0$ и $x_0 + \Delta x = x$, то равенство (3а) примет вид

$$f(x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

или

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

По этой формуле, для значений x, близких к x_0, функция $f(x)$ приближенно заменяется *линейной* функцией. Геометрически это соответствует замене участка *кривой* $y = f(x)$, примыкающего к точке $(x_0, f(x_0))$, отрезком *касательной* к кривой в этой точке:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,^{*)}$$

(ср. рис. 44). Взяв для простоты $x_0 = 0$ и ограничиваясь малыми значениями x, будем иметь приближенную формулу:

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0) \cdot x.$$

---

*) Действительно, уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (x_0, y_0), будет

$$y = y_0 + k(x - x_0);$$

в случае касательной здесь следует положить $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$.

Отсюда, подставляя вместо $f(x)$ различные элементарные функции, легко получить ряд формул:

$$(1+x)^{\mu} \doteq 1+\mu x, \quad \text{в частности,} \quad \sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x,$$

$$e^x \doteq 1+x, \quad \ln(1+x) \doteq x, \quad \sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x, \quad \text{и т. п.}$$

(из которых многие нам уже известны).

Приведем примеры приближенных формул другого типа, также имеющих своим источником равенство (3).

1) Если длину тяжелой нити (провода, каната, ремня), подвешенной за оба конца, обозначить через $2s$, пролет — через $2l$, а стрелу провеса — через f (рис. 45), то для вычисления s часто пользуются (приближенной) формулой

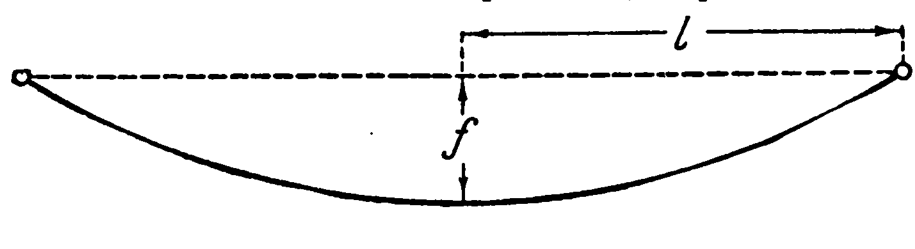


Рис. 45.

$$s = l\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right).$$

Величину f здесь будем считать независимой переменной, а s — функцией от f. Требуется установить связь между изменением Δs длины s и изменением Δf стрелы провеса f.

Заменяя Δs на ds, получим

$$\Delta s \doteq \frac{4}{3}\,\frac{f}{l}\cdot\Delta f, \quad \text{откуда} \quad \Delta f \doteq \frac{3}{4}\,\frac{l}{f}\cdot\Delta s.$$

Если, например, учесть изменение длины провода от изменения температуры или нагрузки, то отсюда можно предусмотреть и изменение стрелы провеса.

2) Известно, что круговой ток (рис. 46) действует на единицу так называемого «магнитного заряда», помещенную на его оси на расстоянии x от центра O, с силой

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где k — постоянный коэффициент, a — радиус. Найти выражение для силы с какой круговой ток будет действовать на магнит NS длины Δx, расположенный по оси тока. При этом будем считать, что в полюсе N сосредоточен положительный «магнитный заряд» m, а в полюсе S — равный ему отрицательный «магнитный заряд» — m.

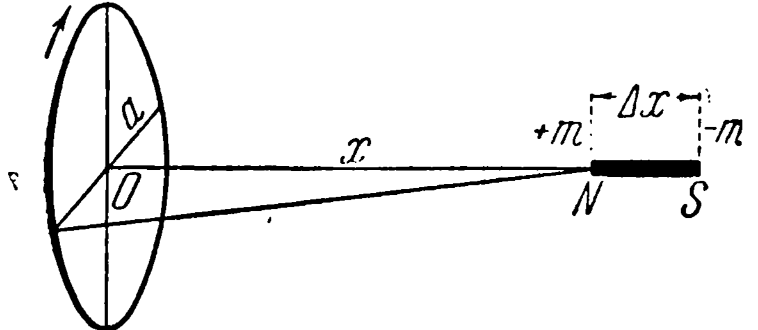


Рис. 46.

Общая сила F действия тока на магнит выразится так:

$$F = \frac{km}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{km}{[a^2+(x+\Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}} = -km\cdot\Delta\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Заменяя приращение функции (в предположении, что Δx мало) ее дифференциалом, получим

$$F \doteq -km\cdot d\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 3k\cdot m\Delta x\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

108. Применение дифференциалов при оценке погрешностей. Особенно удобно и естественно использовать понятие дифференциала в приближенных

вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, например, величину x мы измеряем или вычисляем непосредственно, а зависящую от нее величину y определяем по формуле: $y=f(x)$. При измерении величины x обыкновенно вкрадывается погрешность, Δx, которая влечет за собою погрешность Δy для величины y. Ввиду малой величины этих погрешностей, полагают

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

т. е. заменяют приращение дифференциалом. Пусть δx будет максимальной абсолютной погрешностью величины x: $|\Delta x| \leqslant \delta x$ (в обычных условиях подобная граница погрешности при измерении известна). Тогда, очевидно, за максимальную абсолютную погрешность (границу погрешности) для y можно принять

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x. \tag{12}$$

1) Пусть, например, для определения объема шара сначала (с помощью штангенциркуля, толщемера, микрометра и т. п.) непосредственно измеряют диаметр D шара, а затем объем V вычисляют по формуле

$$V = \frac{\pi}{6} D^3.$$

Так как $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$, то в этом случае, в силу (12),

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

Разделив это равенство на предыдущее, получим

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D},$$

так что (максимальная) относительная погрешность вычисленного значения объема оказывается втрое большей, чем (максимальная) относительная погрешность измеренного значения диаметра.

2) Если число x, для которого вычисляется его десятичный логарифм $y = \log x$, получено с некоторой погрешностью, то это отразится на логарифме, создавая и в нем погрешность.

Здесь $y'_x = \frac{M}{x}$ ($M \doteq 0{,}4343$), так что, по формуле (12),

$$\delta y = 0{,}4343 \cdot \frac{\delta x}{x}.$$

Таким образом, (максимальная) абсолютная погрешность логарифма просто определяется по (максимальной) относительной погрешности самого числа, и обратно.

Этот результат имеет многообразные применения. Например, с его помощью можно составить себе представление о точности обыкновенной логарифмической линейки, со шкалой в 25 *см* = 250 *мм*. При отсчете или установке визира можно ошибиться, примерно, на 0,1 *мм* в ту или другую сторону, что отвечает погрешности в логарифме

$$\delta y = \frac{0{,}1}{250} = 0{,}0004.$$

Отсюда, по нашей формуле,

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0{,}0004}{0{,}4343} = 0{,}00092\ldots \doteq 0{,}001.$$

Относительная точность отсчетов во всех частях шкалы одна и та же!

3) При вычислении угла φ по логарифмо-тригонометрическим таблицам встает вопрос, какими таблицами выгоднее пользоваться — таблицами синусов или тангенсов. Положим

$$y_1 = \log\sin\varphi \quad \text{и} \quad y_2 = \log \operatorname{tg}\varphi$$

и будем считать максимальные погрешности δy_1 и δy_2 равными (скажем, половине последнего знака мантиссы). Если обозначить соответствующие максимальные погрешности в угле φ через $\delta_1\varphi$ и $\delta_2\varphi$, то, как и выше, получим:

$$\delta y_1 = \frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\delta_1\varphi,$$

$$\delta y_2 = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi\cdot\delta_2\varphi,$$

так что

$$\delta_2\varphi = \delta_1\varphi\cdot\cos^2\varphi < \delta_1\varphi.$$

Таким образом оказывается, что при одинаковых ошибках в логарифме таблица тангенсов дает меньшую погрешность в угле, чем таблица синусов, и, стало быть, является более выгодной *).

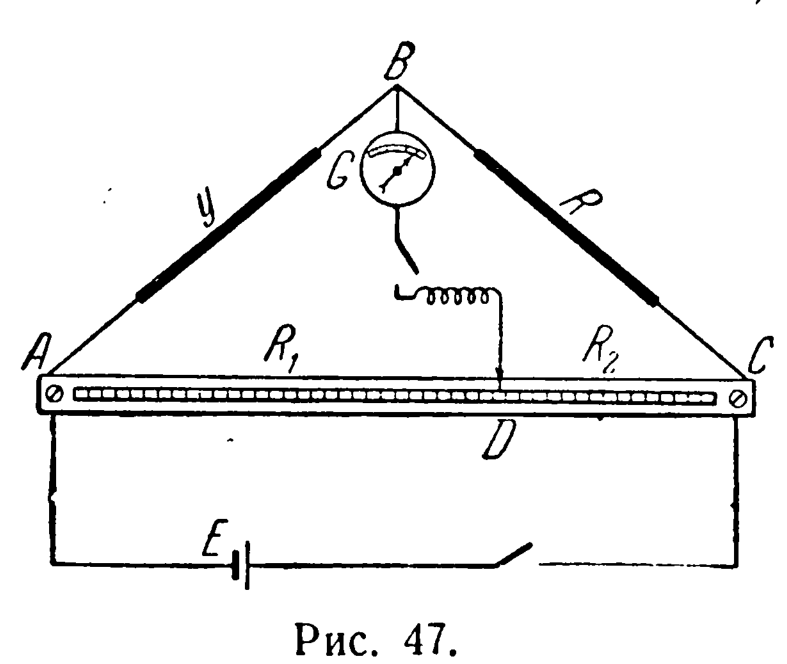


Рис. 47.

4) В качестве последнего примера рассмотрим вопрос о точности измерения неизвестного сопротивления y с помощью мостика Уитстона (рис. 47). При этом подвижной контакт D передвигается по градуированной линейке AC до тех пор, пока гальванометр G не покажет отсутствие тока. Сопротивление y определяется по формуле

$$y = \frac{Rx}{a-x}, \tag{13}$$

где $a = AC$, $x = AD$, R — известное сопротивление ветви BC.

По формуле (12) получается:

$$\delta y = \left(\frac{Rx}{a-x}\right)'_x\cdot\delta x = \frac{aR}{(a-x)^2}\cdot\delta x;$$

если разделить почленно это равенство на равенство (13), то получим выражение (максимальной) относительной погрешности для y;

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{a\cdot\delta x}{x(a-x)}.$$

Так как знаменатель $x(a-x)$ достигает своего наибольшего значения при $x = \frac{a}{2}$ **), а погрешность δx при измерении длины можно считать не

*) При этих выкладках мы предполагали углы выраженными в радианах, но результаты, очевидно, справедливы безотносительно к тому, какой единицей измеряются углы.

**) Из очевидного неравенства

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

непосредственно получаем

$$x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4},$$

что и доказывает наше утверждение.

зависящей от x, то наименьшее значение для относительной погрешности достигается именно при $x=\frac{a}{2}$. Поэтому обыкновенно, для получения возможно точного результата, сопротивление R (с помощью магазина сопротивлений) устанавливается с таким расчетом, чтобы ток исчезал при положении контакта D, возможно более близком к середине линейки AC.

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

109. Теорема Ферма. Знание производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$. Вопросам этого рода и будут, в сущности, посвящены настоящий параграф и следующие за ним.

Предварительно докажем простую лемму:

Лемма. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0. Если эта производная $f'(x_0)>0$ $[f'(x_0)<0]$, то для значений x, достаточно близких к x_0 справа, будет $f(x)>f(x_0)$ $[f(x)<f(x_0)]$, а для значений x, достаточно близких к x_0 слева, будет $f(x)<f(x_0)$ $[f(x)>f(x_0)]$.

Иными словами этот факт выражают так: *функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает (убывает).* Если имеется в виду односторонняя производная, например, справа, то сохраняет силу лишь утверждение о значениях x, лежащих справа от x_0.

Доказательство. По определению производной,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Если $f'(x_0)>0$ (ограничимся этим случаем), то, в силу **55**, 2°, найдется такая окрестность $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0, в которой (при $x\neq x_0$)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Пусть сначала $x_0<x<x_0+\delta$, так что $x-x_0>0$; из предыдущего неравенства следует тогда, что $f(x)-f(x_0)>0$, т. е. $f(x)>f(x_0)$. Если же $x_0-\delta<x<x_0$ и $x-x_0<0$, то, очевидно, и $f(x)-f(x_0)<0$, т. е. $f(x)<f(x_0)$. Лемма доказана.

Теорема Ферма. (P. Fermat) *Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathscr{X}$ и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная $f'(c)$ в этой точке, то необходимо $f'(c)=0$* *).

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке c. Предположение, что $f'(c)\neq 0$,

*) Это утверждение, разумеется, воспроизводит лишь сущность того приема, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (Ферма не располагал понятием производной).

приводит к противоречию: либо $f'(c)>0$, и тогда (по лемме) $f(x)>f(c)$, если $x>c$ и достаточно близко к c, либо $f'(c)<0$, и тогда $f(x)>f(c)$, если $x<c$ и достаточно близко к c. В обоих случаях $f(c)$ не может быть наибольшим значением функции $f(x)$ в промежутке $\mathscr{X}$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Вспомним [**91**, **92**] геометрическое истолкование производной $y'=f'(x)$ как углового коэффициента касательной к кривой $y=f(x)$. Обращение в нуль производной $f'(c)$ геометрически означает, что в соответствующей точке этой кривой касательная параллельна оси x. Рис. 48 делает это обстоятельство совершенно наглядным.

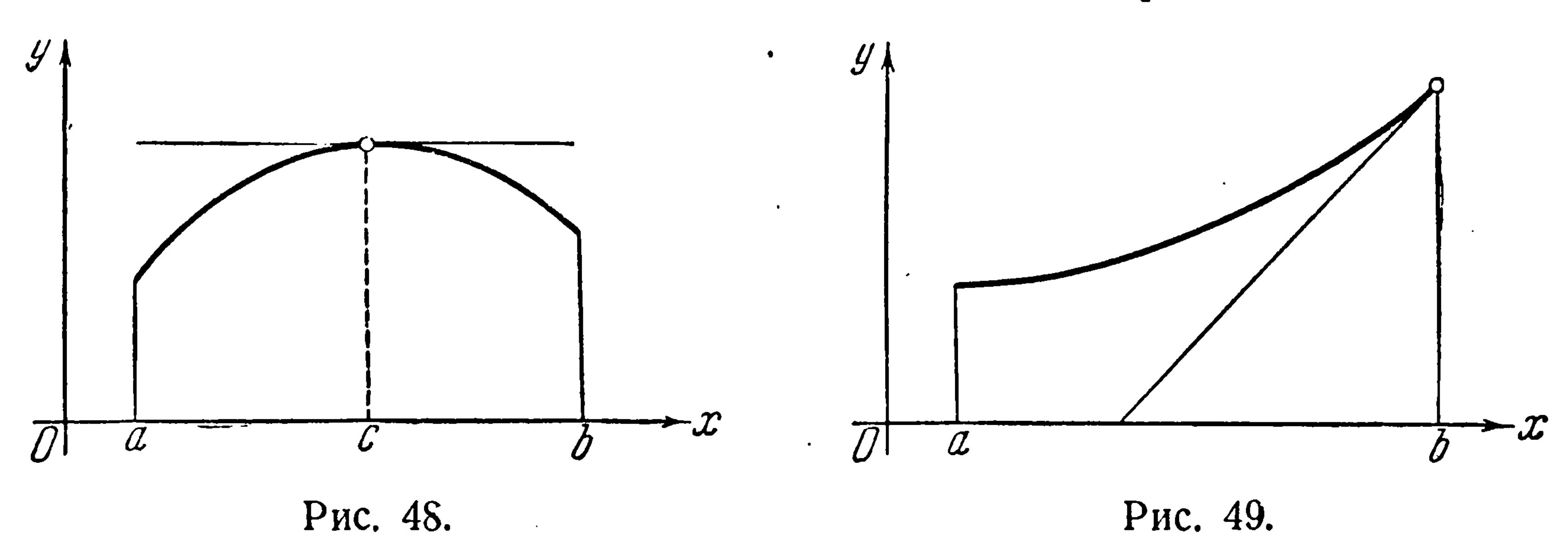


Рис. 48. Рис. 49.

В доказательстве с у щ е с т в е н н о было использовано предложение, что c является внутренней точкой промежутка, так как нам пришлось рассматривать и точки x с п р а в а от c, и точки x с л е в а от c. Без этого предположения теорема перестала бы быть верной: если функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке и достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на одном из концов этого промежутка, то производная $f'(x)$ на этом конце (если существует) может и не быть нулем. Предоставляем читателю подыскать соответствующий пример; геометрически этот факт иллюстрируется рисунком 49.

В качестве приложения теоремы Ф е р м а докажем одну любопытную теорему о производной функции.

110. *Теорема Дарбу* (G. Darboux). *Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в промежутке $[a, b]$* *), *то функция $f'(x)$ принимает, в качестве значения, каждое промежуточное число между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сперва предположим, что $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки, например, что $f'(a)>0$, а $f'(b)<0$, и докажем существование точки c между a и b, в которой производная обращается в нуль. В самом деле, из существования конечной произ-

*) При этом мы считаем, что в точке a существует производная с п р а в а, а в точке b — производная с л е в а. Они в дальнейшем обозначаются просто $f'(a)$ и $f'(b)$.

водной $f'(x)$ следует непрерывность функции $f(x)$ [**96**, 2°], а тогда, по 2-й теореме Вейерштрасса [**85**], $f(x)$ принимает в некоторой точке c свое наибольшее значение. Эта точка c не может совпадать ни с a, ни с b, так как, согласно лемме, $f(x)$ больше $f(a)$ вблизи точки a (справа) и больше $f(b)$ вблизи точки b (слева). Итак, $a<c<b$. Тогда, по теореме Ферма, получаем $f'(c)=0$.

Переходя к общему случаю, возьмем любое число C, заключенное между $f'(a)$ и $f'(b)$; пусть, для определенности, $f'(a)>C>f'(b)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-Cx$; она непрерывна и имеет производную $\varphi'(x)=f'(x)-C$ в промежутке $[a, b]$.

Так как $\varphi'(a)=f'(a)-C>0$, а $\varphi'(b)=f'(b)-C<0$, то по доказанному, существует такая точка $c\,(a<c<b)$, в которой

$$\varphi'(c)=f'(c)-C=0, \quad \text{т. е.} \quad f'(c)=C.$$

Доказанная теорема имеет большое сходство со 2-й теоремой Коши [**82**], согласно которой всякая непрерывная функция переходит от одного значения к другому, лишь переходя через все промежуточные числа. Однако, теорема Дарбу отнюдь не является следствием теоремы Коши, так как производная $f'(x)$ непрерывной функции сама может и не быть непрерывной функцией.

111. Теорема Ролля. В основе многих теорем и формул дифференциального исчисления и его приложений лежит следующая простая, но важная теорема, связываемая с именем Ролля (M. Rolle)*).

Теорема Ролля. *Пусть* 1) *функция* $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$; 2) *существует конечная производная* $f'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b); 3) *на концах промежутка функция принимает равные значения:* $f(a)=f(b)$.

Тогда между a *и* b *найдется такая точка,* c $(a<c<b)$, *что* $f'(c)=0$.

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и потому, по 2-й теореме Вейерштрасса [**85**], принимает в этом промежутке как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m.

Рассмотрим два случая:

1. $M=m$. Тогда $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение: в самом деле, неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$ в этом случае дает $f(x)=M$ при всех x; поэтому $f'(x)=0$ во всем промежутке, так что в качестве c можно взять любую точку из (a, b).

2. $M>m$. Мы знаем, что оба эти значения функцией достигаются, но, так как $f(a)=f(b)$, то хоть одно из них достигается в некоторой точке c между a и b. В таком случае из теоремы Ферма

*) В действительности Ролль высказал это утверждение лишь для многочленов.

следует, что производная $f'(c)$ в этой точке обращается в нуль. Теорема доказана.

На геометрическом языке теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y=f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси x (рис. 50).

Рис. 50.

Обращаем внимание на то, что непрерывность функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a, b]$ и существование производной во всем открытом промежутке (a, b) существенны для верности заключения теоремы. Функция $f(x) = x - E(x)$ удовлетворяет в промежутке $[0, 1]$ всем условиям теоремы, за исключением того, что имеет разрыв при $x=1$, а производная $f'(x)=1$ везде в $(0, 1)$. Функция, определяемая равенствами $f(x)=x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ и $f(x)=1-x$ при $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, также удовлетворяет всем условиям в том же промежутке, исключая лишь то обстоятельство, что при $x=\frac{1}{2}$ не существует (двухсторонней) производной; в то же время производная $f'(x)$ равна $+1$ в левой половине промежутка и -1 в правой.

Точно так же существенно и условие 3) теоремы: функция $f(x)=x$ в промежутке $[0, 1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы, кроме условия 3), а ее производная $f'(x)=1$ повсюду.

Чертежи предоставляем читателю.

112. Формула Лагранжа. Обратимся к непосредственным следствиям теоремы Ролля.

Теорема Лагранжа. *Пусть* 1) $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$, 2) *существует конечная производная* $f'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b) *). *Тогда между* a *и* b *найдется такая точка* c $(a < c < b)$, *что для нее выполняется равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{1}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a, b]$ равенством:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

*) Конечно, непрерывность функции $f(x)$ в (a, b), предположенная в 1), уже следует из 2), но мы ни здесь, ни в последующем не ставим себе целью расчленять условие теоремы на взаимно независимые предположения.

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна в $[a, b]$, так как представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. В промежутке (a, b) она имеет определенную конечную производную, равную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Наконец, непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $F(a) = F(b) = 0$, т. е. $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка.

Следовательно, к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля и утверждать существование в (a, b) такой точки c, что $F'(c) = 0$. Таким образом,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

откуда

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ч. и тр. д.

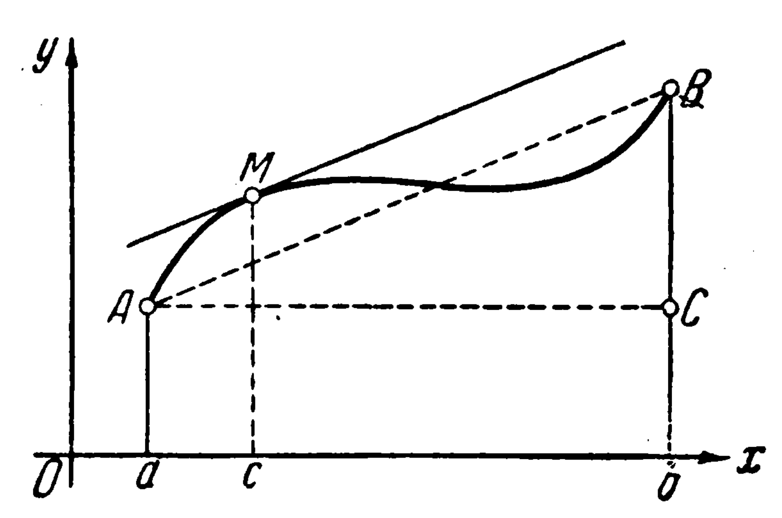


Рис. 51.

Доказанную теорему называют также *теоремой о среднем значении* (в дифференциальном исчислении).

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа; замечания относительно условий 1) и 2) теоремы, сделанные выше, сохраняют свою силу и здесь.

Обращаясь к геометрическому истолкованию теоремы Лагранжа (рис. 51), заметим, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{CB}{AC}$$

есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$. Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная *параллельна* хорде AB.

Доказанная формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \text{или} \quad f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$$

носит название *формулы Лагранжа* или *формулы конечных приращений*. Она, очевидно, сохраняет силу и для случая $a > b$.

Возьмем любое значение x_0 в промежутке $[a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \gtrless 0$, не выводящее его за пределы промежутка.

Применим формулу Лагранжа к промежутку $[x_0,\ x_0+\Delta x]$ при $\Delta x>0$ или к промежутку $[x_0+\Delta x,\ x_0]$ при $\Delta x<0$. Число c, заключенное в этом случае между x_0 и $x_0+\Delta x$, можно представить так:

$$c=x_0+\theta\cdot\Delta x, \quad \text{где} \quad 0<\theta<1\ ^{*)}.$$

Тогда формула Лагранжа примет вид:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\,\Delta x) \tag{1a}$$

или

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$$
$$=f'(x_0+\theta\,\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \tag{2}$$

Это равенство, дающее точное выражение для приращения функции при любом конечном приращении Δx аргумента, естественно противопоставляется приближенному равенству [**107**, (3а)]:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

относительная погрешность которого стремится к нулю лишь при бесконечно малом Δx. Отсюда проистекает и самое название «формула конечных приращений».

К невыгоде формулы Лагранжа — в ней фигурирует неизвестное нам число θ **) (или c). Это не мешает, однако, многообразным применениям этой формулы в анализе.

113. Предел производной. Полезный пример такого применения дает следующее замечание. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0,\ x_0+H]$ $(H>0)$ и имеет конечную производную $f'(x)$ для $x>x_0$. Если существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=K,$$

то такова же будет и производная в точке x_0 справа. Действительно, при $0<\Delta x\leqslant H$ имеем (1а). Если $\Delta x\to 0$, то — ввиду ограниченности величины θ — аргумент производной $x_0+\theta\,\Delta x$ стремится к x_0, так что правая часть равенства, а с нею и левая стремится к пределу K, ч. и тр. д. Аналогичное утверждение устанавливается и для левосторонней окрестности точки x_0.

---

*) Иногда говорят, что θ есть «правильная дробь»; не следует только думать, что речь идет о рациональной дроби — число θ может оказаться и иррациональным.

**) Лишь в немногих случаях мы можем его установить; например, для квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$, как легко проверить, имеем $\theta=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

в промежутке $[-1, 1]$. Если $-1 < x < 1$, то по обычным правилам дифференциального исчисления легко найти:

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

При $x \to 1-0$ $(x \to -1+0)$ эта производная, очевидно, стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; значит и при $x = \pm 1$ существуют (односторонние) производные

$$f'(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Часто сделанное замечание применяется при следующих обстоятельствах: из того факта, что найденное для производной выражение *стремится* к $+\infty$ $(-\infty)$ при приближении x к x_0 *с той или другой стороны*, делается заключение, что в самой точке x_0 соответствующая *односторонняя* производная *равна* $+\infty$ $(-\infty)$.

Например, если вернуться к функциям $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ и $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$, которые мы рассматривали в n° **101**, то для них (при $x \gtrless 0$) имеем:

$$f_1'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}, \quad f_2'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Так как первое из этих выражений при $x \to \pm 0$ стремится к $+\infty$, а второе при $x \to +0$ или при $x \to -0$ имеет, соответственно, пределы $+\infty$ или $-\infty$, то заключаем, что для $f_1(x)$ в точке $x = 0$ существует двусторонняя производная: $+\infty$, в то время как для $f_2(x)$ в этой точке существуют лишь односторонние производные: $+\infty$ справа и $-\infty$ слева.

Из сказанного вытекает также, что, если конечная производная $f'(x)$ существует в некотором промежутке, то она представляет собою функцию, которая не может иметь обыкновенных разрывов или скачков: в каждой точке она либо непрерывна, либо имеет разрыв 2-го рода [ср. **102**, 2°].

114. Формула Коши. Формула конечных приращений *обобщается* следующим образом:

Теорема Коши. *Пусть* 1) *функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a, b]$;* 2) *существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке (a, b);* 3) *$g'(x) \neq 0$ в промежутке (a, b).*

Тогда между a и b найдется такая точка c $(a < c < b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

Эта формула носит название *формулы Коши.*

Доказательство. Установим сперва, что знаменатель левой части нашего равенства не равен нулю, так как в противном случае выражение это не имело бы смысла. Если бы было $g(b)=g(a)$, то, по теореме Ролля, производная $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию 3); значит $g(b)\neq g(a)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна в $[a, b]$, так как непрерывны $f(x)$ и $g(x)$; производная $F'(x)$ существует в (a, b), именно, она равна

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x).$$

Наконец, прямой подстановкой убеждаемся, что $F(a)=F(b)=0$. Вследствие этого в промежутке (a, b) существует такая точка c, что $F'(c)=0$. Иначе говоря,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

или

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

Разделив на $g'(c)$ (это возможно, так как $g'(c)\neq 0$), получаем требуемое равенство.

Ясно, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений из формулы Коши следует положить $g(x)=x$. Теорему Коши называют обобщенной теоремой о среднем значении (в дифференциальном исчислении).

Геометрическая иллюстрация теоремы Коши — та же, что и для теоремы Лагранжа. Чтобы читателю легче было это усмотреть, перейдем к другим обозначениям: x заменим на t, а функции обозначим через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Если t изменяется в промежутке $[\alpha, \beta]$, то формула Коши напишется так:

$$\frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}=\frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)} \quad (\alpha<\gamma<\beta). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta). \tag{5}$$

Тогда левая часть формулы и здесь выражает угловой коэффициент хорды, соединяющей концы дуги этой кривой, а правая — угловой

коэффициент касательной в некоторой внутренней точке дуги, отвечающей $t=\gamma$ [**106**, (11)].

Замечание. Эти соображения подсказывают мысль о возможности вывести формулу Коши из формулы Лагранжа. Суть этого вывода в том, что вместо параметрической зависимости (5) устанавливают непосредственную зависимость: $y=f(x)$, и тогда формула (4) оказывается равнозначащей с (1).

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

115. Определение производных высших порядков. Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную $y'=f'(x)$ в некотором промежутке $\mathscr{X}$, так что эта последняя сама представляет новую функцию от x, то может случиться, что эта функция в некоторой точке x_0 из $\mathscr{X}$, в свою очередь, имеет производную, конечную или нет. Ее называют *производной второго порядка* или *второй производной* функции $y=f(x)$ в упомянутой точке, и обозначают одним из символов

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ D^2y;\quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\ f''(x_0),\ D^2f(x_0).$$

Так, например, мы видели в **92**, что скорость v движения точки равна производной от пройденного точкой пути s по времени t: $v=\frac{ds}{dt}$, ускорение же a есть производная от скорости v по времени: $a=\frac{dv}{dt}$. Значит, ускорение является *второй производной* от пути по времени: $a=\frac{d^2s}{dt^2}$.

Аналогично, если функция $y=f(x)$ имеет конечную вторую производную в целом промежутке $\mathscr{X}$ (т. е. в каждой точке этого промежутка), то ее производная, конечная или нет, в какой-либо точке x_0 из $\mathscr{X}$ называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* функции $y=f(x)$ в этой точке, и обозначается так:

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ y''',\ D^3y;\quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\ f'''(x_0),\ D^3f(x_0).$$

Подобным же образом от третьей производной переходим к четвертой и т. д. Если предположить, что понятие $(n-1)$-й производной уже определено и что $(n-1)$-я производная существует и конечна в промежутке $\mathscr{X}$, то ее производная в некоторой точке x_0 этого промежутка называется *производной n-го порядка* или *n-й производной* от исходной функции $y=f(x)$; для обозначения ее применяются символы:

$$\frac{d^ny}{dx^n},\ y^{(n)},\ D^ny;\quad \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\ f^{(n)}(x_0),\ D^nf(x_0).$$

Иной раз — при пользовании обозначениями Лагранжа или Коши — может возникнуть надобность в указании переменной, по которой берется производная; тогда ее пишут в виде значка внизу:

$$y''_{x^2}, \quad D^3_{x^3}y, \quad f^{(n)}_{x^n}(x_0), \text{ и т. п.,}$$

причем, x^2, x^3, ... есть условная сокращенная запись вместо xx, xxx, ... Например, можно написать: $a = s''_{t^2}$.

(Читателю ясно, что и здесь цельные символы

$$\frac{d^n f}{dx^n}, \; f^{(n)} \text{ или } f^{(n)}_{x^n}, \quad D^n f \text{ или } D^n_{x^n} f$$

можно рассматривать как функциональные обозначения.)

Таким образом, мы определили понятие n-ой производной, как говорят, индуктивно, переходя по порядку от первой производной к последующим. Соотношение, определяющее n-ю производную:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]',$$

называют также рекуррентным (или «возвратным»), поскольку оно «возвращает» нас от n-й к $(n-1)$-й производной.

Самое вычисление производных n-го порядка, при численно заданном n, производится по известным уже читателю правилам и формулам. Например, если

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2},$$

то

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3}, \quad y'' = 6x^2 - x + 4,$$

$$y''' = 12x - 1, \quad y^{IV} = 12,$$

так что все последующие производные равны тождественно 0. Или пусть

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$

тогда

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}, \text{ и т. д.}$$

Заметим, что по отношению к производным высших порядков так же, индуктивно, можно установить понятие односторонней производной [ср. **100**]. Если функция $y = f(x)$ определена лишь в некотором промежутке $\mathcal{X}$, то, говоря о производной любого порядка на конце его, всегда имеют в виду именно одностороннюю производную.

116. Общие формулы для производных любого порядка. Итак, для того, чтобы вычислить n-ю производную от какой-либо функции, вообще говоря, нужно предварительно вычислить производные всех

предшествующих порядков. Однако в ряде случаев удается установить такое общее выражение для n-й производной, которое зависит непосредственно от n и не содержит более обозначений предшествующих производных.

При выводе таких общих выражений иногда бывают полезны формулы:

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

обобщающие на случай высших производных известные читателю правила I и II n° **97**. Их легко получить последовательным применением этих правил.

1) Рассмотрим сначала степенную функцию $y = x^{\mu}$, где μ — любое вещественное число. Имеем последовательно:

$$y' = \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \ \ldots$$

Легко усмотреть отсюда и общий закон:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\ \ldots\ (\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

но, строго говоря, он еще подлежит доказательству. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Допустив, что для некоторого значения n эта формула верна, продифференцируем ее еще раз. Мы придем к результату:

$$[y^{(n)}]' = y^{(n+1)} = \mu(\mu-1)\ \ldots\ (\mu-n+1)[x^{\mu-n}]' =$$
$$= \mu(\mu-1)\ \ldots\ (\mu-n+1)(\mu-n)x^{\mu-(n+1)},$$

так что наша формула оказывается верной для $(n+1)$-й производной, если была верна для n-й. Отсюда и следует ее справедливость при всех натуральных значениях n.

Если, например, взять $\mu = -1$, то получим

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\ \ldots\ (-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}},$$

а при $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-n} =$$
$$= \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2x)^n\sqrt{x}}\ {}^{*)},$$

и т. п.

Когда само μ есть натуральное число m, то m-я производная от x^m будет уже постоянным числом $m!$, а все следующие —

*) Символом $n!!$ обозначают произведение натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним четности, так что, например,

$$7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10.$$

нулями. Отсюда ясно, что и для целого многочлена степени m имеет место аналогичное обстоятельство.

2) Для несколько более общего выражения

$$y=(a+bx)^{\mu} \quad (a,\ b=\text{const})$$

столь же легко найдем:

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\cdot b^n\cdot(a+bx)^{\mu-n}.$$

В частности, получается, как и выше,

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\, b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n (2n-1)!!\, b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

3) Пусть теперь $y=\ln x$. Прежде всего, имеем

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Возьмем отсюда производную $(n-1)$-го порядка по соответствующей формуле из 1), заменив в ней n на $n-1$; мы и получим тогда

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

4) Если $y=a^x$, то

$$y'=a^x\cdot\ln a, \qquad y''=a^x\cdot(\ln a)^2, \ \ldots$$

Общая формула

$$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$$

легко доказывается по методу математической индукции.

В частности, очевидно,

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

5) Положим $y=\sin x$; тогда

$$y'=\cos x, \quad y''=-\sin x, \quad y'''=-\cos x,$$
$$y^{\mathrm{IV}}=\sin x, \quad y^{\mathrm{V}}=\cos x, \ \ldots$$

На этом пути найти требуемое общее выражение для n-й производной трудно. Но дело сразу упрощается, если переписать формулу для первой производной в виде $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; становится ясным, что при каждом дифференцировании к аргументу будет прибавляться $\frac{\pi}{2}$, так что

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично получается и формула

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

6) Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x^2-a^2}$. Представив ее в виде

$$y=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

мы получаем возможность использовать пример 2) (и общие правила, указанные вначале). Окончательно,

$$\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{(n)}n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right].$$

7) В случае функции $y=e^{ax}\sin bx$ мы употребим более искусственный прием. Именно, имеем

$$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx;$$

если ввести вспомогательный угол φ, определяемый условиями

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

то выражение для первой производной можно переписать в виде:

$$y'=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot(\sin bx\cdot\cos\varphi+\cos bx\cdot\sin\varphi)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+\varphi).$$

Повторяя дифференцирование, легко установить общий закон

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+n\varphi)$$

и обосновать его по методу математической индукции.

8) Остановимся еще на функции $y=\operatorname{arctg}x$. Поставим себе сначала задачей выразить $y^{(n)}$ через y. Так как $x=\operatorname{tg}y$, то

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференцируя вторично по x (и помня, что y есть функция от x), получим

$$y''=\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$
$$=\cos^2 y\cdot\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Следующее дифференцирование дает

$$y'''=\left[-2\sin y\cdot\cos y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2 y\cdot\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$
$$=2\cos^3 y\cdot\cos\left(3y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^3 y\cdot\sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Общая формула:

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

оправдывается по методу математической индукции.

Если (при $x>0$) ввести угол

$$z=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-y,$$

то эта формула может быть переписана так:

$$y^{(n)}=(n-1)!\,\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin n(\pi-z)$$

или, наконец,

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin n\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

9) Установим в заключение, в виде упражнения, формулу

$$D^n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Справедливость ее при $n=1$ и $n=2$ проверяется непосредственно. Допустим теперь, что она верна для всех значений n вплоть до некоторого $n\geqslant 2$, и докажем, что тогда она сохранит верность и при замене n на $n+1$ *). С этой целью рассмотрим выражение

$$D^{n+1}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)=D^n\left[D\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)\right]=D^n\left[nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}}-x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}\right]=$$

$$=n\cdot D^n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)-D\left[D^{n-1}\left(x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right].$$

Пользуясь нашим допущением, можно переписать это выражение так:

$$D^{n+1}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)=n\cdot(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}-D\left[(-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right]=(-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}},\ \text{ч. и тр. д.}$$

Итак, формула верна для всех натуральных значений n.

117. Формула Лейбница. Как мы заметили в начале предыдущего n°, правила I и II, **97**, непосредственно переносятся и на случай производных любого порядка. Сложнее обстоит дело с правилом III, относящимся к дифференцированию произведения.

Предположим, что функции u, v от x имеют каждая в отдельности производные до n-го порядка включительно: докажем, что тогда их произведение $y=uv$ также имеет n-ю производную, и найдем ее выражение.

Станем, применяя правило III, последовательно дифференцировать это произведение; мы найдем:

$$y'=u'v+uv',\qquad y''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',\ \ldots$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома: $u+v$,

*) Обращаем внимание читателя на эту своеобразную форму применения метода математической индукции; в действительности (см. текст ниже) мы используем справедливость нашей формулы для n и для $n-1$.

$(u+v)^2, (u+v)^3, \ldots$, лишь вместо степеней u, v стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если в полученных формулах вместо u, v писать $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Распространяя этот закон на случай любого n, придем к общей формуле *):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} =$$
$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\ldots i}u^{(n-i)}v^{(i)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (1)$$

Для доказательства ее справедливости прибегнем снова к методу математической индукции. Допустим, что при некотором значении n она верна. Если для функций u, v существуют и $(n+1)$-е производные, то можно еще раз продифференцировать по x; мы получим:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}.$$

Объединим теперь слагаемые обеих последних сумм, содержащие одинаковые произведения производных функций u и v (сумма порядков производных в таком произведении, как легко видеть, равна всегда $n+1$). Произведение $u^{(n+1)}v^{(0)}$ входит только в первую сумму (при $i=0$); коэффициент его в этой сумме есть $C_n^0 = 1$. Точно так же $u^{(0)}v^{(n+1)}$ входит только во вторую сумму (в слагаемое с номером $i=n$), с коэффициентом $C_n^n = 1$. Все остальные произведения, входящие в эти суммы, имеют вид $u^{(n+1-k)}v^{(k)}$, причем $1 \leqslant k \leqslant n$. Каждое такое произведение встретится как в первой сумме (слагаемое с номером $i=k$), так и во второй сумме (слагаемое с номером $i=k-1$). Сумма соответствующих коэффициентов будет $C_n^k + C_n^{k-1}$. Но, как известно,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

*) Символ Σ означает сумму однотипных слагаемых. Когда слагаемые эти зависят от одного значка, меняющегося в определенных границах, то эти границы и указываются (снизу и сверху). Например,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}, \text{ и т. д.}$$

Таким образом, окончательно находим:

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)},$$

так как $C_{n+1}^{0} = C_{n+1}^{n+1} = 1$.

Мы получили для $y^{(n+1)}$ выражение, вполне аналогичное выражению (1) (только n заменилось числом $n+1$); этим и доказана справедливость формулы (1) для всех натуральных значений n.

Установленная формула носит название *формулы Лейбница*. Она часто бывает полезна при выводе общих выражений для n-й производной.

Заметим, что такую же формулу можно было бы установить и для n-й производной произведения нескольких сомножителей $y = uv \ldots t$; она имеет сходство с разложением степени многочлена $(u + v + \ldots + t)^n$.

118. Примеры. 1) Найдем при помощи формулы Лейбница (1) производную

$$(x^2 \cdot \cos ax)^{(50)}.$$

Положим $v = x^2$, $u = \cos ax$. Тогда

$$u^{(k)} = a^k \cdot \cos\left(ax + k \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$
$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{\mathrm{IV}} = \ldots = 0.$$

Таким образом, в формуле (1) все слагаемые, кроме трех первых, равны нулю, и мы получаем:

$$(uv)^{(50)} = x^2 \cdot a^{50} \cdot \cos\left(ax + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{50}{1} \cdot 2x \cdot a^{49} \cdot \cos\left(ax + 49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot a^{48} \cdot \cos\left(ax + 48 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = a^{48}\,[(2450 - a^2x^2)\cos ax - 100\,ax \cdot \sin ax].$$

2) Возвращаясь к примеру 7), **116**, теперь мы можем получить общее выражение для n-й производной функции

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx$$

непосредственно по формуле Лейбница:

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[\sin bx\left(a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots\right) + \right.$$
$$\left. + \cos bx\left(na^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots\right)\right].$$

3) Найдем выражение для $(n+1)$-й производной функции $y = \arcsin x$.

Имеем, прежде всего,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

так что, по формуле Лейбница,

$$y^{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \\ + n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'' + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-3)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)''' + \ldots$$

Если теперь к вычислению последовательных производных от $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ и $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ применить формулы, полученные в **116**, 2), то придем к результату

$$y^{(n+1)} = \frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(1+x)^n} - n\frac{(2n-3)!!\,1!!}{(1+x)^{n-1}(1-x)} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{(2n-5)!!\,3!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)^2} + \ldots\right\}.$$

4) Требуется найти значения всех последовательных производных функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0$.

Так как $y' = \frac{1}{1+x^2}$, то $y'(1+x^2) = 1$. Возьмем n-ю производную от обеих частей этого равенства (пользуясь формулой Лейбница):

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)} + 2nx\cdot y^{(n)} + n(n-1)\cdot y^{(n-1)} = 0.$$

Положим здесь $x = 0$; если значения производных при $x = 0$ отмечать значками 0 внизу, то получим:

$$y_0^{(n+1)} = -n(n-1)\cdot y_0^{(n-1)}.$$

При $x = 0$ производная $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ обращается в 0: $y_0'' = 0$. Из найденного соотношения ясно, что всегда $y_0^{(2m)} = 0$. Что же касается производных нечетного порядка, то имеем для них рекуррентную формулу:

$$y_0^{(2m+1)} = -(2m-1)\cdot 2m\cdot y_0^{(2m-1)}.$$

Принимая во внимание, что $y_0' = 1$, получаем отсюда:

$$y_0^{(2m+1)} = (-1)^m (2m)!.$$

Тот же результат можно было бы получить и из общей формулы примера 8), **116**.

5) То же — для функции $y = \arcsin x$.

Указание. Формулу Лейбница применить к соотношению;

$$(1-x^2)\cdot y'' - x\cdot y' = 0.$$

Ответ: $y_0^{(2m)} = 0$, $y_0^{(2m-1)} = 1^2\cdot 3^2\ldots(2m-1)^2 = [(2m-1)!!]^2$. Этот результат из общих выражений в 3) получается не столь просто.

6) *Многочлены Лежандра.* В заключение остановимся на важных многочленах, носящих имя Лежандра (A. M. Legendre). Они определяются равенствами

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где постоянным коэффициентам c_n придаются те или иные значения в зависимости от соображений удобства.

Прежде всего убедимся в том, что многочлен $X_n(x)$ (степени n) имеет n различных вещественных корней, которые все содержатся между -1 и $+1$. Для простоты положим пока $c_n = 1$.

Легко видеть, что многочлен $(x^2-1)^n = (x-1)^n \cdot (x+1)^n$ и его $n-1$ последовательных производных обращаются в нуль при $x = \pm 1$. Тогда первая ее производная, по теореме Ролля [111], будет иметь корень и между -1 и $+1$; по той же теореме, вторая производная будет иметь два корня между -1 и $+1$, и т. д. вплоть до $(n-1)$-й производной, которая, помимо корней -1 и $+1$, будет между ними иметь еще $n-1$ корней. Применив к ней еще раз теорему Ролля, придем к требуемому заключению.

Сохраняя коэффициенты $c_n = 1$, определим теперь значения многочлена $X_n(x)$ при $x = \pm 1$.

По формуле Лейбница, рассматривая степень $(x^2-1)^n$ как произведение $(x+1)^n$ на $(x-1)^n$, можно написать:

$$X_n(x) = (x+1)^n \cdot \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + C_n^1 \cdot \frac{d(x+1)^n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d^n (x+1)^n}{dx^n} \cdot (x-1)^n.$$

Так как все слагаемые, начиная со второго, содержат множитель $x-1$ и, следовательно, обращаются в 0 при $x = 1$, то очевидно: $X_n(1) = 2^n \cdot n!$.

Аналогично получаем: $X_n(-1) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot n!$.

Если в формуле, дающей общее определение многочлена Лежандра $X_n(x)$, положить в частности

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!},$$

то получится многочлен, который чаще всего встречается; его именно мы будем впредь всегда обозначать через $P_n(x)$. Он характеризуется тем, что в точках $x = 1$ и $x = -1$ принимает значения

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

С помощью формулы Лейбница легко установить далее, что многочлены Лежандра $X_n(x)$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$(x^2-1) X_n'' + 2x \cdot X_n' - n(n+1) X_n = 0,$$

которое играет важную роль в теории этих многочленов.

В самом деле, полагая $y = (x^2-1)^n$, имеем

$$y' = 2nx \cdot (x^2-1)^{n-1}, \text{ так что } (x^2-1) \cdot y' = 2nx \cdot y.$$

Возьмем теперь $(n+1)$-е производные от обеих частей последнего равенства; по формуле Лейбница,

$$(x^2-1) y^{(n+2)} + (n+1) \cdot 2x \cdot y^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 \cdot y^{(n)} =$$
$$= 2nx \cdot y^{(n+1)} + (n+1) \cdot 2n \cdot y^{(n)}.$$

Отсюда

$$(x^2-1) y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1) y^{(n)} = 0,$$

и, по умножении на c_n, получается доказываемое соотношение.

119. Дифференциалы высших порядков. Обратимся теперь к дифференциалам высших порядков; они также определяются индуктивно. Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом функции $y=f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее (первого) дифференциала; в обозначениях

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциалом третьего порядка или третьим дифференциалом называется дифференциал от второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y).$$

Вообще, дифференциалом n-го порядка или n-м дифференциалом функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Если пользоваться функциональным обозначением, то последовательные дифференциалы могут быть обозначены так:

$$d^2f(x_0),\ d^3f(x_0),\ \ldots,\ d^nf(x_0),\ \ldots,$$

причем получается возможность указать то частное значение $x=x_0$, при котором дифференциалы берутся.

При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно помнить, что dx есть произвольное и независящее от x число, которое при дифференцировании по x надлежит рассматривать как постоянный множитель. В таком случае, будем иметь (все время — предполагая существование соответствующих производных):

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' \cdot dx^2,$$
$$d^3y = d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y'''dx) \cdot dx^2 = y''' \cdot dx^3 \text{ *)},$$

и т. д. Легко угадываемый общий закон

$$d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n \tag{2}$$

доказывается методом математической индукции. Из него следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

так что отныне этот символ можно рассматривать как дробь.

Воспользовавшись равенством (2), легко теперь преобразовать формулу Лейбница к дифференциалам. Достаточно умножить обе части ее на dx^n, чтобы получить

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u \cdot d^iv \quad (d^0u = u,\ d^0v = v).$$

Сам Лейбниц установил свою формулу именно для дифференциалов.

---

*) Под dx^2, $dx^3, \ldots$ и т. п. всегда разумеются степени от дифференциала: $(dx)^2$, $(dx)^3, \ldots$ Дифференциал от степени будет обозначаться так: $d(x^2)$, $d(x^3), \ldots$

120. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков. Вспоминая, что (первый) дифференциал функции обладает свойством инвариантности формы, естественно поставить вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, например, что уже второй дифференциал этим свойством не обладает.

Итак, пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, так что y можно рассматривать как сложную функцию от t: $y=f(\varphi(t))$. Ее (первый) дифференциал по t можно написать в форме $dy=y'_x\cdot dx$, где $dx=x'_t\cdot dt$ есть функция от t. Вычисляем второй дифференциал по t: $d^2y=d(y'_x\cdot dx)=$ $=dy'_x\cdot dx+y'_x\cdot d(dx)$. Дифференциал dy'_x можно, снова пользуясь инвариантностью формы (первого) дифференциала, взять в форме; $dy'_x=$ $=y''_{x^2}\cdot dx$, так что окончательно

$$d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x, \tag{3}$$

в то время как при независимой переменной x второй дифференциал имел вид $d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2$. Конечно, выражение (3) для d^2y является более общим: если, в частности, x есть независимая переменная, то $d^2x=0$ — и остается один лишь первый член.

Возьмем пример. Пусть $y=x^2$, так что, покуда x — независимая переменная:

$$dy=2x\ dx,\quad d^2y=2dx^2.$$

Положим теперь $x=t^2$; тогда $y=t^4$, и

$$dy=4t^3dt,\quad d^2y=12t^2dt^2.$$

Новое выражение для dy может быть получено и из старого если туда подставить $x=t^2$, $dx=2t\ dt$. Иначе обстоит дело с d^2y: сделав такую же подстановку, мы получим $8t^2\ dt^2$ вместо $12t^2\ dt^2$. Если же продифференцировать равенство $dy=2xdx$ по t, считая x функцией от t, то, наподобие (3), придем к формуле

$$d^2y=2dx^2+2xd^2x.$$

Подставив сюда $x=t^2$, $dx=2tdt$, $d^2x=2dt^2$, получим уже правильный результат: $12t^2dt^2$.

Итак, если x перестает быть независимой переменной, то дифференциал второго порядка d^2y выражается через дифференциалы x двучленной формулой (3). Для дифференциалов третьего и дальнейших порядков число добавочных (при переходе к новой независимой переменной) членов еще возрастет. В соответствии с этим в выражениях высших производных y''_{x^2}, $y'''_{x^3}, \ldots$ через дифференциалы

$$y''_{x^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'''_{x^3}=\frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots \tag{4}$$

уже нельзя дифференциалы брать по любой переменной, но лишь по переменной x.

121. Параметрическое дифференцирование. Можно, впрочем, написать выражения производных по x и через дифференциалы, взятые по любой переменной t, но они будут гораздо сложнее. Именно, считая все ниже написанные дифференциалы взятыми по t, имеем последовательно

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^2}}{dx},$$

т. е.

$$y''_{x^2} = \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}; \tag{5}$$

затем,

$$y'''_{x^3} = \left(\frac{dx \cdot d^2y - d^2x - dy}{dx^3}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\frac{dx^3(dx\, d^3y - d^3x dy) - 3dx^2 d^2x\,(dx\, d^2y - d^2x dy)}{dx^6}}{dx}$$

и окончательно:

$$y'''_{x^3} = \frac{dx\,(dx\, d^3y - d^3x\, dy) - 3d^2x\,(dx\, d^2y - d^2x\, dy)}{dx^5} \tag{6}$$

и т. д. Формулы (5), (6), ... являются наиболее общими; если в них считать x независимой переменной, то d^2x, $d^3x, \ldots$ обратятся в нуль — и мы вернемся к формулам (4).

Полученные нами формулы для производных y по x осуществляют так называемое параметрическое дифференцирование. Если x и y заданы в функции от параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то, как мы видели в **106**, при известных условиях этим определяется и y как функция от x: $y = f(x)$. При наличии последовательных производных от x и y по t существуют соответствующие производные от y по x и выражаются выведенными выше формулами.

Иногда удобнее иметь выражение производных y по x через производные же (а не дифференциалы) от x и y по t. Их легко получить из дифференциальных выражений, разделив числитель и знаменатель, соответственно, на dt, dt^3, $dt^5, \ldots$ Таким путем придем к формулам:

$$y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3};$$

аналогично:

$$y'''_{x^3} = \frac{x'_t (x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2} (x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{(x'_t)^5},$$

и т. д.

122. Конечные разности. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathscr{X}$ и все значения x, которые будут встречаться, считаются принадлежащими этому промежутку. Фиксировав некоторое приращение Δx переменной x (мы будем предполагать, для определенности, $\Delta x > 0$, хотя ничто не мешало бы рассматривать и $\Delta x < 0$), положим

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

и назовем это выражение *первой разностью* нашей функции. *Второй разностью* называется первая разность от первой разности:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta [\Delta f(x)] = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Высшие разности определяются индуктивно:

$$\Delta^n f(x) = \Delta [\Delta^{n-1} f(x)].$$

Впрочем, для n-й разности может быть установлена и формула

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(x + \overline{n-i}\Delta x) =$$

$$= f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + \overline{n-1}\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(x + \overline{n-2}\Delta x) - \\ - \ldots + (-1)^n f(x),$$

выражающая эту разность непосредственно через значения самой функции $f(x)$ в равноотстоящих точках

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x, \ldots,\ x + n\Delta x.$$

Эта формула легко доказывается по методу математической индукции, что может быть предоставлено читателю.

Сопоставим теперь эти *конечные разности* с производными и дифференциалами.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет $n-1$ *непрерывных* производных

$$f'(x),\ f''(x), \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

в замкнутом промежутке $[x_0, x_0 + n\Delta x]$ и конечную n-ю производную $f^{(n)}(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(x_0, x_0 + n\Delta x)$. Тогда имеет место формула

$$\Delta^n f(x_0) = f^{(n)}(\xi_n) \cdot \Delta x^n, \text{ где } x_0 < \xi_n < x_0 + n\Delta x. \tag{7}$$

При $n = 1$ дело сводится к формуле конечных приращений, которая является простейшим частным случаем формулы (7). Намереваясь провести доказательство нашего утверждения по методу математической индукции, мы допустим справедливость измененной формулы (7), получаемой при замене n на $n-1$, разумеется, при соответственно измененных предположениях, и докажем (7), при сделанных предположениях. Из них следует, что для функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ в промежутке $[x_0, x_0 + \overline{n-1}\Delta x]$ с избытком выполняются условия применимости измененной формулы (7), и мы можем написать

$$\Delta^{n-1} [\Delta f(x_0)] = \Delta^n f(x_0) = [f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(\xi_{n-1})] \cdot \Delta x^{n-1}, \tag{8}$$

где $x_0 < \xi_{n-1} < x_0 + \overline{n-1}\Delta x$. Применяя к правой части этого равенства формулу конечных приращений *), получим непосредственно формулу (7), причем

$$x_0 < \xi_{n-1} < \xi_n < \xi_{n-1} + \Delta x < x_0 + n\Delta x.$$

Заметим, что, если производная $f^{(n)}(x)$ существует также в точке x_0 и притом непрерывна в этой точке, то из соотношения (7) при $\Delta x \to 0$ (тогда $\xi_n \to x_0$) следует, что

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}. \tag{9}$$

Впрочем, эта интересная формула, устанавливающая возможность получения n-й производной с помощью лишь одного предельного перехода, справедлива при единственном предположении, что эта производная существует именно в точке x_0. Это значит, что в некоторой окрестности точки x_0 существуют производные

$$f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$$

и, следовательно, при достаточно малом Δx, может быть применена формула (8). Ввиду существования производной $f^{(n)}(x_0)$, воспользовавшись формулой (2) n° 96, можем написать

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (\xi_{n-1} - x_0) + \alpha \cdot (\xi_{n-1} - x_0)$$

и

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0) = \\ = f^{(n)}(x_0) \cdot (\xi_{n-1} + \Delta x - x_0) + \beta \cdot (\xi_{n-1} + \Delta x - x_0),$$

где α и β зависят от Δx и вместе с ним стремятся к нулю. Отсюда и из (8) вытекает **):

$$\Delta^n f(x_0) = [f^{(n)}(x_0) + \gamma] \cdot \Delta x^n,$$

где γ — новая бесконечная малая. Наконец, деля это равенство почленно на Δx^n и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, придем к формуле (9).

Подчеркнем, что она имеет место лишь в предположении, что существует производная $f^{(n)}(x_0)$. Предел справа может существовать и тогда, когда этой производной нет ***). Рассмотрим, например, функцию, определенную так:

$$f(x) = x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),\ f(0) = 0,$$

взяв $x_0 = 0$. Для нее существует первая производная

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - x \cdot \cos\frac{1}{x}\ (x \neq 0),\ f'(0) = 0,$$

но нет в точке 0 второй производной, ибо отношение

$$\frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x^2 \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} - \Delta x \cdot \cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 3\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} - \cos\frac{1}{\Delta x}$$

*) На что мы имеем право, так как функция $f^{(n-1)}(x)$ непрерывна в промежутке $[\xi_{n-1}, \xi_{n-1} + \Delta x]$, а внутри него имеет конечную производную $f^{(n)}(x)$.

**) Учитывая, что $0 < \xi_{n-1} - x_0 < (n-1)\Delta x$ (при $\Delta x > 0$).

***) Так что формула (9) отнюдь не дает нового определения самого понятия n-й производной, равносильного старому!

при $\Delta x \to 0$ предела не имеет. В то же время выражение

$$\frac{\Delta^2 f(0)}{\Delta x^2} = \frac{f(0+2\Delta x) - 2f(0+\Delta x) + f(0)}{\Delta x^2} =$$

$$= \frac{8\Delta x^3 \cdot \sin\frac{1}{2\Delta x} - 2\Delta x^3 \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x^2} =$$

$$= 8\Delta x \cdot \sin\frac{1}{2\Delta x} - 2\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} \to 0.$$

§ 5. Формула Тейлора

123. Формула Тейлора для многочлена. Если $p(x)$ есть целый многочлен степени n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \qquad (1)$$

то, последовательно дифференцируя его n раз:

$$p'(x) = a_1 + 2\cdot a_2 x + 3\cdot a_3 x^2 + \ldots + n\cdot a_n x^{n-1},$$
$$p''(x) = 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3 x + \ldots + (n-1)n\cdot a_n x^{n-2},$$
$$p'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n\cdot a_n x^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n\cdot a_n$$

и полагая во всех этих формулах $x=0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при $x=0$

$$a_0 = p(0),\ a_1 = \frac{p'(0)}{1!},\quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},$$
$$a_3 = \frac{p'''(0)}{3!},\ \ldots,\quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставим эти значения коэффициентов в (1):

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2)$$

Эта формула отличается от (1) записью коэффициентов.

Вместо того чтобы разлагать многочлен по степеням x, можно было бы взять его разложение по степеням $x - x_0$, где x_0 есть некоторое постоянное частное значение x:

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 +$$
$$+ A_3(x-x_0)^3 + \ldots + A_n(x-x_0)^n. \qquad (3)$$

Полагая $x - x_0 = \xi$, $p(x) = p(x_0 + \xi) = P(\xi)$, для коэффициентов многочлена

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \ldots + A_n\xi^n$$

имеем, по доказанному, выражения:

$$A_0 = P(0), \quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!},$$
$$A_3 = \frac{P'''(0)}{3!}, \ldots, A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Но

$$P(\xi) = p(x_0 + \xi), \quad P'(\xi) = p'(x_0 + \xi),$$
$$P''(\xi) = p''(x_0 + \xi) \ldots,$$

так что

$$P(0) = p(x_0), \quad P'(0) = p'(x_0), \quad P''(0) = p''(x_0), \ldots$$

и

$$\left.\begin{aligned} A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}, \\ A_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}, \ldots, \quad A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

т. е. *коэффициенты разложения* (3) *оказались выраженными через значения самого многочлена и его производных при* $x = x_0$.

Подставим в (3) выражения (4):

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$
$$+ \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (5)$$

Формула (5), так же как и ее частный (при $x_0 = 0$) случай (2), называется *формулой Тейлора* (B. Taylor) *). Известно, какие важные применения она имеет в алгебре.

Сделаем (полезное для дальнейшего) очевидное *замечание*, что если многочлен $p(x)$ представлен в виде

$$p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \frac{c_2}{2!}(x - x_0)^2 +$$
$$+ \frac{c_3}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n,$$

то необходимо

$$p(x_0) = c_0, \quad p'(x_0) = c_1, \quad p''(x_0) = c_2, \ldots, p^{(n)}(x_0) = c_n.$$

*) Впрочем, формулу (2) часто называют формулой *Маклорена* (C. Maclaurin).

124. Разложение произвольной функции; дополнительный член в форме Пеано. Обратимся теперь к рассмотрению произвольной функции $f(x)$, вообще не являющейся целым многочленом. Предположим, что для нее в некоторой точке x_0 существуют производные всех порядков до n-го включительно. Это значит, точнее говоря, что функция определена и имеет производные всех порядков до $(n-1)$-го включительно:

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

в некотором промежутке $[a, b]$, содержащем точку x_0, и, кроме того, имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$ в самой точке x_0 *). Тогда, по образцу (5), и для функции $f(x)$ может быть составлен многочлен

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots\\ \ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{6}$$

Согласно предшествующему замечанию, этот многочлен и его производные (до n-й включительно) в точке x_0 имеют те же значения, что и функция $f(x)$ и ее производные.

Но на этот раз, если только $f(x)$ не есть целый многочлен n-й степени, уже нельзя утверждать равенства $f(x)=p(x)$. Многочлен $p(x)$ дает лишь некоторое приближение функции $f(x)$. Поэтому особый интерес приобретает изучение разности

$$r(x)=f(x)-p(x). \tag{7}$$

Установим, прежде всего, что *при $x \to x_0$ эта разность представляет собой бесконечно малую порядка выше n-го (по сравнению с $x-x_0$):*

$$r(x)=o((x-x_0)^n). \tag{8}$$

По свойству многочлена $p(x)$, для функции $r(x)$, очевидно, будут иметь место равенства

$$r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\ldots=r^{(n)}(x_0)=0. \tag{9}$$

Мы сейчас установим общее утверждение: *если для какой-либо функции $r(x)$, имеющей в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, выполняются условия* (9), *то имеет место соотношение* (8).

Доказательство проведем по методу математической индукции. При $n=1$ это утверждение имеет вид: *если функция $r(x)$, имеющая*

*) Если точка x_0 является одним из концов промежутка $[a, b]$, то, говоря о производных в этой точке, мы имеем в виду односторонние производные.

в точке x_0 производную (первого порядка), удовлетворяет условиям

$$r(x_0) = r'(x_0) = 0,$$

то

$$r(x) = o(x - x_0).$$

Его справедливость проверяется непосредственно:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0.$$

Предположим теперь, что сформулированное выше утверждение справедливо для какого-либо $n \geqslant 1$, и докажем, что оно остается верным и при замене n на $n+1$, т. е. что: *если для какой-либо функции $r(x)$, имеющей в точке x_0 производные до $(n+1)$-го порядка включительно, выполняются условия*

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \ldots = r^n(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0, \quad (9^*)$$

то

$$r(x) = o((x - x_0)^{n+1}). \quad (8^*)$$

Из (9*) усматриваем, что функция $r'(x)$ удовлетворяет условиям типа (9), а значит для нее по предположенному уже имеем:

$$r'(x) = o((x - x_0)^n).$$

Но, по формуле конечных приращений [**112**],

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c) \cdot (x - x_0),$$

где c содержится между x_0 и x; так как $|c - x_0| < |x - x_0|$, то

$$r'(c) = o((c - x_0)^n) = o((x - x_0)^n),$$

и мы окончательно приходим к (8*), что и требовалось доказать.

Таким образом, наше утверждение справдано для любого натурального n, и для разности (7) действительно выполняется соотношение (8). Принимая во внимание (6), мы получаем формулу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (10)$$

которая от формулы (5) для многочлена разнится наличием дополнительного члена (8). В указанной форме дополнительный член был дан Пеано (G. Peano). Формула (10) и называется *формулой Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано.*

Доказанная формула является естественным обобщением формулы (3) n° **96**, которую можно написать так:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0);$$

она отвечает $n=1$. Там функция $f(x)$, с точностью до бесконечно малой порядка выше первого, представлялась в виде линейной функции, здесь же мы представляем ее целым многочленом n-й степени, но уже с точностью до бесконечно малой порядка выше n-го.

Легко показать, что такое представление функции $f(x)$ единственно, т. е. что, если имеем одновременно вблизи x_0

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

и

$$f(x)=A_0'+A_1'(x-x_0)+A_2'(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+A_n'(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

то необходимо

$$A_0=A_0',\quad A_1=A_1',\ \ldots,\ A_n=A_n'.$$

Действительно, из тождества

$$A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n=$$
$$=A_0'+A_1'(x-x_0)+A_2'(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+A_n'(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

при $x\to x_0$ сразу получаем $A_0=A_0'$. Уничтожив эти члены и деля их на $x-x_0$, получим:

$$A_1+A_2(x-x_0)+\ldots+A_n(x-x_0)^{(n-1)}=$$
$$=A_1'+A_2'(x-x_0)+\ldots+A_n'(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1}),$$

откуда, аналогично, $A_1=A_1'$, и т. д.

Иногда удобно формулу (10) применять в другой форме. Дополнительный член $r(x)$ можно представить так:

$$r(x)=\frac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n,$$

где α зависит от x и стремится к 0 вместе с $x-x_0$. Подставляя это выражение, получим

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n. \tag{10а}$$

Далее, перенося в формуле (10) $f(x_0)$ налево и полагая $x-x_0=\Delta x$, можно переписать ее в виде

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n+o(\Delta x^n). \tag{10б}$$

В этой форме она еще ближе к формуле (3) n° **96**:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Последняя выделяет лишь один главный член из бесконечно малого приращения функции $\Delta f(x_0)$ — считая, как всегда, Δx за основную бесконечно малую, в то время как в формуле (10б) выписаны члены всех порядков до n-го включительно, причем все они являются простейшими бесконечно малыми в смысле n° **63**.

С точностью до дополнительного члена, таким образом, приращение функции разложено по степеням приращения независимой переменной.

Наконец, вспоминая, что

$$f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0), \quad f''(x_0) \cdot \Delta x^2 = d^2 f(x_0), \ldots$$
$$\ldots, f^{(n)}(x_0) \cdot \Delta x^n = d^n f(x_0),$$

мы можем переписать (10б) в такой форме:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) + o(\Delta x^n).$$

Отсюда видим, что (при $\Delta x \to 0$) последовательные дифференциалы представляют собой, с точностью до факториалов в знаменателе, именно простейшие бесконечно малые члены соответственных порядков в разложении бесконечно малого приращения функции.

125. Примеры. Всего проще выглядит формула Тейлора, если $x_0 = 0$ *):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n). \quad (11)$$

К этому частному случаю всегда можно свести дело, взяв $x - x_0$ за новую независимую переменную.

Рассмотрим в виде примера некоторые конкретные разложения по этой формуле для элементарных функций.

1) Пусть $f(x) = e^x$; тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ при любом $k = 1, 2, 3, \ldots$ Так как в этом случае $f(0) = 1, f^{(k)}(0) = 1$, то, по формуле (11),

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, так, что

$$f(0) = 0, \quad f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0,$$
$$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

*) И эту формулу связывают с именем Маклорена (см. сноску на стр. 247).

Поэтому, положив в формуле (11) $n=2m$, имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

3) Аналогично, при $f(x)=\cos x$:

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f(0)=1,\quad f^{(2m)}(0)=(-1)^m,$$
$$f^{(2m-1)}(0)=0 \quad (m=1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом (если взять $n=2m+1$):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

4) Рассмотрим теперь степенную функцию x^m, где m — не натуральное число и не нуль. В этом случае при $x \to 0$ либо сама функция (если $m<0$), либо ее производные (начиная с некоторого порядка, при $n>m$) бесконечно возрастают. Следовательно, здесь уже нельзя брать $x_0=0$.

Возьмем $x_0=1$, т. е. станем разлагать x^m по степеням $x-1$. Впрочем, как уже упоминалось, можно ввести в качестве новой переменной $x-1$; мы ее по-прежнему будем обозначать через x, и станем разлагать функцию $(1+x)^m$ по степеням x.

Как мы знаем [**116**, 2)],

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

так что

$$f(0)=1,\quad f^{(k)}(0)=m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Разложение имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n + o(x^n).$$

В частности, например, при $n=2$ и $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ будем иметь

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Первое из этих разложений очень легко получается элементарно — дополнительный член здесь просто равен $\frac{x^3}{1+x}$. Второе же и третье потребовали бы более длинных выкладок [ср. **63**].

5) Если перейти к логарифмической функции $\ln x$, которая стремится к $-\infty$ при $x \to +0$, то, как и в предыдущем примере, мы предпочтем рассматривать функцию $f(x)=\ln(1+x)$ и разлагать ее по степеням x.

Тогда [116, 3)]

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k (k-1)!^{*)}}{(1+x)^k};$$

$$f(0)=0, \quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Отсюда

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

6) Пусть теперь $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Мы имели в **118**, 4) значения ее производных при $x=0$:

$$f^{(2m)}(0)=0, \quad f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!,$$

так что ее разложение представится в виде

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1}+o(x^{2m}).$$

7) Для функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ закон образования коэффициентов в формуле Тейлора сложен. Тем не менее, несколько первых членов ее написать нетрудно. Так как, например,

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x)=2\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad f'''(x)=2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=8\sin x\frac{2+\sin^2 x}{\cos^5 x},$$

то

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=0, \quad f'''(0)=2, \quad f^{\mathrm{IV}}(0)=0,$$

так что

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Пользуясь известными разложениями, можно, уже не вычисляя производных, непосредственно писать разложения и для более сложных функций. Например, предыдущая формула могла бы быть получена из разложений для $\sin x$ и $\cos x$. Приведем новые примеры; при этом все степени x, до назначенной включительно, мы будем точно учитывать, а более высокие степени (не выписывая их) будем сразу включать в дополнительный член.

8) Написать разложение функции $e^{\sin x}$ до x^3. В силу 1),

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)\,^{**)};$$

но, по 2),

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),$$

так что

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

---

*) Под 0! мы, как всегда, разумеем 1.

**) Следовало бы написать $o(\sin^3 x)$, но, ввиду эквивалентности бесконечно малых x и $\sin x$, это все равно, что $o(x^3)$.

Член с x^3 исчезает и, окончательно,

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

Аналогично,

$$e^{\operatorname{tg} x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

9) Написать разложение функции $\ln\cos x$ до члена с x^6. Согласно 5),

$$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]=(\cos x-1)-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+$$
$$+\frac{1}{3}(\cos x-1)^3+o(x^6)\,^{*)}.$$

При этом, ввиду 3),

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+o(x^7);$$

отсюда

$$\ln\cos x=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)+o(x^6)$$

или — после приведения —

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

Аналогично,

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$$

и

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2835}x^6+o(x^6).$$

Все эти разложения, полученные без непосредственного использования формулы Тейлора, могли бы, конечно, быть получены и по этой формуле, и притом — в точности с теми же коэффициентами, ввиду установленной выше единственности подобного разложения функции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как рассмотренные здесь функции имели в окрестности точки $x=0$ производные всех порядков, то мы ничем не были стеснены в выборе числа n в формуле (11), т. е. могли продолжать разложения этих функций вплоть до любой степени x.

126. Другие формы дополнительного члена. Формула Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано имеет многообразные приложения (см. следующую главу); но все они, так сказать, «локального» характера, т. е. относятся к самой точке x_0. Если в них иной раз и идет речь о других значениях x, то эти значения

---

*) Так как $1-\cos x$ одного порядка с x^2 [61], то $o((\cos x-1)^3)$ в то же время есть $o(x^6)$.

предполагаются «достаточно близкими» к x_0 и наперед не могут быть взяты по произволу.

Между тем естественно попытаться использовать многочлен $p(x)$ как приближение к функции $f(x)$, с помощью которого она и может быть вычислена с нужной степенью точности.

Для того чтобы многочлен $p(x)$ был пригоден для этой роли, необходимо иметь возможность оценивать разность (7) для данного x. В этом случае форма Пеано, характеризующая лишь стремление $r(x)$ к 0 при $x \to 0$, служить не может. Она не позволяет устанавливать, для каких значений x многочлен $p(x)$ воспроизводит функцию $f(x)$ с наперед указанной степенью точности; ничего не говорит она также о том, как можно было бы — при данном x — воздействовать на величину дополнительного члена $r(x) = r_n(x)$ за счет увеличения n*), и т. д.

Поэтому мы обратимся к выводу других форм дополнительного члена $r_n(x)$. Для определенности будем рассматривать промежуток $[x_0, x_0 + H]$ $(H > 0)$ вправо от точки x_0 и будем считать функцию $f(x)$ определенной в этом промежутке; случай, когда функция задана в промежутке $[x_0 - H, x_0]$, исчерпывается аналогично.

На этот раз сделаем более тяжелые предположения, именно, допустим, что во всем промежутке $[x_0, x_0 + H]$ существуют и непрерывны первые n производных:

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \ \ldots, \ f^{(n)}(x)$$

и кроме того, по крайней мере, в открытом промежутке $(x_0, x_0 + H)$ существует и конечна $(n+1)$-я производная $f^{(n+1)}(x)$.

Отметим, что, ввиду (6) и (7),

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \\ - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (12)$$

Фиксируем теперь любое значение x из промежутка $[x_0, x_0 + H]$, и по образцу правой части формулы (12), заменяя постоянное число x_0 на переменную z, составим новую, вспомогательную функцию:

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \\ - \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n,$$

причем независимую переменную z считаем изменяющейся в промежутке $[x_0, x]$. В этом промежутке функция $\varphi(z)$ непрерывна и принимает на концах его значения [см. (12)]:

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0.$$

*) Нужно помнить, что дополнительный член $r(x)$ зависит, вообще говоря, от n, для подчеркивания этого обстоятельства мы и будем впредь обозначать его через $r_n(x)$.

Кроме того, в промежутке (x_0, x) существует производная

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - f'(z)\right] - \\ - \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right] - \\ - \left[\frac{f^{\mathrm{IV}}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right] - \dots \\ \dots - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right]$$

или, после упрощения,

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Возьмем теперь произвольную функцию $\psi(z)$, непрерывную в промежутке $[x_0, x]$ и имеющую не обращающуюся в нуль производную $\psi'(z)$, по крайней мере, в открытом промежутке (x_0, x).

К функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ применим формулу Коши [114]:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

где

$$x_0 < c < x \quad \text{или} \quad c = x_0 + \theta(x - x_0) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Так как

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

то

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Теперь, если подставлять вместо $\psi(z)$ любые удовлетворяющие поставленным условиям функции, мы получим различные формы дополнительного члена $r_n(x)$.

Пусть $\psi(z) = (x-z)^p$, где $p > 0$. Имеем:

$$\psi'(z) = -p(x-z)^{p-1} \qquad (x_0 < z < x).$$

Очевидно, эта функция удовлетворяет поставленным требованиям. Поэтому

$$r_n(x) = \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \\ = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Так как $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, то $x - c = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (1-\theta)(x - x_0)$, и окончательно:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p} \cdot (1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Это выражение называется *дополнительным членом в форме Шлемильха и Роша* (O. Schlömilch — Roche).

Из него, придавая p конкретные значения, можно получать более частные формы дополнительного члена. Положив $p = n+1$, получим *дополнительный член в форме Лагранжа*:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0 \lessgtr c \lessgtr x),$$

который выглядит особенно просто. Он напоминает следующий очередной член формулы Тейлора, лишь вместо того, чтобы вычислить $(n+1)$-ю производную в точке x_0, эту производную берут для некоторого среднего (между x_0 и x) значения c.

Формула Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа, таким образом, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$
$$(x_0 \lessgtr c \lessgtr x).$$

Если перенести в ней член $f(x_0)$ налево, то легко усмотреть в ней прямое обобщение формулы конечных приращений [**112**], которую можно написать так:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0).$$

Хотя охотнее всего пользуются дополнительным членом именно в форме Лагранжа, ввиду ее простоты, все же в отдельных случаях эта форма оказывается непригодной для оценки дополнительного члена, и приходится прибегать к другим формам, менее простым. Из них упомянем здесь о *дополнительном члене в форме Коши*, который получается из общей формы Шлемильха и Роша при $p = 1$:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}.$$

127. Приближенные формулы. Положим, для простоты, в формуле (13) $x_0 = 0$, а вместо c станем писать θx, где $0 < \theta < 1$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (14)$$

Если отбросить здесь дополнительный член, то получится *приближенная формула*:

$$f(x) \doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

заменяющая функцию сложной природы целым многочленом. Но на этот раз мы в состоянии оценить погрешность этой формулы ибо, она как раз и равна (по абсолютной величине) отброшенному члену. Например, если $(n+1)$-я производная (по крайней мере, при изменении аргумента между 0 и x) ограничена по абсолютной величине числом M, то

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Для примеров обратимся к элементарным функциям. Нам нет надобности повторять выкладки n° **125**, лишь дополнительный член мы будем писать в новой форме.

1) Положим $f(x)=e^x$. Приближенная формула:

$$e^x \doteq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!};$$

так как дополнительный член здесь

$$r_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

то, например, при $x>0$ погрешность оценивается так:

$$|r_n(x)|<e^x\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В частности, если $x=1$,

$$e \doteq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

$$|r_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Подобной формулой мы уже пользовались в **37** для приближенного вычисления числа e, но оценка дополнительного члена, полученная другим путем, там была более точной.

2) Взяв $f(x)=\sin x$, получим

$$\sin x \doteq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

В этом случае дополнительный член:

$$r_{2m}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

и погрешность оценивается легко:

$$|r_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

В частности, если мы довольствуемся одним членом и полагаем

$$\sin x = x,$$

то для того, чтобы погрешность была меньше, скажем, чем 0,001, достаточно взять (считая $x > 0$)

$$\frac{x^3}{6} < 0{,}001$$

или

$$x < 0{,}1817,$$

что примерно равно 10°. При пользовании двучленной формулой

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6},$$

для достижения той же точности уже достаточно взять

$$\frac{x^5}{120} < 0{,}001$$

или

$$x < 0{,}6544\ (\doteq 37°{,}5);$$

если же ограничиться углами $x < 0{,}4129$ ($\doteq 23°{,}5$), то погрешность будет даже $< 0{,}0001$, и т. д.

Мы видим, что с увеличением числа членов многочлена Тейлора, он с все большей точностью и на большем протяжении воспроизводит исходную функцию. Этот факт наглядно иллюстрируется рис. 52а, где наряду с графиком функции $y = \sin x$ представлены графики многочленов

$$y = x,\ y = x - \frac{x^3}{6},\ y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \text{ и т. д.}$$

3) Аналогично, для $f(x) = \cos x$ имеем

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!},$$

причем

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

так что

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Например, для формулы

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

погрешность

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24}$$

и наверное будет, скажем, $< 0{,}0001$ для $x < 0{,}2213$ ($\doteq 13°$), и т. п. На рис. 52б представлены для сравнения графики функции $y = \cos x$ и графики последовательных многочленов

$$x = 1, \quad y = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \text{ и т. д.}$$

Мы обращаем внимание читателя на существенное продвижение вперед по сравнению с формулами пп° **62, 63, 107**: *теперь мы умеем*

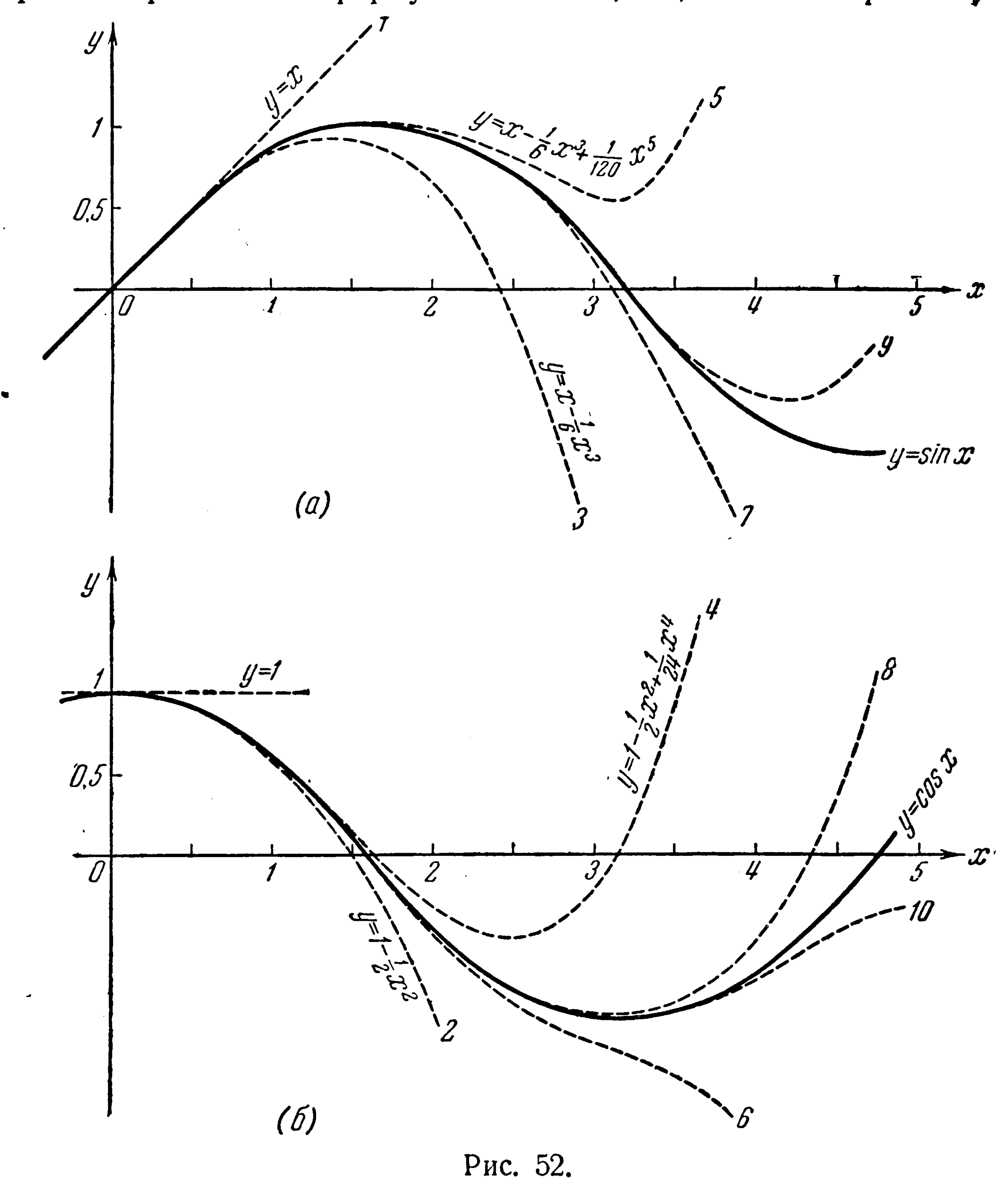


Рис. 52.

устанавливать границы погрешности и располагаем формулами любой точности.

Укажем еще, что формула Тейлора является источником для построения приближенных формул совершенно иного типа.

4) В качестве первого примера остановимся на *формуле Гюйгенса* (Ch. Huygens) для приближенного спрямления дуги окружности, малой по сравнению с радиусом.

Пусть s — длина дуги, d — соответствующая ей хорда, а δ — хорда, соответствующая половине дуги (рис. 53а). Поставим себе задачей представить s возможно точнее приближенной формулой вида

$$s \doteq Ad + B\delta,$$

где A, B — коэффициенты, подлежащие определению.

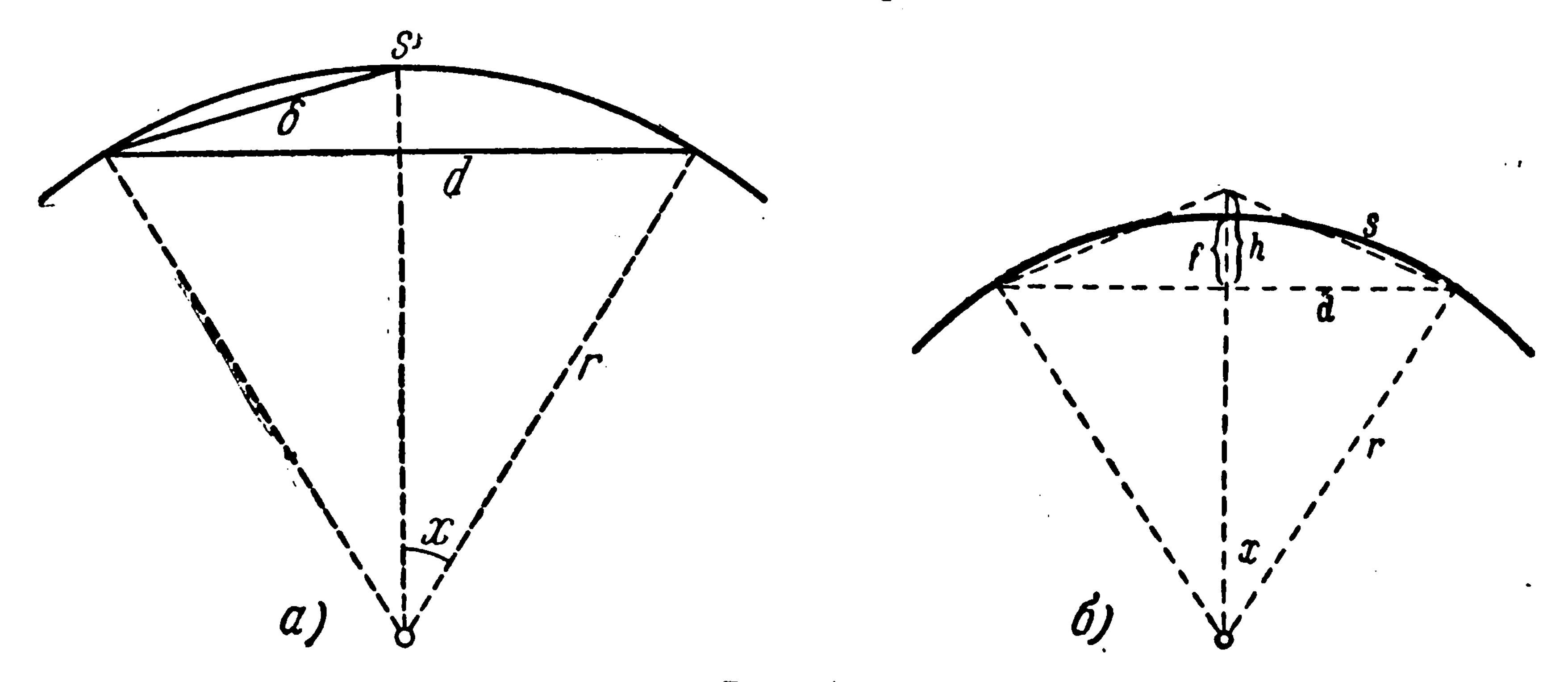


Рис. 53.

Если r — радиус окружности, а $2x$ — центральный угол, соответствующий дуге s, то имеем

$$d = 2r \cdot \sin x = 2r\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\theta'}{120}x^5\right) \qquad (0 < \theta' < 1)$$

и, аналогично, заменяя x на $\frac{x}{2}$,

$$\delta = 2r \sin\frac{x}{2} = 2r\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + \frac{\theta''}{3840}x^5\right) \qquad (0 < \theta'' < 1).$$

Отсюда

$$Ad + B\delta = 2r\left[\left(A + \frac{1}{2}B\right)\cdot x - \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B\right)\cdot x^3 + \left(\frac{\theta'}{120}A + \frac{\theta''}{3840}B\right)\cdot x^5\right],$$

в то время как $s = 2rx$. Естественно выбрать A и B так, чтобы было

$$A + \frac{1}{2}B = 1, \quad \frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B = 0,$$

ибо тогда разница между левой и правой частями рассматриваемой формулы будет лишь в членах, содержащих x^5. Для коэффициентов A и B получаем значения $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{8}{3}$, и формула принимает вид

$$s = \frac{8\delta - d}{3} = 2\delta + \frac{2\delta - d}{3}.$$

Ее погрешность Δ, как легко видеть, оценивается так:

$$|\Delta| < r \cdot \frac{x^5}{180}.$$

Например, при центральном угле в 30°, т. е. $x=\frac{\pi}{12}$, имеем, согласно этой оценке, $|\Delta|<r\cdot 0{,}000007$; в действительности $s=r\cdot 0{,}523599\ldots$, а по формуле Гюйгенса получается $s=r\cdot 0{,}523593\ldots$, так что расхождение не превосходит установленной границы.

5) Для той же цели П. Л. Чебышёв дал следующее правило: *дуга приближенно равна сумме равных сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде и имеющего высотой* $\sqrt{\frac{4}{3}}$ *стрелки* (рис. 53б).

Положим пока $h=\gamma f$; ниже выяснится, что, полагая $\gamma=\sqrt{\frac{4}{3}}$, мы действительно получаем — в некотором смысле — наилучшее приближение.

Как мы видели только что,

$$\frac{1}{2}d=r\cdot\sin x=r\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{\theta_1}{120}x^5\right)\qquad (0<\theta_1<1);$$

аналогично,

$$h=\gamma f=\gamma r(1-\cos x)=\gamma r\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{\theta_2}{24}x^4\right)\qquad (0<\theta_2<1).$$

Обозначая через s^* сумму сторон равнобедренного треугольника, о которой упоминается в правиле Чебышёва, имеем

$$s^*=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2+h^2}=$$
$$=2rx\sqrt{\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{\theta_1}{120}x^4\right)^2+\gamma^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\theta_2}{24}x^3\right)^2}=$$
$$=2rx\sqrt{1+\left(\frac{\gamma^2}{4}-\frac{1}{3}\right)x^2+ax^4+bx^6+cx^8}.$$

Теперь, именно для того, чтобы уничтожить под корнем член с x^2, положим его коэффициент равным 0, откуда и находим $\gamma=\sqrt{\frac{4}{3}}$!

Для оценки погрешности перепишем выражение для s^* в виде

$$s^*=2rx\sqrt{1+Ax^4},\tag{15}$$

причем выражение A окажется содержащим вторую и четвертую степени x. Предполагая $x<\frac{\pi}{2}$, будем иметь: $x^2<2{,}5$, $x^4<6{,}5$, а тогда для A получится оценка $|A|<0{,}06$, так что $|A|x^4<0{,}4$.

Обозначив для удобства Ax^4 через y, по формуле конечных приращений [112] будем иметь

$$\sqrt{1+Ax^4}=\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2\sqrt{1+\theta y}}\qquad (0<\theta<1).$$

Последняя дробь оценивается так:

$$\left|\frac{y}{2\sqrt{1+\theta y}}\right|<\frac{|y|}{2\sqrt{1-|y|}}=\frac{|A|x^4}{2\sqrt{1-|A|x^4}}<\frac{0{,}06x^4}{2\sqrt{0{,}6}}<\frac{1}{2}\cdot 0{,}1x^4.$$

Сопоставляя выражение (15) для s^* с только что полученными результатами видим, что

$$s^* = s + \rho, \quad \text{где} \quad |\rho| < 0{,}1rx^5.$$

Порядок погрешности тот же, что и в формуле Гюйгенса.

Мы вернемся к формуле Тейлора с дополнительным членом в главе XI второго тома, посвященной бесконечным рядам; там эта формула будет играть весьма важную роль.

§ 6. Интерполирование

128. Простейшая задача интерполирования. Формула Лагранжа. Представим себе, что для некоторой функции $f(x)$, определенной в промежутке $[a, b]$, вычислены $m+1$ ее значений в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$ промежутка:

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_m), \tag{1}$$

и требуется по этим значениям вычислить значение $f(x)$ при каком-либо новом значении x.

В этом и состоит *простейшая задача интерполирования*. Конечно, в такой постановке вопроса содержится много неопределенного. Обычно задачу понимают так: ищется целый многочлен $L(x)$ наинизшей степени, который в заданных точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$, называемых *узлами интерполирования*, принимает те же значения $f(x_i)$, что и функция $f(x)$, и приближенно полагают для любого x из $[a, b]$:

$$f(x) = L(x). \tag{2}$$

Подобное приближенное равенство называется *интерполяционной формулой*. Итак, надлежит прежде всего найти интерполяционную формулу, а затем — при определенных предположениях относительно функции $f(x)$ — оценить погрешность приближенной формулы (2).

Для разыскания многочлена $L(x)$, удовлетворяющего условиям

$$L(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, m), \tag{3}$$

удобно ввести многочлены m-й степени

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_m)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_m)},$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m),$$

которые, соответственно значку, принимают значение 1 при $x = x_k$ и обращаются в 0 при $x = x_i$, если $i \neq k$. Теперь ясно, что многочлен

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\, l_k(x) \tag{4}$$

удовлетворяет всем условиям (3). Степень этого многочлена не выше m

и стало быть условиями (3) он определяется однозначно, его называют *интерполяционным многочленом Лагранжа*, а приближенное равенство (2) — *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Заметим, что многочлен $l_k(x)$ можно написать более сжато, если ввести выражение

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m),$$

обращающееся в 0 как раз в узлах интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_m$. Именно, очевидно,

$$(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_m) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} \quad (x \neq x_k),$$

а

$$(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_m) =$$
$$= \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x)}{x - x_k} = \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x) - \omega(x_k)}{x - x_k} = \omega'(x_k).$$

Таким образом,

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} \quad \text{и} \quad L(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)} \cdot f(x_k).$$

129. Дополнительный член формулы Лагранжа. Обратимся теперь к оценке разности $f(x) - L(x)$, где x есть любое фиксированное значение в промежутке $[a, b]$, отличное от узлов интерполирования. *Предположим, что функция $f(z)$ в этом промежутке имеет производные всех порядков до $(m+1)$-го включительно.*

Какова бы ни была постоянная K, функция

$$\varphi(z) = f(z) - L(z) - K \cdot \omega(z)$$

тоже имеет $m+1$ производных и к тому же обращается в 0 в узлах x_i $(i = 0, 1, \dots, m)$. Мы выберем теперь постоянную K так, чтобы и при $z = x$ было $\varphi(x) = 0$, т. е. положим

$$K = \frac{f(x) - L(x)}{\omega(x)} \tag{5}$$

(так как $x \neq x_i$, то $\omega(x) \neq 0$). По теореме Ролля [111] в $m+1$ промежутках между $m+2$ корнями $x, x_0, x_1, \dots, x_m$ функции $\varphi(z)$ найдется $m+1$ различных корней ее производной $\varphi'(z)$. Применяя снова теорему Ролля к функции $\varphi'(z)$ и к m промежуткам между ее $m+1$ корнями, установим существование m различных корней второй производной $\varphi''(z)$ и т. д. Продолжая это рассуждение, на $(m+1)$-м его шаге придем к существованию корня ξ $(m+1)$-й производной $\varphi^{(m+1)}(z)$, так что

$$\varphi^{(m+1)}(\xi) = 0 \qquad (a < \xi < b). \tag{6}$$

Но $L^{(m+1)}(z) \equiv 0$, ибо степень многочлена $L(z)$ не выше m, а $\omega^{(m+1)}(z) \equiv (m+1)!$ Учитывая определение вспомогательной функции $\varphi(z)$, имеем

$$\varphi^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - K \cdot (m+1)!,$$

так что из (6) получается, что

$$K = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}.$$

Окончательно, из (5) находим:

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega(x) \quad (a < \xi < b). \tag{7}$$

Это — *интерполяционная формула Лагранжа с дополнительным членом.* В отличие от (2), она является точной!

Замечание. Если в промежутке $[a, b]$

$$\max |f^{(m+1)}(z)| = M_{m+1} < \infty,$$

то, так как в этом промежутке $|\omega(z)| \leqslant (b-a)^{m+1}$, получаем такую оценку для погрешности формулы (2)

$$|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.$$

Правая часть при $m \to \infty$ стремится к нулю лишь для очень узкого класса функций $f(x)$; например, это будет иметь место для таких функций, которые в $[a, b]$ дифференцируемы любое число раз, причем все их производные ограничены одной постоянной M. В этом случае по мере возрастания числа узлов интерполирования и независимо от закона, по которому выбираются эти узлы, погрешность формулы (2) будет равномерно стремиться к нулю. Как доказал Марцинкевич (J. Marcinkiewicz), для каждой отдельно взятой непрерывной функции можно достигнуть такого же эффекта путем надлежащего выбора последовательных систем узлов. Но — по теореме Фабера (G. Faber) — не существует такого закона выбора узлов, который годился бы в этом смысле для всех непрерывных функций одновременно. В подробности относительно этих и им подобных вопросов мы здесь входить не имеем возможности.

130. Интерполирование с кратными узлами. Формула Эрмита. Можно поставить более *общую задачу интерполирования*, задав в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_m$, кроме значений самой функции $f(x)$, также и значения последовательных ее производных:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0),\ f'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n_0)}(x_0), \\ f(x_1),\ f'(x_1),\ \ldots,\ f^{(n_1)}(x_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x_m),\ f'(x_m),\ \ldots,\ f^{(n_m)}(x_m), \end{array}\right\} \tag{8}$$

где $n_0, n_1, \ldots, n_m$ — неотрицательные целые числа. Общее число этих условий равно

$$(n_0+1)+(n_1+1)+\ldots+(n_m+1)=N.$$

Задачу вычисления значения функции $f(x)$ при любом отличном от узлов значении x из $[a, b]$ — с использованием всех данных (8) — мы, подобно простейшему случаю, будем понимать так. Ищется целый многочлен $H(x)$ наинизшей степени, который в каждом узле x_i, вместе со своими производными до порядка n_i включительно, принимает те же значения, что и сама функция $f(x)$ и ее соответствующие производные, а затем приближенно полагают

$$f(x)=H(x). \tag{9}$$

Узлы x_i называются *узлами интерполирования*, соответственно *кратности* n_i+1.

Можно доказать существование и единственность многочлена $H(x)$ степени не выше $N-1$, удовлетворяющего всем поставленным условиям. Его называют *интерполяционным многочленом Эрмита*, а формулу (9) — *интерполяционной формулой Эрмита* (Ch. Hermite).

Если все n_i положить равными нулю, то мы вернемся к формуле Лагранжа (2). Мы встречались и с другим частным случаем формулы Эрмита: возьмем один лишь узел x_0, но кратности $n+1$, т. е. от многочлена не выше n-й степени, $T(x)$, потребуем, чтобы в точке x_0 его значение и значения n его производных совпадали, соответственно, со значениями самой функции $f(x)$ и ее производных. Мы знаем, что этим требованиям удовлетворяет *многочлен Тейлора* [**124** (6)]

$$T(x)=f(x_0)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Таким образом приближенная формула

$$f(x)=T(x)$$

[ср. n° **127**] также является частным случаем интерполяционной формулы Эрмита.

Дополнительный член формулы (9), восстанавливающий ее точность, выводится с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в придыдущем номере. Рассмотрим многочлен N-й степени

$$\Omega(z)=(z-x_0)^{n_0+1}(z-x_1)^{n_1+1}\ldots(z-x_m)^{n_m+1}$$

и положим для $a \leqslant z \leqslant b$

$$\Phi(z)=f(z)-H(z)-K\cdot\Omega(z), \text{ где } K=\text{const}.$$

Если предположить, что функция $f(z)$ в промежутке $[a, b]$ имеет N последовательных производных, то это будет справедливо и для

$\Phi(z)$. Фиксируя значение $z=x$, отличное от узлов, мы выберем постоянную K так:

$$K=\frac{f(x)-H(x)}{\Omega(x)} \quad [\Omega(x)\neq 0!]; \tag{10}$$

при таком выборе функция $\Phi(z)$ обращается в 0 и при $z=x$. Всего она будет иметь $N+1$ корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность *). Применяя последовательно теорему Ролля как и выше (с тем лишь усложнением, что каждый кратный корень функции $\Phi(z)$ еще в течение нескольких шагов будет фигурировать и как корень ее последовательных производных), окончательно придем к утверждению, что в некоторой точке ξ обратится в 0 производная $\Phi^{(N)}(z)$. Отсюда

$$K=\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!},$$

и ввиду (10)

$$f(x)=H(x)+\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega(x). \tag{11}$$

Это и есть *интерполяционная формула Эрмита с дополнительным членом.*

Формула Лагранжа с дополнительным членом [(7)] является ее частным случаем. Точно также, взяв единственный узел x_0 кратности $n+1$, мы как частный случай формулы (11) получим формулу Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа [**126**(13)].

*) Мы распространяем понятие кратности корня, привычное для читателя по отношению к целому многочлену, на любую функцию $\Phi(z)$: число α называется ее корнем p-й кратности, если α обращает в 0, вместе с $\Phi(z)$, и $p-1$ ее производных.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Изучение хода изменения функции

131. Условие постоянства функции. При изучении хода изменения функции на первом месте появляется вопрос об условиях, при которых функция сохраняет в данном промежутке постоянное значение или изменяется в нем монотонно [**57**].

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $\mathscr{X}$* *) *и имеет внутри него конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ была в $\mathscr{X}$ постоянной, необходимо и достаточно условие*

$$f'(x)=0 \text{ внутри } \mathscr{X}.$$

Необходимость условия очевидна: из $f(x)=\text{const}$ следует $f'(x)=0$. Докажем теперь обратнсе.

Достаточность. Пусть условие выполнено. Фиксируем некоторую точку x_0 из промежутка $\mathscr{X}$ и возьмем любую другую его точку x. Для промежутка $[x_0, x]$ или $[x, x_0]$ удовлетворены все условия теоремы Лагранжа [**112**], следовательно можем написать

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),$$

где c содержится между x_0 и x и значит заведомо лежит внутри $\mathscr{X}$. Но по предположению $f'(c)=0$, так что для всех x из $\mathscr{X}$

$$f(x)=f(x_0)=\text{const},$$

и наше утверждение доказано.

В интегральном исчислении важное приложение найдет вытекающее отсюда простое предложение.

Следствие. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в промежутке $\mathscr{X}$ и внутри него имеют конечные производные $f'(x)$, $g'(x)$, причем*

$$f'(x)=g'(x) \quad (\text{внутри } \mathscr{X}),$$

---

*) Промежуток $\mathscr{X}$ может быть замкнутым или нет, конечным или бесконечным.

то эти функции во всем промежутке $\mathcal{X}$ разнятся лишь на постоянную:

$$f(x) = g(x) + C \quad (C = \text{const}).$$

Для доказательства достаточно применить теорему к разности $f(x) - g(x)$: так как ее производная $f'(x) - g'(x)$ внутри $\mathcal{X}$ сводится к 0, то сама разность будет постоянной.

Особенности пользования этой теоремой выясним на примерах:

1) Рассмотрим две функции

$$\operatorname{arctg} x \text{ и } \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Так как производная второй из них

$$D \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

совпадает с производной первой функции, то эти функции во всем промежутке от $-\infty$ до $+\infty$, разнятся на постоянную:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Для определения значения этой постоянной можно, например, положить здесь $x = 0$; так как при этом арктангенс и арксинус оба обратятся в 0, то и C должно быть нулем. Итак, мы доказали тождество

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

которое, впрочем, в **50** было выведено из элементарных соображений.

2) Предлагается, аналогично, доказать, что

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1).$$

3) Рассмотрим теперь функции

$$\operatorname{arctg} x \text{ и } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

Легко проверить, что их производные совпадают во всех точках x, исключая $x = \pm 1$ (где вторая из функций теряет смысл). Поэтому тождество

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

оказывается установленным лишь для каждого из промежутков

$$(-1, +1), \quad (-\infty, -1), \quad (+1, +\infty)$$

в отдельности. Любопытно, что и значения постоянной C для этих промежутков будут различными. Для первого из них $C = 0$ (в чем убеждаемся,

полагая $x=0$), а для двух других имеем, соответственно, $C=\frac{\pi}{2}$ или $C=-\frac{\pi}{2}$ (что легко усмотреть, если, например, устремить x к $-\infty$ или $+\infty$). Все эти соотношения также могут быть доказаны элементарно.

Замечание. Значение теоремы 1 проявляется в теоретических исследованиях и вообще в тех случаях, когда функция задана так, что из ее определения непосредственно не вытекает, что она сохраняет постоянное значение. Подобные случаи нам не раз встретятся в дальнейшем.

132. Условие монотонности функции. Выясним теперь, как по производной функции можно судить о возрастании (убывании) самой функции в данном промежутке. Остановимся сначала на случае функции, монотонно возрастающей в широком смысле, т. е. не убывающей (или монотонно убывающей в широком смысле, т. е. не возрастающей) [57].

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $\mathscr{X}$ и внутри него имеет конечную производную $f'(x)$. Для того чтобы $f(x)$ была в $\mathscr{X}$ монотонно возрастающей (убывающей) в широком смысле, необходимо и достаточно условие

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \text{ внутри } \mathscr{X}\,*).$$

Необходимость. Если $f(x)$ монотонно возрастает, хотя бы в широком смысле, то, взяв x внутри $\mathscr{X}$ и придав ему приращение $\Delta x > 0$, будем иметь:

$$f(x+\Delta x) \geqslant f(x), \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

и в пределе, при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x) \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть теперь, обратно, дано, что $f'(x) \geqslant 0$ внутри $\mathscr{X}$. Возьмем два значения x' и x'' $(x' < x'')$ из промежутка $\mathscr{X}$ и к функции $f(x)$ в промежутке $[x', x'']$ применим формулу Лагранжа:

$$f(x'')-f(x')=f'(c)\cdot(x''-x') \qquad (x' < c < x'').$$

Так как $f'(c) \geqslant 0$, то

$$f(x'') \geqslant f(x'),$$

и функция $f(x)$ будет возрастающей, по крайней мере, в широком смысле.

До сих пор для функции $f(x)$ не была исключена возможность сохранять в некоторых промежутках и постоянные значения, а для

*) Хотя формулируем теоремы мы параллельно и для возрастающих и для убывающих функций, но при доказательстве ограничиваемся лишь случаем возрастания.

ее производной — обращаться в этих промежутках тождественно в 0. Если мы эту возможность исключим, то придем к случаю возрастания (или убывания) в строгом смысле.

Теорема 3. *При сохранении тех же предположений относительно непрерывности функции $f(x)$ и существования ее производной $f'(x)$, для того чтобы $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) в строгом смысле, необходимы и достаточны условия:*

1) $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ для x внутри $\mathscr{X}$.

2) $f'(x)$ *не обращается тождественно в* 0 *ни в каком промежутке, составляющем часть* $\mathscr{X}$.

Необходимость. Если $f(x)$ возрастает в промежутке $\mathscr{X}$, то по теореме 2 имеем $f'(x) \geqslant 0$, так что условие 1) выполняется. Выполняется и условие 2), так как, если бы производная обращалась в 0 в некотором промежутке сплошь, то по теореме 1 в нем $f(x)$ была бы постоянной, что противоречило бы предположению.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы. Тогда, в силу теоремы 2, функция $f(x)$ является, во всяком случае, неубывающей. Если взять в $\mathscr{X}$ два значения x' и x'' $(x' < x'')$, то будем иметь не только

$$f(x') \leqslant f(x''), \tag{1}$$

но и

$$f(x') \leqslant f(x) \leqslant f(x'') \quad \text{для} \quad x \text{ в } [x', x'']. \tag{2}$$

Докажем, что знак равенства в (1) на деле осуществиться не может. Если бы было $f(x') = f(x'')$, то, ввиду (2), получили бы

$$f(x') = f(x) = f(x'') \quad \text{для} \quad x \text{ в } [x', x''],$$

т. е. функция $f(x)$ была бы постоянной в промежутке $[x', x'']$, и мы имели бы $f'(x) = 0$ в этом промежутке сплошь, вопреки условию 2). Итак,

$$f(x') < f(x'') \quad \text{при} \quad x' < x'',$$

т. е. функция $f(x)$, в строгом смысле, возрастает. Этим теорема доказана.

Установленная связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически совершенно очевидна, если вспомнить [91, 92], что производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции. Знак этого углового коэффициента показывает, наклонена ли касательная вверх или вниз, а с нею — идет ли вверх или вниз и сама кривая (рис. 54).

Однако в отдельных точках касательная при этом может оказаться и горизонтальной, т. е. производная — даже в строгом смысле — возрастающей (убывающей) функции может для отдельных значений x обращаться в 0.

Примеры. 1) Простейший пример последнего обстоятельства доставляет функция $f(x)=x^3$: она возрастает, и тем не менее производная ее $f'(x)=3x^2$ при $x=0$ обращается в 0.

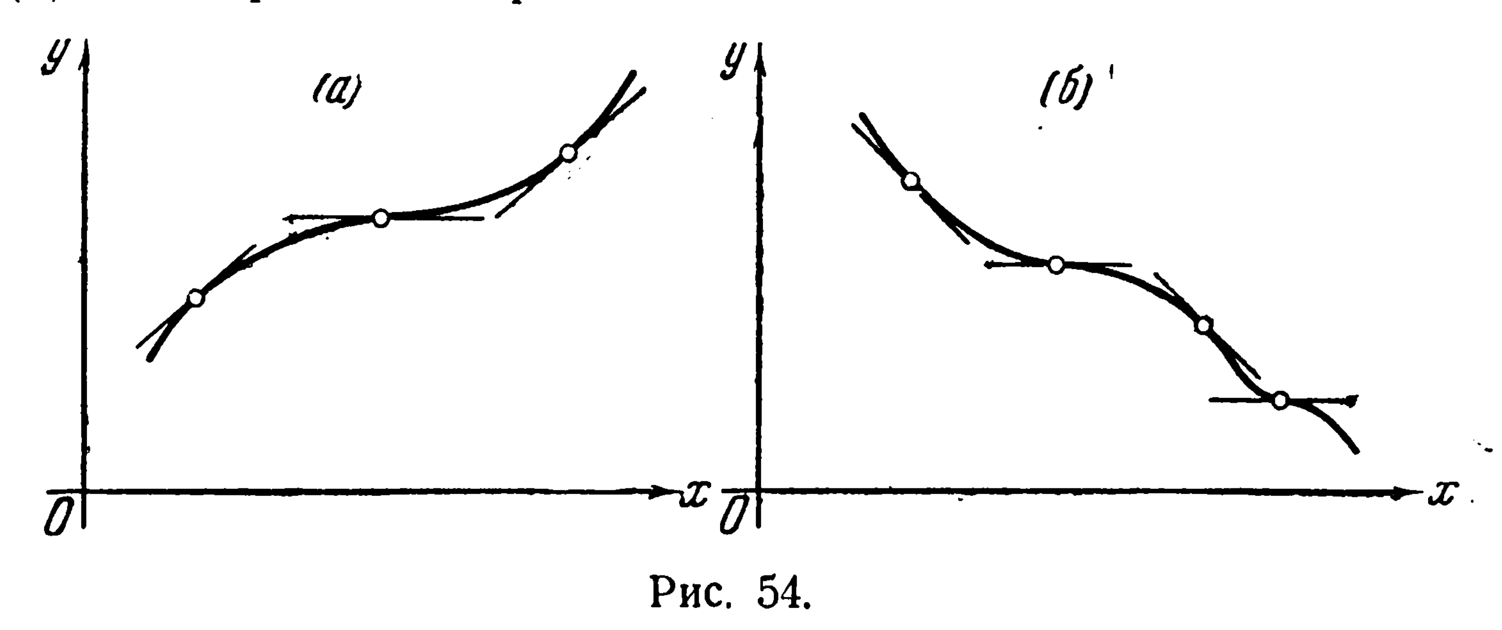


Рис. 54.

2) Аналогично, возрастающей будет и функция

$$f(x)=x-\sin x,$$

ибо ее производная

$$f'(x)=1-\cos x$$

не отрицательна, обращаясь в 0 для значений $x=2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

3) Наконец, чтобы показать, что для возрастающей функции производная может даже в *конечном* промежутке обращаться в 0 *бесконечное множество* раз, рассмотрим функцию

$$\begin{cases} f(x)=e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}} & \text{для } x>0, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\lim_{x\to+0} f(x)=0,$$

так что наша функция непрерывна и при $x=0$. Имеем, для $x>0$:

$$f'(x)=e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\geqslant 0,$$

причем эта производная обращается в 0 при $x=\frac{1}{2k\pi}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Заметим, что

$$0\leqslant f'(x)<2e\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}\to 0 \text{ при } x\to+0,$$

отсюда [113] и $f'(0)=0$.

Можно построить примеры возрастающих (убывающих) функций, для которых точки, где производная обращается в 0, распределены еще более сложным образом. Однако, подобные случаи встречаются редко, и для практических целей обычно пользуются таким *достаточным признаком*: *если производная $f'(x)>0$ (<0) повсюду.*

исключая разве лишь конечное число значений x, то функция $f(x)$ будет возрастающей (убывающей).

Этот признак очень удобен в приложениях.

Для примера рассмотрим функцию $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x>0$ и докажем, что она возрастает. Достаточно доказать, что возрастает ее логарифм

$$g(x)=\ln f(x)=x[\ln(x+1)-\ln x].$$

Имеем

$$g'(x)=[\ln(x+1)-\ln x]-\frac{1}{x+1}.$$

Так как, по формуле конечных приращений [112],

$$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{\xi}, \text{ где } x<\xi<x+1,$$

то $g'(x)>0$: $g(x)$ возрастает, что и требуется доказать.

133. Доказательство неравенств. Изложенный простой критерий монотонности успешно применяется к доказательству неравенств.

1) Докажем, что для $0<x<\frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x.$$

Пусть $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Производная

$$f'(x)=\frac{\cos x\,(x-\operatorname{tg} x)}{x^2}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

будет отрицательна, так как $x<\operatorname{tg} x$. Значит, функция $f(x)$ убывает и $f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$, если $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2) Функция $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$ обращается при $x=0$ в нуль. Ее производная, при $x>0$,

$$f'(x)=-\sin x+x>0\quad(\text{ибо } \sin x<x).$$

Значит, функция $f(x)$ для $x\geqslant 0$ оказывается возрастающей, и при $x>0$ будет $f(x)>f(0)=0$, т. е.

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2.$$

Отсюда, аналогично, при $x>0$ получим, что

$$\sin x>x-\frac{1}{6}x^3,$$

и т. д.

3) Доказать, что при $0<x<\frac{\pi}{2}$ будет

$$\operatorname{tg} x>x+\frac{1}{3}x^3.$$

Для этого достаточно установить, что для указанных x производная функции $\operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}x^3$, равная $\sec^2 x - 1 - x^2$, положительна, т. е. что $\operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0$, а это приводит к известному неравенству $\operatorname{tg} x > x$ [54 (9)].

4) Так как функция $f(x) = \ln x - x$ $(x > 0)$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \begin{cases} > 0 \text{ при } 0 < x < 1 \\ < 0 \text{ при } x > 1, \end{cases}$$

то функция эта возрастает, пока x изменяется в промежутке $(0, 1]$, и убывает в промежутке $[1, +\infty)$. Отсюда ясно, что $f(1) = -1$ будет наибольшим значением функции, так что для $x > 0$

$$\ln x \leqslant x - 1.$$

5) Рассмотрим еще функцию $f(x) = x^\alpha - \alpha x$ для $x \geqslant 0$ (предполагая $0 < \alpha < 1$). Имеем

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \quad \begin{cases} > 0 \text{ при } 0 < x < 1 \\ < 0 \text{ при } x > 1, \end{cases}$$

и — аналогично 4) — заключим, что для $x > 0$

$$x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha. \tag{3}$$

Полученное простое неравенство является источником для вывода ряда классических неравенств. В связи с этим полезно представить его еще и в других формах.

Полагая $x = \frac{a}{b}$, где a и b произвольные положительные числа, и обозначая $1 - \alpha$ через β, приведем (3) к виду

$$a^\alpha b^\beta \leqslant \alpha a + \beta b \tag{3а}$$
$$(a, b, \alpha, \beta > 0, \ \alpha + \beta = 1).$$

Иногда вводят числа $k = \frac{1}{\alpha} > 1$ и $k' = \frac{1}{\beta} > 1$, так что $k' = \frac{k}{k-1}$. Заменяя в предыдущем неравенстве a и b, соответственно через a^k и $b^{k'}$, получим

$$ab \leqslant \frac{1}{k}a^k + \frac{1}{k'}b^{k'}. \tag{3б}$$
$$\left(a, b > 0; \ k, k' > 1, \ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1\right).$$

6) Прежде всего, неравенство (3а) можно распространить на случай любого числа перемножаемых степеней. От двух к трем переход осуществляется так (с двукратным применением неравенства (3а)):

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma = a^\alpha \cdot \left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma} \leqslant \alpha a + (\beta+\gamma) \cdot b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha a + (\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} c\right) = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

так что окончательно

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \leqslant \alpha a + \beta b + \gamma c.$$
$$(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0, \ \alpha + \beta + \gamma = 1)$$

Аналогично можно было бы совершить и переход от n к $n+1$ и доказать — по методу математической индукции — общее неравенство, которое (в измененных обозначениях) имеет вид:

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n} \leqslant q_1 a_1 + q_2 a_2 + \ldots + q_n a_n.$$
$$(a_1, \ldots, a_n, \ q_1, \ldots, q_n > 0, \ q_1 + \ldots + q_n = 1)$$

Взамен q_i можно ввести произвольные числа $p_i > 0$, полагая $q_i = \frac{p_i}{\sum_j p_j}$, так что сумма $\sum_i q_i = 1$. Неравенство напишется так:

$$\left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_j p_j}} \leqslant \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \tag{4}$$

$$(a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n > 0)$$

При $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ мы придем к известному неравенству

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{4a}$$

устанавливающему, что *среднее геометрическое ряда положительных чисел не превосходит их среднего арифметического.* Таким образом, неравенство (4) является естественным обобщением этого классического утверждения.

7) Обратимся к доказательству, так называемого, неравенства Коши — Гельдера (A. L. Cauchy — O. Hölder)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}. \tag{5}$$

$$\left(a_i, b_i > 0;\ k, k' > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1\right)$$

Коши установил это неравенство для частного случая $k = k' = 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{5a}$$

Предположим сначала, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} = 1, \tag{6}$$

так что подлежащее доказательству неравенство примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1.$$

Положим в неравенстве (3б) поочередно $a = a_i$, $b = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и просуммируем все полученные неравенства; учитывая условие (6), придем к требуемому результату.

Общий случай приводится к рассмотренному частному, если взамен чисел a_i, b_i ввести числа

$$a_i' = \frac{a_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right\}^{\frac{1}{k}}}, \qquad b_i' = \frac{b_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n} b_j^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}},$$

для которых уже выполняются условия типа (6). По доказанному

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' b_i' \leqslant 1,$$

а это равносильно (5).

8) Из неравенства Коши — Гельдера сразу получается еще одно важное неравенство, носящее имя Минковского (H. Minkowski)

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}. \qquad (7)$$

$$(a_i,\ b_i > 0,\ k > 1)$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^k = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i+b_i)^{k-1}.$$

Если к каждой из последних двух сумм применить неравенство (5), то получим *):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^k \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} +$$

$$+ \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} =$$

$$= \left\{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\right\} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

и, наконец сократив на последний множитель, придем к (7).

134. Максимумы и минимумы; необходимые условия. Если функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $[a, b]$, не является в нем монотонной, то найдутся такие части $[\alpha, \beta]$ промежутка $[a, b]$, в которых наибольшее или наименьшее значение достигается функцией во внутренней точке, т. е. между α и β. На графике функции (рис. 55) таким промежуткам соответствуют характерные горбы или впадины.

Говорят, что *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (или минимум)* **), *если эту точку можно окружить такой окрестностью $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, содержащейся в промежутке, где задана*

---

*) Напомним, что $\frac{1}{k} + \frac{1}{k!} = 1!$.

**) По-латыни слова maximum и minimum означают «наибольшее» и «наименьшее» (значение).

функция, что для всех ее точек x выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{или } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Иными словами, точка x_0 доставляет функции $f(x)$ максимум (минимум), если значение $f(x_0)$ оказывается наибольшим (наименьшим) из значений, принимаемых функцией в некоторой (хотя бы малой) окрестности этой точки. Отметим, что самое определение максимума (минимума) предполагает, что функция задана по обе стороны от точки x_0.

Если существует такая окрестность, в пределах которой (при $x \neq x_0$) выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$
$$(\text{или } f(x) > f(x_0)),$$

то говорят, что функция имеет в точке x_0 собственный максимум (минимум), в противном случае — несобственный.

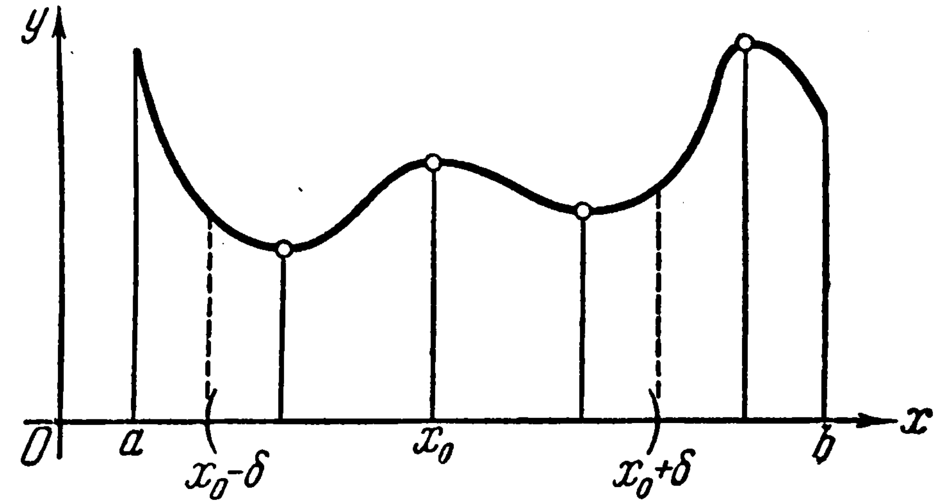


Рис. 55.

Если функция имеет максимумы в точках x_0 и x_1, то, применяя к промежутку $[x_0, x_1]$ 2-ю теорему Вейерштрасса [85], видим, что наименьшего своего значения в этом промежутке функция достигает в некоторой точке x_2 между x_0 и x_1 и имеет там минимум. Аналогично, между двумя минимумами непременно найдется максимум. В том простейшем (и на практике — важнейшем) случае, когда функция имеет вообще лишь конечное число максимумов и минимумов, они попросту чередуются.

Заметим, что для обозначения максимума или минимума существует и объединяющий их термин — экстремум *).

Поставим задачу о разыскании всех значений аргумента, доставляющих функции экстремум. При решении ее основную роль будет играть производная.

Предположим сначала, что для функции $f(x)$ в промежутке (a, b) существует конечная производная. Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то, применяя к промежутку $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, о котором была речь выше, теорему Ферма [109], заключаем, что $f'(x_0) = 0$: в этом состоит необходимое условие экстремума. Экстремум следует искать только в тех точках, где производная равна нулю; такие точки будем называть стационарными **).

Не следует думать, однако, что каждая стационарная точка доставляет функции экстремум: указанное только что необходимое

*) Латинское extremum, что означает «крайнее» (значение).

**) В них изменение функции как бы «приостанавливается»: скорость этого изменения [92] обращается в нуль.

условие не является достаточным. Мы видели, например, в **132**, 1), что для функции x^3 производная $3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, но в этой точке функция не имеет экстремума: она все время возрастает.

Если расширить класс рассматриваемых функций $f(x)$ и допустить, что в отдельных точках двусторонней конечной производной не существует, то не исключена возможность того, что экстремум придется на какую-либо из таких точек: ведь теорема Ферма утверждает равенство $f'(x)=0$ лишь в предположении, что существует двусторонняя конечная производная! Например, функция $x^{\frac{2}{3}}$, очевидно, имеет минимум при $x=0$, в то время как в этой точке ее производная слева равна $-\infty$, а справа $+\infty$ [**101**]; точно также в точке $x=0$ имеет минимум функция $|x|$, хотя двусторонней производной для нее в этой точке нет [**100**]. Следовательно, и точки, в которых не существует двусторонней конечной производной, также могут доставлять функции экстремум. Но, разумеется, и в этом случае также не может быть гарантировано наличие экстремума во всех таких точках. Примерами могут служить функции $y=x^{\frac{1}{3}}$ и $y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ (с дополнительным условием: $y=0$ при $x=0$). Первая из них имеет бесконечную производную в точке $x=0$ [**101**], вторая же вовсе не имеет производной в этой точке [**102**, 1°], но точка $x=0$ не доставляет экстремума ни той, ни другой функции (ибо в любой ее окрестности обе функции принимают и положительные и отрицательные значения).

135. Достаточные условия. Первое правило. Итак, если точка x_0 есть стационарная точка для функции $f(x)$ или если в этой точке не существует для нее двусторонней конечной производной, то точка x_0 представляется, так сказать, лишь «подозрительной» по экстремуму и подлежит дальнейшему испытанию.

Это испытание состоит в проверке достаточных условий для существования экстремума, которые мы сейчас установим.

Предположим, что в некоторой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0 (по крайней мере, для $x\neq x_0$) существует конечная производная $f'(x)$ и как слева от x_0, так и справа от x_0 (в отдельности) сохраняет определенный знак. Тогда возможны следующие три случая:

I. $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, т. е. *производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус.* В этом случае, в промежутке $[x_0-\delta,\ x_0]$ функция $f(x)$ возрастает, а в промежутке $[x_0,\ x_0+\delta]$ убывает [**132**], так что значение $f(x_0)$ будет наибольшим в промежутке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, т. е. в точке x_0 функция имеет собственный максимум.

II. $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, т. е. *производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс.* В этом

случае аналогично убеждаемся, что в точке x_0 функция имеет собственный **минимум**.

III. $f'(x)>0$ как при $x<x_0$, так и при $x>x_0$, либо же $f'(x)<0$ и слева и справа от x_0, т. е. *при переходе через x_0 $f'(x)$ не меняет знака.* Тогда функция либо все время возрастает, либо все время убывает; в любой близости от x_0 с одной стороны найдутся точки x, в которых $f(x)<f(x_0)$, а с другой — точки x, в которых $f(x)>f(x_0)$, так что в точке x_0 никакого **экстремума нет**.

Графическая иллюстрация простейших возможностей дана на рис. 56а, б, в.

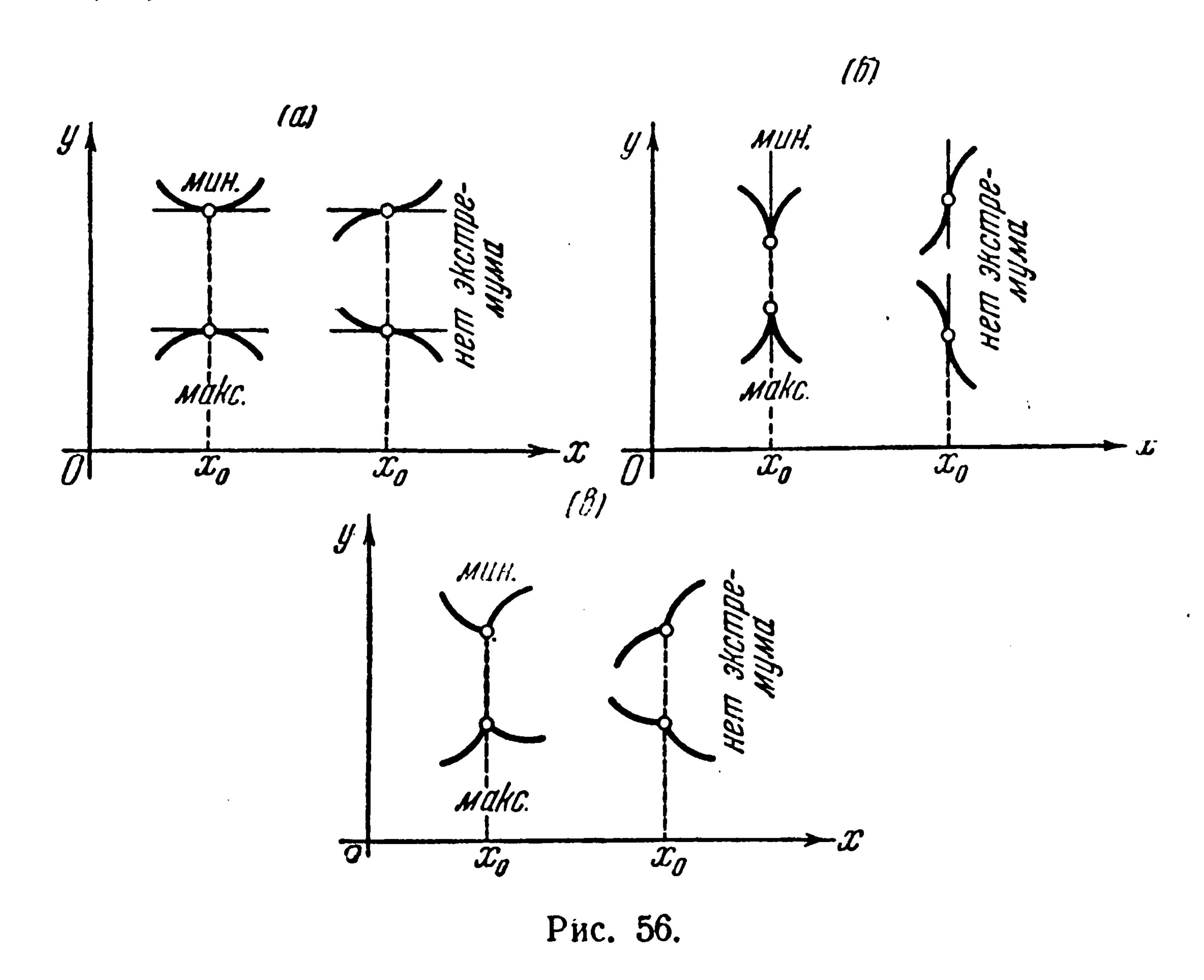


Рис. 56.

Итак, мы получаем **первое правило** для испытания «подозрительного» значения x_0: *подставляя в производную $f'(x)$ сначала $x<x_0$, а затем $x>x_0$, устанавливаем знак производной вблизи от точки x_0 слева и справа от нее; если при этом производная $f'(x)$ меняет знак плюс на минус, то налицо максимум, если меняет знак минус на плюс, то — минимум; если же знака не меняет, то экстремума вовсе нет.*

Это правило полностью решает вопрос в том случае, когда в промежутке (a, b), как это обычно бывает, всего лишь конечное число стационарных точек или точек, где отсутствует конечная производная:

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n<b. \tag{4}$$

Именно, тогда, прежде всего, в любом промежутке

$$(a_1, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_n, b)$$

существует конечная производная $f'(x)$ и, кроме того, в каждом таком промежутке $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Действительно, если бы $f'(x)$ меняла знак, например, в промежутке (x_k, x_{k+1}), то, по теореме Дарбу [110], она обращалась бы в нуль в некоторой точке между x_k и x_{k+1}, что невозможно, поскольку все корни производной уже содержатся в ряду точек (4).

Последнее замечание бывает полезно в некоторых случаях на практике: знак производной $f'(x)$ во всем промежутке (x_k, x_{k+1}) определится, если вычислить значение (или даже только установить знак) ее в одной какой-либо точке этого промежутка.

136. Примеры. 1) Найти экстремумы функции $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$. Ее производная всегда существует и конечна:

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x+2)(x-1)^2(5x+4).$$

Корнями производной (стационарными точками) будут:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -\frac{4}{5} = -0{,}8, \quad x_3 = 1.$$

Этими значениями весь промежуток $(-\infty, +\infty)$ разбивается на следующие части:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -0{,}8), \ (-0{,}8, 1), \ (1, +\infty).$$

Для определения знака производной в этих промежутках можно, воспользовавшись сделанным выше замечанием, установить его для конкретных значений, например, для -3, -1, 0 и 2. Определяя знаки отдельных множителей, для всей производной получаем следующие знаки:

в промежутке	$(-\infty, -2)$	$(-)\,(+)\,(-) = +$
» »	$(-2, -0{,}8)$	$(+)\,(+)\,(-) = -$
» »	$(-0{,}8, 1)$	$(+)\,(+)\,(+) = +$
» »	$(1, +\infty)$	$(+)\,(+)\,(+) = +$

Отсюда ясно, что при $x = -2$ функция $f(x)$ имеет максимум, при $x = -0{,}8$ она имеет минимум, а при $x = 1$ экстремума вовсе нет.

Однако, обычно поступают иначе, не подставляя в производную конкретных значений. Начнем с $x = -2$. Произведение двух последних множителей производной $(x-1)^2$ и $5x+4$ при $x = -2$ имеет знак минус, следовательно (по непрерывности) сохраняет тот же знак и вблизи этой точки (как слева, так и справа). Множитель же $x+2$, когда x, возрастая, проходит через значение -2, меняет знак минус на плюс, так что производная меняет знак плюс на минус, и функция имеет максимум. При $x = -\frac{4}{5}$ (и вблизи этого значения) первые два множителя производной имеют знак плюс; последний же множитель $5x+4$ (а с ним и вся производная) при прохождении через это значение меняет знак минус на плюс; функция здесь имеет минимум. Наконец, при переходе через значение $x = 1$, не только первый и третий множитель сохраняют знак, но и второй множитель также, ибо квадрат всегда положителен; экстремума здесь нет.

Зная точки x, доставляющие нашей функции экстремальные значения, легко вычислить теперь и сами эти значения: максимум $f(-2)=0$ и минимум $f(-0{,}8) \doteq -8{,}40$. На рис. 57 дан график, иллюстрирующий изменение этой функции *).

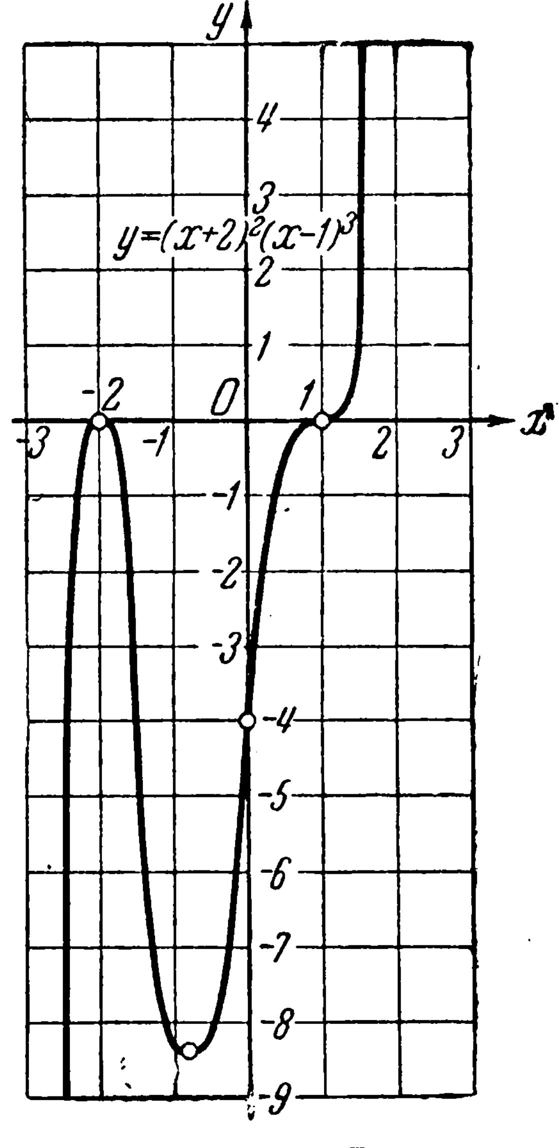


Рис. 57.

2) Найти экстремумы функции $f(x)=\sin^3 x + \cos^3 x$.

Ввиду того, что функция имеет период 2π, достаточно ограничиться теми значениями x, которые содержатся в промежутке $[0, 2\pi]$. Производная этой функции существует везде:

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^2 x \cdot \sin x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x).$$

Корни производной (стационарные точки) в этом случае будут:

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2}\ (2\pi).$$

При переходе через $x=0$ множитель $\sin x$ меняет знак минус на плюс, а вся производная меняет знак плюс на минус, ибо последние два множителя сохраняют вблизи $x=0$ знак минус; налицо максимум. Множитель $\sin x - \cos x$, обращающийся в нуль при $x=\frac{\pi}{4}$, при переходе через эту точку меняет знак минус на плюс. То же будет и с производной, так как первые два множителя положительны; следовательно, здесь будет минимум. Аналогично исследуются и остальные стационарные точки: все они поочередно доставляют функции максимумы

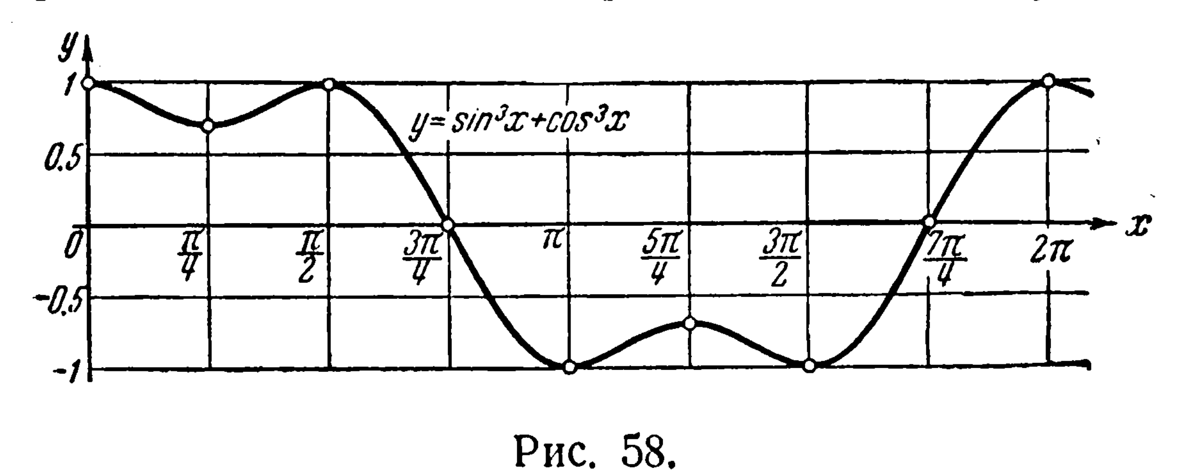


Рис. 58.

и минимумы. Подставляя их в выражение функции, получим сами максимальные и минимальные значения:

максимумы: $f(0)=f(2\pi)=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq -0{,}71,$

минимумы: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq 0{,}71,\quad f(\pi)=-1,\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1.$

График функции представлен на рис. 58 [ср. **147**, 1)].

3) Найти экстремумы функции $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

*) Здесь и в следующих примерах изменение функции мы иллюстрируем графиками, но самый вопрос о построении графиков будет подробно рассмотрен лишь в § 3. См., в частности, **149**, 3).

На этот раз конечная производная

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

существует везде, исключая точки $x=0$ и $x=\pm 1$.

При приближении x к этим значениям (с обеих сторон) производная стремится к $\pm\infty$.

Для определения корней производной, приравниваем нулю ее числитель; мы найдем $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Итак, «подозрительными» по экстремуму будут точки:

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad +1.$$

При $x=0$ (и вблизи этой точки) числитель и второй множитель знаменателя имеют знак плюс. Множитель же $x^{\frac{1}{3}}$ знаменателя меняет знак минус на плюс, производная — тоже: минимум. При $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и (вблизи) знаменатель сохраняет знак плюс. Числитель же, имея в виду значения x, близкие к $\frac{1}{\sqrt{2}}$, перепишем так: $(1-x^2)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}$; он обращается в нуль при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, с уменьшением x — увеличивается, а с увеличением — уменьшается, так что меняет знак плюс на минус, и налицо максимум. То же и при $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. При переходе через $x=1$ множитель $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ в знаменателе, который обращается в этой точке в нуль, не меняет знака; это же справедливо и для производной, так что при $x=1$ экстремума нет. То же и при $x=-1$.

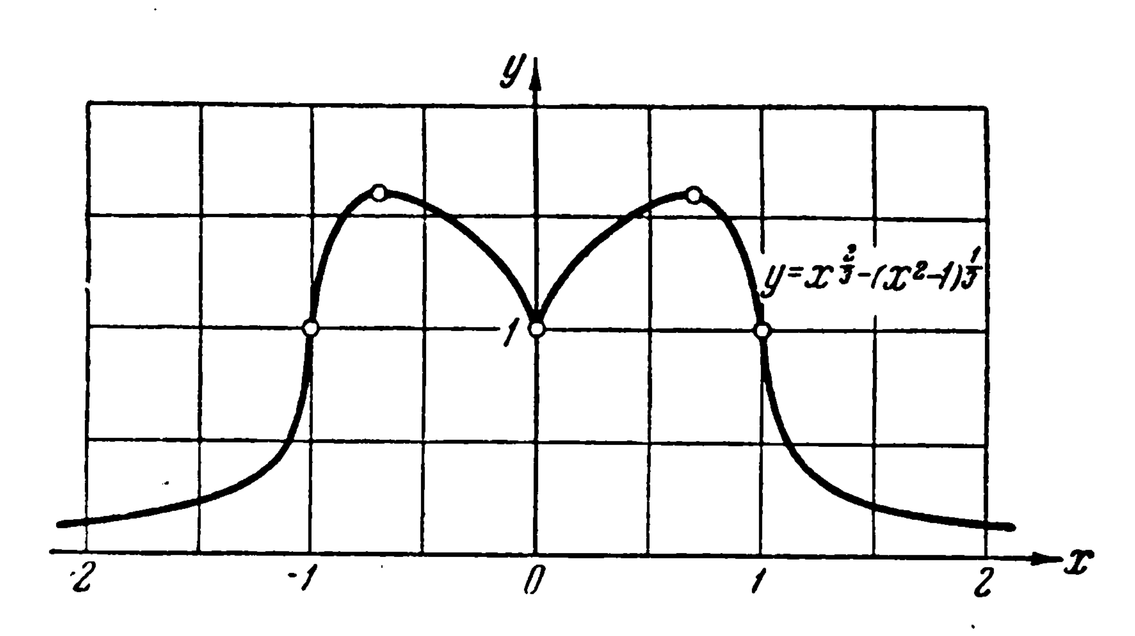


Рис. 59.

Итак, максимумы $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{4}\doteq 1{,}59$, а минимум $f(0)=1$.

График на рис. 59 [ср. **149**, 4)].

4) Затухающие колебания. Пусть движение точки происходит по следующему закону:

$$s=Ae^{-kt}\sin\omega t,$$

где s — пройденный путь (отсчитываемый от начального положения), а t — время (отсчитываемое от начального момента). Будем считать все постоянные A, k, ω, а также переменную t — положительными. Выясним вид графика этой зависимости; его интересно сопоставить с уже знакомой нам синусоидой $s = A\sin\omega t$. Так как $e^{-kt} > 0$, то, очевидно, оба графика пересекают ось x в одних и тех же точках $t = n\frac{\pi}{\omega}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Заметим, что функция $s = A\sin\omega t$ имеет попеременно максимумы и минимумы в точках $t = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}$, где обращается в нуль ее производная $s' = A\omega\cos\omega t$. Составим производную для заданной функции [ср. 99, 30)]:

$$s' = Ae^{-kt}(\omega\cdot\cos\omega t - k\cdot\sin\omega t) =$$
$$= A\cdot\sqrt{\omega^2+k^2}\,e^{-kt}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\cos\omega t - \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\sin\omega t\right).$$

Вводя вспомогательный угол φ под условиями:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}} = \cos\varphi,\quad \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}} = \sin\varphi,$$

перепишем выражение производной в виде

$$s' = A\cdot\sqrt{\omega^2+k^2}\,e^{-kt}\cos(\omega t+\varphi).$$

Она обращается в нуль в точках

$$t = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega},$$

и так как косинус, проходя через нуль, меняет знак, то легко сообразить, что при этих значениях наша функция, действительно, имеет максимумы при n четных и минимумы при n нечетных. По сравнению с синусоидой, произошло смещение экстремальных точек влево на $\frac{\varphi}{\omega}$.

Нетрудно проверить, что все максимумы будут положительны, а минимумы отрицательны. Если величину n-го экстремума обозначить через A_n, то

$$\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right| = e^{\frac{k\pi}{\omega}},$$

так что размахи убывают в геометрической прогрессии.

График (для простого частного случая) представлен на рис. 60. Движение подобного типа носит название затухающего колебания.

Замечание. В большинстве представляющихся на практике случаев изложенного в предыдущем п° правила оказывается вполне достаточно для исследования «подозрительных» значений. Однако следует дать себе отчет в том, что могут быть случаи, где оно неприложимо: это будет тогда, когда в любой близости от испытуемой точки содержится бесконечное множество других подобных же точек, и производная не сохраняет определенного знака с той или с другой стороны от этой точки.

Рассмотрим для примера функцию, определяемую равенствами:

$$f(x) = x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\quad (\text{при}\ \ x\neq 0)\quad \text{и}\quad f(0) = 0.$$

Мы уже знаем, что она при $x=0$ имеет производную $f'(0)=0$ [102, 2°]. Однако в любой близости от стационарной точки $x=0$ как слева, так и справа производная

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

бесконечное множество раз меняет знак. Здесь в точке $x=0$ нет

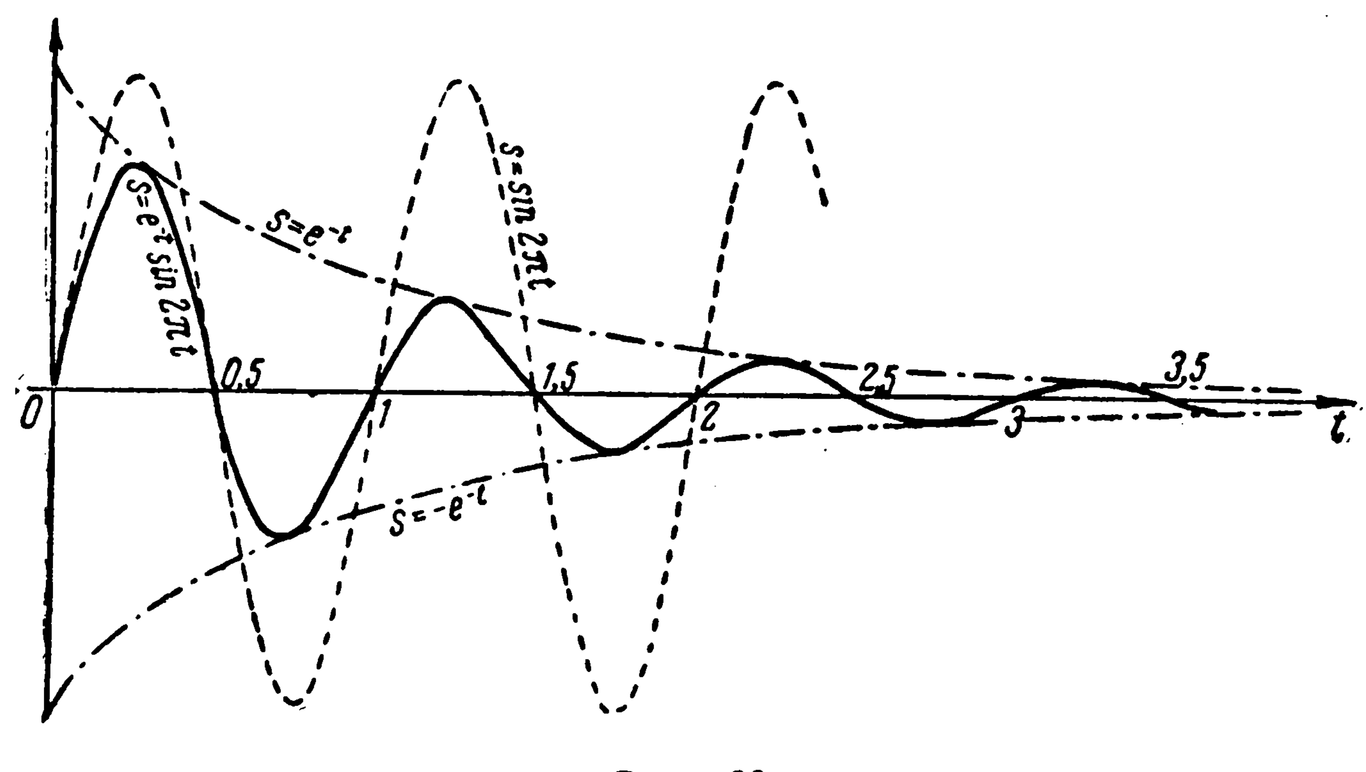


Рис. 60.

экстремума. Если же определить функцию так:

$$f(x)=x^2\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\quad\text{при}\quad x\neq 0,\quad f(0)=0,$$

то она обнаруживает такую же особенность, но на этот раз при $x=0$, очевидно, будет минимум. Правило в обоих случаях неприложимо.

137. Второе правило. При разыскании экстремумов исследование знака производной вблизи испытуемой точки можно заменить исследованием знака второй производной в самой этой точке; покажем это.

Итак, пусть функция $f(x)$ не только имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_0, но и вторую производную в самой точке x_0: $f''(x_0)$. Точка x_0 — стационарная, т. е. $f'(x_0)=0$. Если $f''(x_0)>0$, то, по лемме n° **109**, — функция $f'(x)$ в точке $x=x_0$ возрастает, т. е. вблизи точки x_0 слева $f'(x)<f'(x_0)=0$, а справа $f'(x)>f'(x_0)=0$. Таким образом, производная $f'(x)$ меняет знак минус на плюс и, следовательно, $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ минимум. Если, $f''(x_0)<0$, то $f'(x)$ в точке $x=x_0$ убывает, меняя знак плюс на минус, так что налицо максимум.

Таким образом, можно сформулировать *второе правило* для испытания «подозрительного» значения x_0: *подставляем x_0 во вторую производную $f''(x)$; если $f''(x_0)>0$, то функция имеет минимум, если же $f''(x_0)<0$, то — максимум.*

Это правило имеет, вообще говоря, более узкий круг применения; оно, например, явно неприложимо к тем точкам, где не существует конечной первой производной (ибо там и речи быть не может о второй). В тех случаях, когда вторая производная обращается в нуль, правило также ничего не дает. Решение вопроса зависит тогда от поведения высших производных [см. следующий n°].

Если пожелать приложить это правило к примеру 2), то нужно вычислить вторую производную:

$$f''(x) = 6\sin x\cos x(\cos x + \sin x) - 3(\sin^3 x + \cos^3 x).$$

При $x = 0\,(2\pi)$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ первое слагаемое обращается в нуль и знак $f''(x)$ противоположен знаку $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; это будет минус для $x = 0\,(2\pi)$, $\frac{\pi}{2}$ (здесь максимумы) и плюс для $x = \pi$ и $\frac{3\pi}{2}$ (здесь минимумы). Для $x = \frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$, ввиду равенства $\sin x = \cos x$, $f''(x)$ сведется к $6\sin^3 x$, так что в первой из этих точек знак второй производной будет плюс (минимум), а во второй минус (максимум).

Вот новый пример: найти экстремумы функции $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.

Производная $f'(x) = 5\,\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$ обращается в нуль вместе с числителем; ее корни будут $x_1 = 1 - \sqrt{2} \doteq -0{,}41$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2} \doteq 2{,}41$. Дифференцируем производную снова как произведение:

$$f''(x) = \frac{5}{(x^2 + 1)^2}(2x - 2) + \ldots,$$

причем точками заменен член, содержащий множителем $x^2 - 2x - 1$ и нам

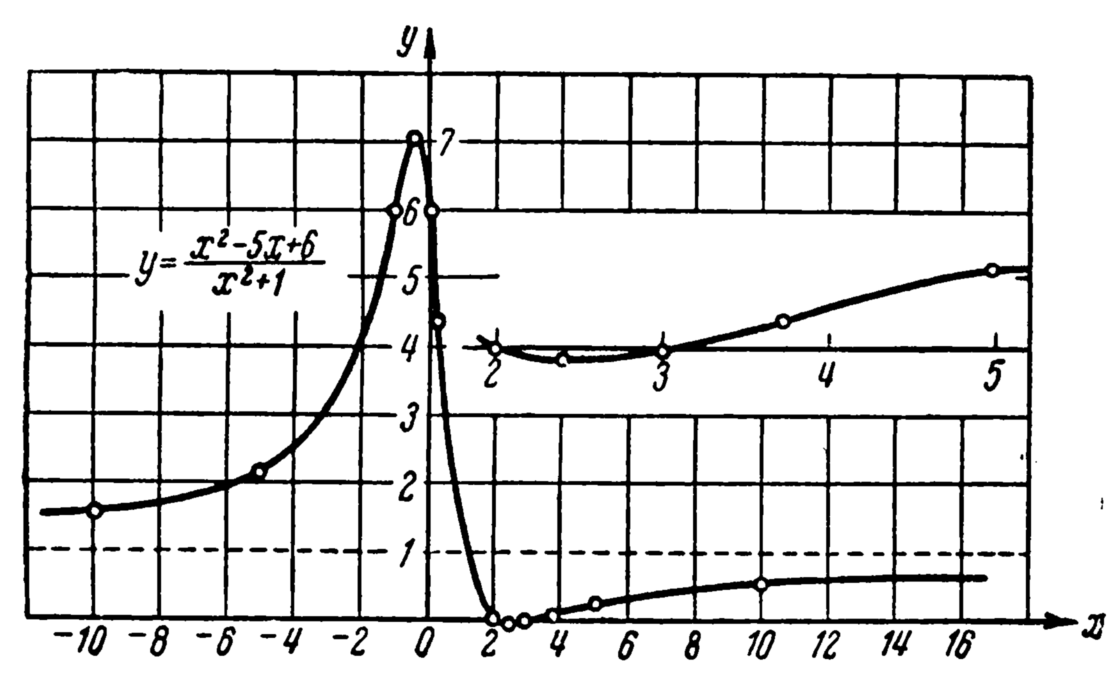


Рис. 61.

не нужный, ибо для тех значений x, которые мы собираемся подставлять, он заведомо нуль. Легко видеть, что $f''(x_1) < 0$, а $f''(x_2) > 0$, следовательно, значение $f(x_1) \doteq 7{,}04$ есть максимум, а $f(x_2) \doteq -0{,}03$ — минимум.

График функции дан на рис. 61 [см. **149**, 5)].

Наконец, рассмотрим еще такую задачу геометрического содержания: найти экстремальные значения для расстояния r от данной (на плоскости) точки $P(\xi, \eta)$ до точек $M(x, y)$ кривой (K), заданной своим уравнением: $y=f(x)$ (рис. 62).

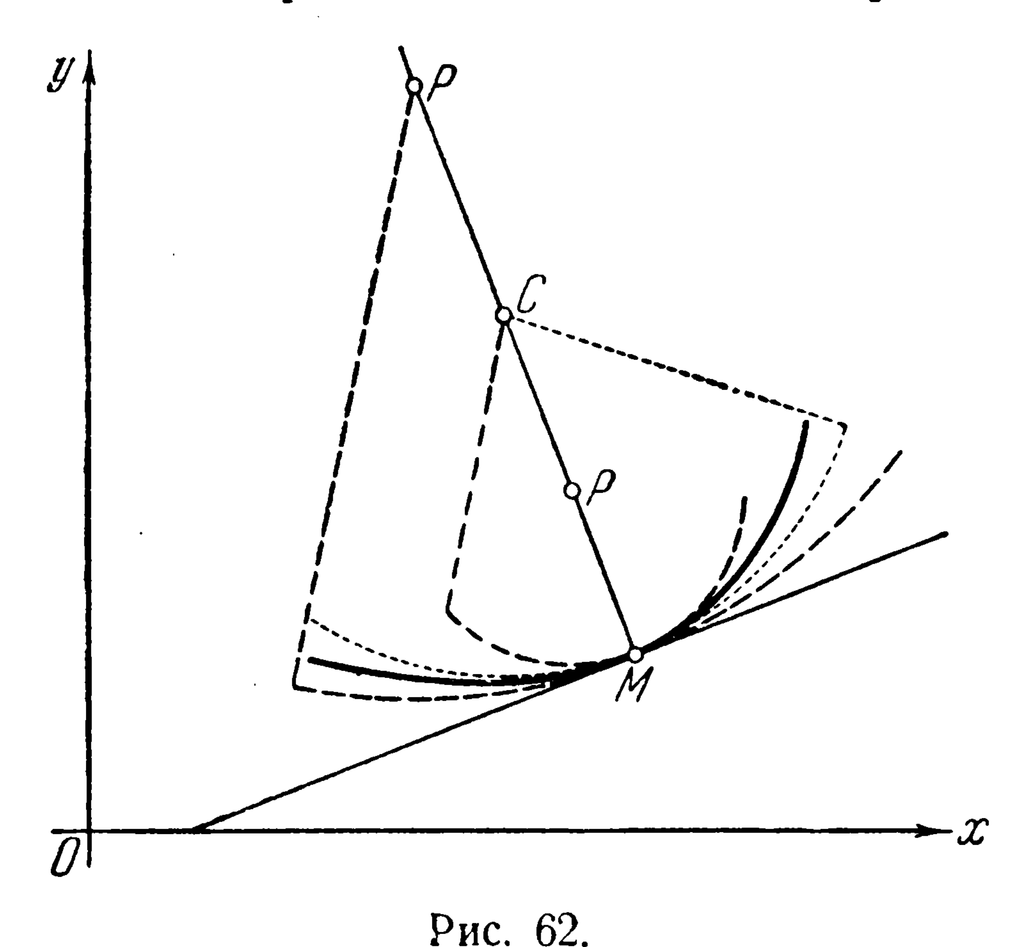


Рис. 62.

Вместо функции r можно рассмотреть функцию

$$u=\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2],$$

где $y=f(x)$. Приравнивая нулю производную:

$$u'_x=x-\xi+(y-\eta)\cdot y'_x,$$

видим, что для того, чтобы точка $M(x, y)$ на кривой (K) доставляла экстремум расстоянию r, необходимо выполнение условия:

$$\xi-x+y'_x(\eta-y)=0.$$

Иными словами, точка $P(\xi, \eta)$ должна лежать на прямой

$$X-x+y'_x(Y-y)=0,$$

проведенной через точку $M(x, y)$ кривой перпендикулярно к касательной *); ее называют *нормалью* к кривой.

Допустим же, что точка $P(\xi, \eta)$ действительно лежит на нормали к кривой (K) в точке $M(x, y)$; будет ли расстояние PM экстремум? Решение этого вопроса зависит от знака второй производной:

$$u''_{x^2}=1+y'^2_x+(y-\eta)\cdot y''_{x^2}.$$

Это выражение обращается в нуль (предполагая $y''_{x^2}\neq 0$) лишь в точке C с координатами:

$$\xi=x-y'_x\cdot\frac{1+y'^2_x}{y''_{x^2}},\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2_x}{y''_{x^2}};$$

для нее вопрос остается открытым. Точка C отделяет на нормали те точки P, для которых $u''<0$, и расстояние PM будет *максимум*, от тех точек P, для которых $u''>0$, и это расстояние есть *минимум*.

Впоследствии [243, 253] мы увидим, что эта *пограничная точка* C на нормали замечательна во многих отношениях.

138. Использование высших производных. Мы видели, что если $f(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то функция $f(x)$ достигает в точке x_0 минимума; если же $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то функция имеет в этой

---

*) Ее угловой коэффициент $-\frac{1}{y'_x}$ обратен по величине и по знаку угловому коэффициенту y'_x касательной.

точке максимум. Случай, когда и $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, был оставлен нами неисследованным.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ n последовательных производных, причем все они, вплоть до $(n-1)$-й, в этой точке обращаются в нуль:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

между тем как $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Разложим приращение $f(x)-f(x_0)$ функции $f(x)$ по степеням разности $x-x_0$ по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано [**124**, (10а)]. Так как все производные порядков меньших, чем n, равны в точке x_0 нулю, то

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n.$$

Вследствие того, что $\alpha\to 0$ при $x\to x_0$, при достаточной близости x к x_0 знак суммы в числителе будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)$ как для $x<x_0$, так и для $x>x_0$. Рассмотрим два случая.

1° n — нечетное число: $n=2k+1$. При переходе от значений x, меньших, чем x_0, к значениям, бо́льшим, чем x_0, выражение $(x-x_0)^n$ изменит знак на обратный, а так как знак первого множителя при этом не меняется, то и знак разности $f(x)-f(x_0)$ изменится. Таким образом, в точке x_0 функция $f(x)$ не может иметь экстремума, ибо вблизи этой точки принимает значения как меньшие, так и большие, чем $f(x_0)$.

2° n — четное число: $n=2k$. В этом случае разность $f(x)-f(x_0)$ не меняет знака при переходе от x меньших, чем x_0, к бо́льшим, так как $(x-x_0)^n>0$ при всех x. Очевидно, вблизи x_0 как слева, так и справа знак разности $f(x)-f(x_0)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Значит, если $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x)>f(x_0)$ вблизи точки x_0, и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет (собственный) минимум; если же $f^{(n)}(x_0)<0$, то функция имеет (собственный) максимум.

Отсюда получаем такое правило:

Если первая из производных, не обращающихся в точке x_0 в нуль, есть производная нечетного порядка, функция не имеет в точках x_0 ни максимума, ни минимума. Если такой производной является производная четного порядка, функция в точке x_0 имеет максимум или минимум, смотря по тому, будет ли эта производная отрицательна или положительна.

Например, для функции $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ точка $x=0$ является стационарной, так как в этой точке обращается в нуль производная

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x.$$

Далее:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\qquad f''(0)=0;$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\qquad f'''(0)=0;$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\qquad f^{\mathrm{IV}}(0)=4.$$

Так как в нуль не обратилась первой производная **четного** порядка, то налицо экстремум, а именно минимум, ибо $f^{IV}(0) > 0$.

Замечание. Хотя выведенный выше критерий решает вопрос об экстремуме в весьма широком классе случаев, но, теоретически говоря, он все же не является всеобъемлющим: функция, не будучи тождественно постоянной, может иметь в окрестности испытуемой точки производные всех порядков, которые, однако, в *этой точке* все зараз обращаются в нуль.

В качестве примера рассмотрим (вместе с Коши) следующую функцию:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{при} \quad x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

При $x \neq 0$ она имеет производные всех порядков:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

где $P_n(z)$ есть целый многочлен (степени $3n$). В общности этого закона легко убедиться по методу математической индукции.

Установим теперь, что и в точке $x = 0$ для нашей функции *существуют производные всех порядков, причем все равны нулю*. Действительно, прежде всего,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0\,*),$$

так что $f'(0) = 0$. Допустим, что доказываемое утверждение верно для всех производных до n-го порядка включительно. Тогда [см. (5)]

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

поскольку числитель представляет собой сумму членов вида $\frac{c}{x^m}$. Значит, и $f^{(n+1)}(0) = 0$. По методу математической индукции утверждение оправдано полностью.

Хотя *непосредственно* ясно, что данная функция при $x = 0$ имеет минимум, но установить этот факт с помощью рассмотрения ее последовательных производных в этой точке — не удалось бы.

139. Разыскание наибольших и наименьших значений.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в конечном замкнутом

---

*) Напомним, что e^z при $z \to +\infty$ будет бесконечно большой высшего порядка, чем *любая* степень z^k, т. е.

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{z^k}{e^z} = 0$$

[65]. Здесь роль z играет $\frac{1}{x^2}$ (при $x \to 0$).

промежутке $[a, b]$. До сих пор мы интересовались лишь ее максимумами и минимумами, теперь же поставим вопрос о разыскании наибольшего и наименьшего из всех значений, которые она принимает в этом промежутке *); по 2-й теореме Вейерштрасса [**85**], такие наибольшие и наименьшие значения существуют. Остановимся для определенности на наибольшем значении.

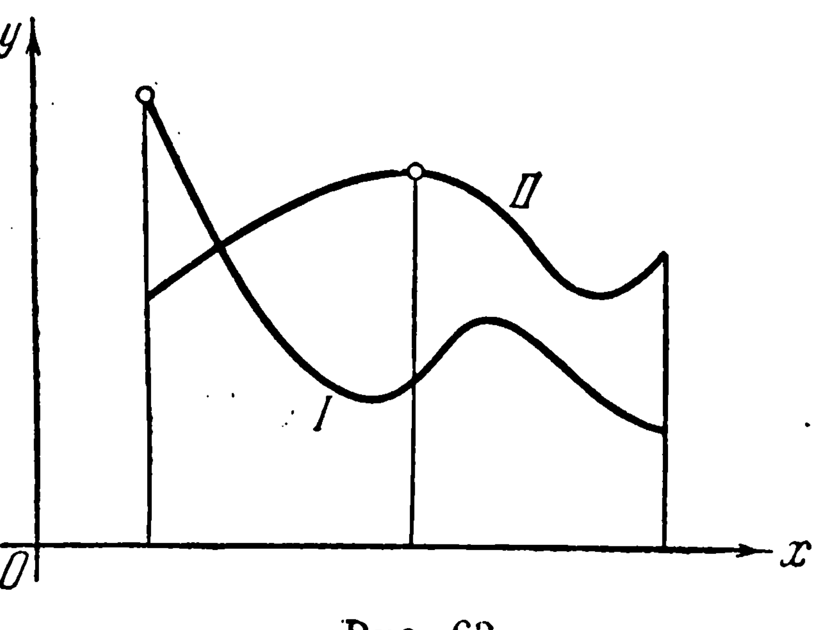


Рис. 63.

Если оно достигается в некоторой точке между a и b, то это одновременно будет одним из максимумов (очевидно, наибольшим); но наибольшее значение может достигаться и на одном из концов промежутка, a или b (рис. 63). Таким образом, нужно сравнить между собой все максимумы функции $f(x)$ и ее граничные значения $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее из этих чисел и будет наибольшим из всех значений функции $f(x)$ в $[a, b]$. Аналогично разыскивается и наименьшее значение функции.

Пусть, например, разыскиваются наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ в промежутке $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$; два максимума, равных 1, больше граничных значений $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$, следовательно, 1 и будет наибольшим значением функции в указанном промежутке. Минимум, равный 0,7 ..., больше граничных значений, так что наименьшим значением будет 0. Для промежутка $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ в качестве наибольшего значения пришлось бы взять больший из двух максимумов 1 и $-0,7$ ..., достигаемых при $x = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{4}$, ибо на концах принимаются значения $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,7$ ... и $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, меньшие, чем 1. Наименьшее значение достигается на правом конце, в то же время, при $x = \pi$, совпадая с минимумом.

Если желают избежать исследования на максимум или минимум, то можно поступить иначе. Нужно лишь вычислить значения функции во всех «подозрительных» по экстремуму точках и сравнить их с граничными значениями $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее и наименьшее из этих чисел, очевидно, и будут наибольшим и наименьшим из всех значений функции.

Например, для промежутка $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ сравниваем значения $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,7$ ..., $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ с граничными $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$, а для про-

---

*) Таким образом, мы сохраняем за термином максимум его «локальный» смысл (наибольшее значение в непосредственной окрестности соответствующей точки) и отличаем его от наибольшего значения функции во всем рассматриваемом промежутке.

То же относится к минимуму и наименьшему значению функции.

межутка $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ сравниваем числа $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f(\pi)=-1, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-0{,}7\ldots$ с граничными значениями $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0{,}7\ldots$ и $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Замечание. В прикладных задачах чаще всего встречается простой случай, когда между a и b оказывается лишь одна «подозрительная» точка x_0. Если в этой точке функция имеет максимум (минимум), то без сравнения с граничными значениями ясно, что это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции в промежутке (см. рис. 64). Часто в подобных случаях оказывается более простым произвести исследование на максимум и минимум, чем вычислять и сравнивать частные значения функции (особенно, если в состав ее выражения входят буквенные постоянные).

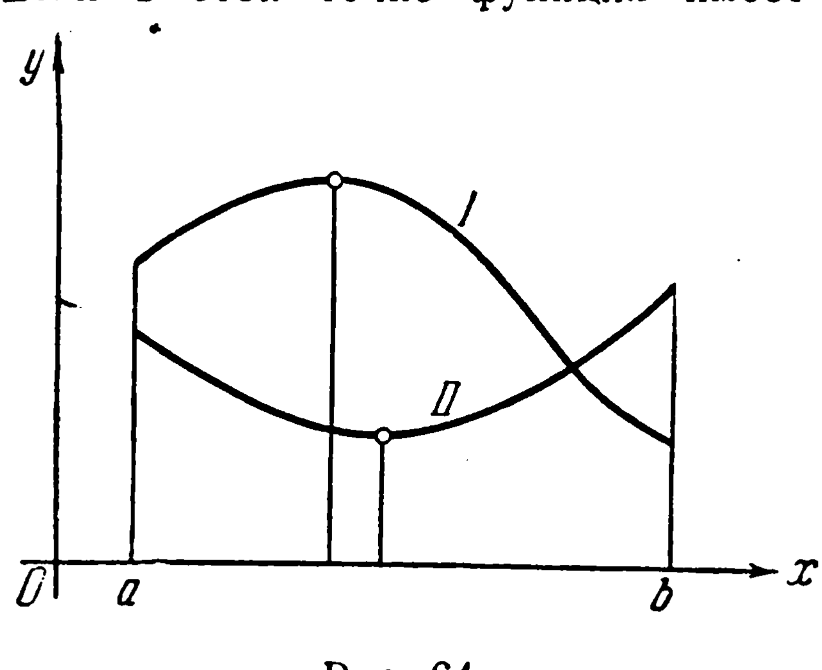


Рис. 64.

Важно подчеркнуть, что сказанное приложимо в полной мере и к открытому промежутку (a, b), а также к бесконечному промежутку.

140. Задачи. Изложим теперь, в виде примеров, ряд задач из разных областей, решение которых приводится именно к разысканию наибольшего или наименьшего значения функции. Впрочем, чаще всего интерес представляют не столько сами эти значения, сколько те точки (те значения аргумента), которые доставляют их функции.

1) Из квадратного листа жести со стороною a, вырезая по углам равные квадраты и сгибая края (рис. 65), составляют прямоугольную открытую коробку. Как получить коробку наибольшей вместимости?

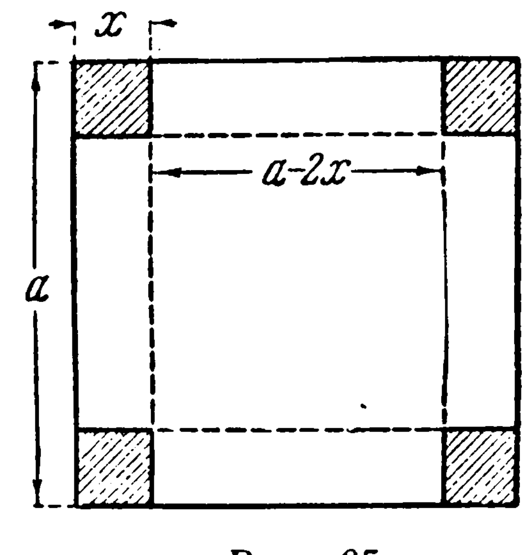


Рис. 65.

Если сторону вырезаемого квадрата обозначить через x, то объем y коробки выразится так: $y=x(a-2x)^2$, причем x изменяется в промежутке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Вопрос привелся к нахождению наибольшего значения функции y в этом промежутке.

Так как производная $y'=(a-2x)(a-6x)$ между 0 и $\frac{a}{2}$ имеет единственный корень $x=\frac{a}{6}$, то убедившись в том, что это значение доставляет функции максимум, одновременно получаем и искомое наибольшее значение. Или иначе: при $x=\frac{a}{6}$ имеем $y=\frac{2a^3}{27}$, в то время как граничные значения y равны 0; следовательно, при $x=\frac{a}{6}$, действительно, получается наибольшее значение для y.

2) Дано бревно с круглым сечением диаметра d. Требуется обтесать его так, чтобы получилась балка с прямоугольным сечением наибольшей прочности.

Указание. В сопротивлении материалов устанавливается, что прочность прямоугольной балки пропорциональна произведению bh^2, где b — основание прямоугольника в сечении балки, а h — его высота.

Так как $h^2 = d^2 - b^2$, то речь идет о наибольшем значении для выражения $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$, причем «независимая переменная» b изменяется в промежутке $(0, d)$.

Производная $y' = d^2 - 3b^2$ обращается в нуль лишь однажды внутри этого промежутка, в точке $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Вторая производная $y'' = -6b < 0$, следовательно, в указанной точке достигается максимум, а с ним и наибольшее значение.

При $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ будет $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, так что $d:h:b = \sqrt{3}:\sqrt{2}:1$. Из рис. 66 видно, как построить требуемый прямоугольник (диаметр разделен на три равные части, в точках деления восставлены перпендикуляры). В строительном деле обычно предписывается отношение $h:b = 7:5$; это и есть приближенное значение $\sqrt{2} \doteq 1{,}4\ \ldots$

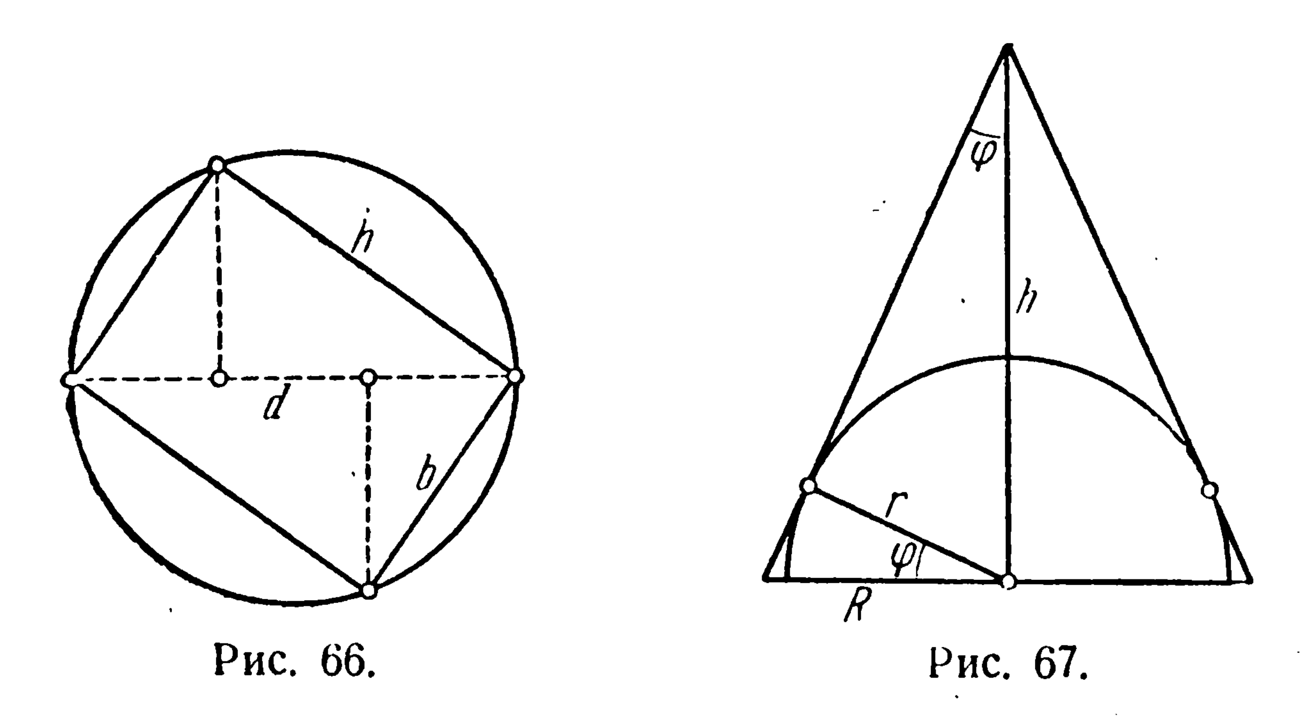


Рис. 66. Рис. 67.

3) Вокруг полушара радиуса r описать прямой круговой конус **наименьшего объема**; при этом предполагается, что основания полушара и конуса лежат в одной плоскости и концентричны (рис. 67).

Здесь нужно еще рационально выбрать независимую переменную; пусть ею будет угол φ при вершине конуса. При обозначениях чертежа будем иметь $R = \frac{r}{\cos\varphi}$, $h = \frac{r}{\sin\varphi}$, так что объем конуса

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\frac{1}{3}\pi r^3}{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}.$$

Для того чтобы объем v имел **наименьшее** значение, очевидно, нужно, чтобы выражение $y = \cos^2\varphi\sin\varphi$, стоящее в знаменателе, получило свое **наибольшее** значение, при изменении φ в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем

$$y'_\varphi = -2\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2\varphi\right);$$

между 0 и $\frac{\pi}{2}$ производная обращается в нуль лишь при $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (что отвечает $35°15'52''$), меняя при этом знак плюс на минус.

Этот угол доставляет выражению y наибольшее значение, а объему v — наименьшее.

4) Груз веса G, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой (рис. 68). Под каким углом к горизонту — при наличии трения — надлежит приложить эту силу, чтобы величина ее F была наименьшей? Коэффициент трения μ дан.

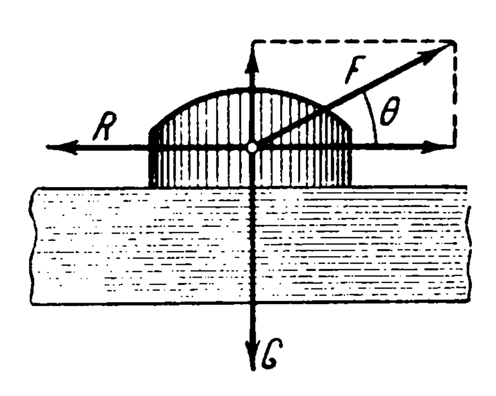


Рис. 68.

Указание. Трение считается пропорциональным силе, прижимающей тело к плоскости (закон Кулона), и направлено против движения. Множитель пропорциональности μ и есть «коэффициент трения».

Определим силу F, которая соответствует данному углу θ. Разлагая ее по горизонтальному и вертикальному направлениям, получим для составляющих величины $F\cdot\cos\theta$ и $F\cdot\sin\theta$. Сила, прижимающая тело к плоскости, будет $G-F\cdot\sin\theta$, так что, по закону Кулона, трение $R=\mu(G-F\cdot\sin\theta)$; горизонтальная составляющая $F\cdot\cos\theta$ тянущей силы F как раз и должна уравновешивать это трение:

$$F\cdot\cos\theta=\mu\cdot(G-F\cdot\sin\theta),$$

откуда

$$F=\frac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta}.$$

Речь идет о разыскании наименьшего значения этой функции — или наибольшего значения функции $y=\cos\theta+\mu\sin\theta$ — при изменении θ в промежутке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Производная $y'_\theta=\mu\cos\theta-\sin\theta$ обращается в нуль, если $\operatorname{tg}\theta=\mu$ или $\theta=\operatorname{arctg}\mu$; этот угол θ называется «углом трения». Так как $y''_{\theta^2}=$ $=-\mu\sin\theta-\cos\theta<0$, то прилагать силу под углом трения оказывается наиболее выгодно. Например, если нужно сдвинуть камень по деревянному настилу, то $\mu=0{,}4$ и $\theta\doteq 22^\circ$.

5) Известно, что стоимость плавания судна в течение часа выражается в рублях эмпирической формулой $a+bv^3$, где a и b — постоянные, которые должны быть установлены отдельно для каждого судна, а v — скорость судна в узлах (узел $=1{,}85$ *км/час*) *). При какой скорости («экономической») судно покроет любое расстояние с наименьшими затратами?

На покрытие 1 *км* потребуется $\frac{1}{1{,}85\,v}$ часа, соответствующие затраты выразятся формулой

$$\frac{1}{1{,}85\,v}(a+bv^3)=\frac{1}{1{,}85}\left(bv^2+\frac{a}{v}\right).$$

Приравнивая нулю производную выражения $y=bv^2+\frac{a}{v}$, получим $y'_v=2bv-$ $-\frac{a}{v^2}=0$, откуда $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$. Так как $y''_{v^2}=2b+\frac{2a}{v^3}>0$, то при найденном значении v затраты действительно достигают наименьшей величины.

Численный пример: $a=40$, $b=0{,}01$, $v=\sqrt[3]{2000}\doteq 12{,}6$ (узлов).

---

*) В этой формуле постоянная часть расхода a относится к амортизации и к содержанию команды, а второй член bv^3 — к стоимости топлива.

6) Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (рис. 69). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости OA ее следует поместить, чтобы в точке A этой плоскости получить наибольшую освещенность?

Указание. Освещенность J пропорциональна $\sin\varphi$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния $r = AB$, т. е.

$$J = c\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где c зависит от силы света лампочки.

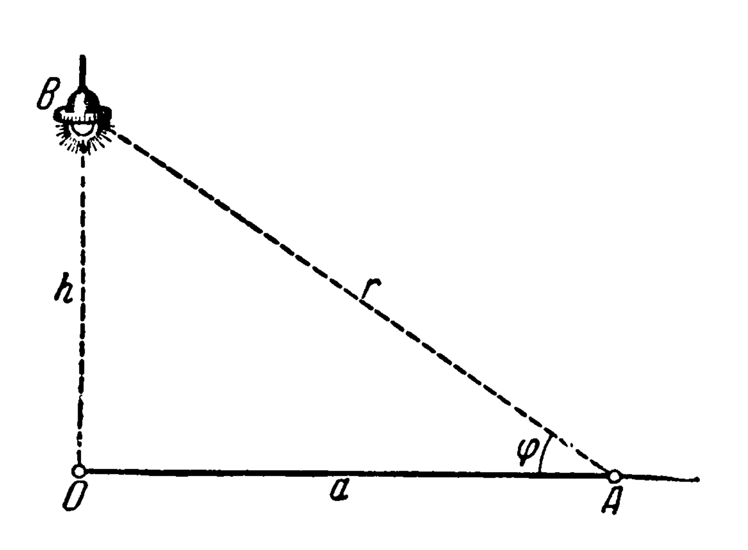


Рис. 69.

Если за независимую переменную выбрать $h = OB$, то

$$\sin\varphi = \frac{h}{r},\quad r = \sqrt{h^2 + a^2}$$

и

$$J = c\cdot\frac{h}{(h^2 + a^3)^{3/2}}\qquad (0 < h < +\infty).$$

Далее, производная

$$J'_h = c\cdot\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{5/2}}$$

обращается в нуль при $h = \frac{a}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}7\,a$, меняя знак при переходе через это значение с плюса на минус. Это и есть наивыгоднейшее расстояние.

Можно выбрать за независимую переменную угол φ; тогда

$$r = \frac{a}{\cos\varphi},\qquad J = \frac{c}{a^2}\cdot\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

и дело сводится к разысканию наибольшего значения для функции $y = \cos^2\varphi\sin\varphi$ в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Но мы уже знаем [см. задачу 3)], что это наибольшее значение достигается при угле φ_0, для которого $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Для расстояния h получаем прежнее значение $a\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

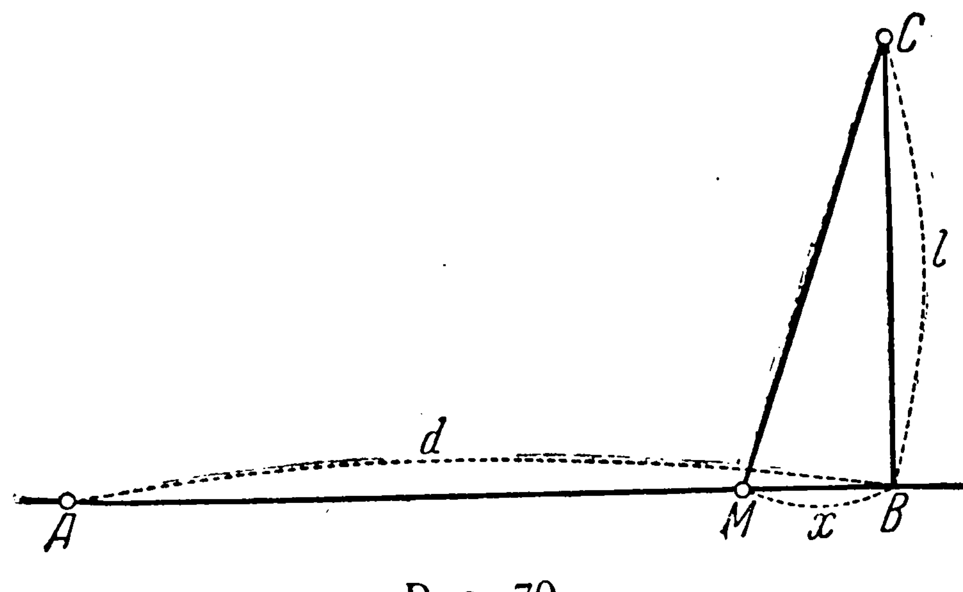


Рис. 70.

7) Из точки A, находящейся на железнодорожной магистрали AB (рис. 70), грузовой поток направляется в точку C, отстоящую на расстояние $CB = l$ от линии железной дороги. Стоимость провоза весовой единицы на единицу расстояния есть α — по железной дороге и β — при гужевой транспортировке. К какой точке M следует провести шоссе MC, чтобы провоз груза из A в C (по линии AMC) был возможно дешевле?

При обозначениях чертежа стоимость провоза весовой единицы груза — при произвольном положении точки M — оказывается равной

$$y = \alpha(d - x) + \beta\sqrt{x^2 + l^2}\qquad (0 \leqslant x \leqslant d).$$

Имеем

$$y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2+l^2}} - \alpha = \beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}} - k\right) \qquad \left(k = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Если $k \geqslant 1$ $(\alpha \geqslant \beta)$, то это выражение сохраняет знак минус, не обращаясь вовсе в нуль. Функция y убывает с возрастанием x от 0 до d и, очевидно, достигает своего наименьшего значения при $x = d$. В этом случае всего выгоднее начинать шоссе непосредственно у точки A.

То же справедливо и при $k < 1$, если только одновременно

$$\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}} \geqslant d.$$

Действительно, при $k < 1$ выражение

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}} - k$$

имеет единственный корень

$$\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Но при сделанном предположении этот корень оказывается лежащим вне допустимого для x промежутка изменения (или на конце его), так что внутри промежутка производная y'_x оказывается отрицательной.

Лишь в том случае, если упомянутый корень будет $< d$, это значение x определяет положение точки M между A и B, при котором расходы по перевозке будут наименьшими.

Замечание. Пользуемся случаем обратить внимание читателя на следующее обстоятельство. При разыскании наибольшего или наименьшего значения функции для определенного промежутка изменения аргумента легко может оказаться, что внутри этого промежутка вовсе нет корней производной (или других «подозрительных» значений). Это свидетельствует о том, что в рассматриваемом промежутке функция оказывается монотонно возрастающей или убывающей и, следовательно, достигает как наибольшего, так и наименьшего своего значения на концах промежутка.

В последней задаче при определенных соотношениях между входящими в нее величинами как раз и осуществляется подобное положение.

§ 2. Выпуклые (и вогнутые) функции

141. Определение выпуклой (вогнутой) функции. После класса монотонных функций, возрастающих или убывающих, выделяется класс так называемых выпуклых или вогнутых функций.

Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $\mathcal{X}$ *), *называется выпуклой (выпуклой вниз), если для любых точек x_1 и x_2 из $\mathcal{X}$ $(x_1 \leqslant x_2)$ выполняется неравенство*

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2), \qquad (1)$$

*) Здесь $\mathcal{X}$ снова может быть замкнутым или нет, конечным или бесконечным.

каковы бы ни были положительные числа q_1 *и* q_2, *в сумме дающие единицу. Функция называется* ***вогнутой*** (*выпуклой* ***вверх***), *если — вместо* (1) — *имеем* *)

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\geqslant q_1\cdot f(x_1)+q_2\cdot f(x_2). \tag{1a}$$

Очевидно, что, если функция $f(x)$ выпукла (вогнута), то функция $-f(x)$ оказывается вогнутой (выпуклой), и наоборот. Это простое замечание позволит нам во многих случаях ограничиваться изучением лишь выпуклых функций.

Приведенное определение выпуклой функции имеет простой геометрический смысл. Прежде всего отметим, что выражение

$$x=q_1x_1+q_2x_2 \qquad (x_1<x_2), \tag{2}$$

при наложенных на q_1 и q_2 условиях, содержится между x_1 и x_2; обратно, каждое число x, которое содержится между x_1 и x_2, может быть единственным образом представлено в указанной форме, с коэффициентами

$$q_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

и (2a)

$$q_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

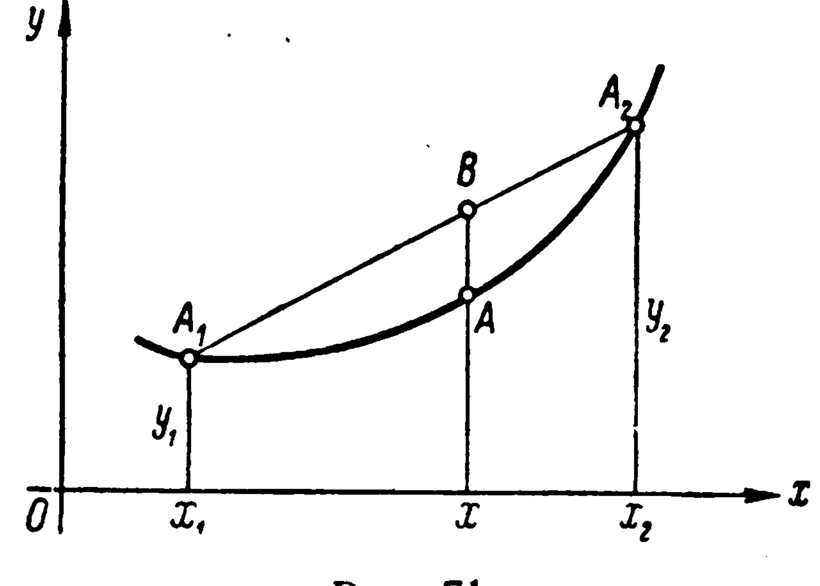


Рис. 71.

Если рассмотреть **график** функции $f(x)$ (рис. 71) и его дугу между точками

$$A_1(x_1, y_1) \quad \text{и} \quad A_2(x_2, y_2),$$

где $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, то в левой части неравенства (1) — при коэффициентах (2a) — мы имеем ординату точки A дуги A_1A_2 с абсциссой x. В правой же части этого неравенства стоит ордината точки B **хорды** A_1A_2

$$y=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2 \tag{3}$$

с той же абсциссой. Таким образом, *выпуклая функция характеризуется тем, что все точки любой дуги ее графика лежат*

---

*) Понятие выпуклой (вогнутой) функции было введено **Иенсеном** (J. L. W. V. Jensen), который исходил, однако, из более **частного** соотношения, чем (1) [или (1a)], именно:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

оно отвечает $q_1=q_2=\frac{1}{2}$. В случае **непрерывных** функций, которыми мы ограничиваемся, его определение равносильно данному в тексте.

под соответствующей хордой или на ней. (В случае вогнутой функции вместо «под» следовало бы сказать «над».) Одновременно с самой функцией $f(x)$ выпуклой (вогнутой) называют и кривую $y=f(x)$.

Тривиальным примером выпуклой (и — одновременно — вогнутой) функции служит линейная функция $f(x)=ax+b$: для нее соотношение (1) выполняется всегда со знаком равенства. Выпуклой функцией будет и функция $f(x)=x^2$, что легко проверить непосредственно по определению:

$$(q_1x_1+q_2x_2)^2=q_1x_1^2+q_2x_2^2-q_1q_2(x_1-x_2)^2<q_1x_1^2+q_2x_2^2,$$

если $q_1, q_2>0$, $q_1+q_2=1$. Другие примеры выпуклых функций читатель найдет ниже.

142. Простейшие предложения о выпуклых функциях. 1°. *Произведение выпуклой функции на положительную постоянную есть выпуклая функция.*

2°. *Сумма двух или нескольких выпуклых функций тоже выпукла.*

В обоих случаях доказательство сразу получается из определения.

Замечание. Произведение двух выпуклых функций может не оказаться выпуклой функцией. Пример тому будет дан ниже (в сноске на стр. 300).

3°. *Если $\varphi(u)$ есть выпуклая и притом возрастающая функция, а $u=f(x)$ также выпукла, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет выпуклой.*

Действительно, ввиду выпуклости f [см. (1)] и возрастания φ имеем

$$\varphi(f(q_1x_1+q_2x_2))\leqslant\varphi(q_1\cdot f(x_1)+q_2\cdot f(x_2)),$$

а в силу выпуклости φ последнее выражение не превосходит $q_1\cdot\varphi(f(x_1))+q_2\cdot\varphi(f(x_2))$, так что окончательно получаем неравенство

$$\varphi(f(q_1x_1+q_2x_2))\leqslant q_1\cdot\varphi(f(x_1))+q_2\cdot\varphi(f(x_2)),$$

которое и представляет собой соотношение типа (1) для функции $\varphi(f(x))$.

Предлагаем читателю доказать аналогичные утверждения, содержащиеся в таблице:

$\varphi(u)$	$u=f(x)$	$\varphi(f(x))$
выпукла, убывает	*вогнута*	*выпукла*
вогнута, возрастает	*вогнута*	*вогнута*
вогнута, убывает	*выпукла*	*вогнута*

4°. *Если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ суть однозначные взаимно обратные функции (в соответствующих промежутках), то одновременно*

$f(x)$	$g(y)$
выпукла, возрастает	*вогнута, возрастает*
выпукла, убывает	*выпукла, убывает*
вогнута, убывает	*вогнута, убывает*

Пусть, например, в первой строке из предположения относительно f мы хотим вывести заключение относительно g. Положим

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \text{ так что } x_1 = g(y_1), \ x_2 = g(y_2).$$

Имеем, по основному неравенству (1)

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) = q_1 y_1 + q_2 y_2.$$

Так как, по теореме об обратной функции [83], функция $g(y)$ также будет возрастающей, то

$$g(q_1 y_1 + q_2 y_2) \geqslant g(f(q_1 x_1 + q_2 x_2)) = q_1 \cdot g(y_1) + q_2 \cdot g(y_2),$$

что и доказывает вогнутость функции g [см. (1а)] *).

5°. *Выпуклая в промежутке $\mathscr{X}$ функция $f(x)$, отличная от постоянной, не может достигать наибольшего значения внутри этого промежутка.*

Допустим противное: пусть функция достигает наибольшего значения во внутренней точке x_0 промежутка. Так как функция отлична от постоянной, то эту точку можно заключить в такой промежуток (x_1, x_2):

$$x_1 < x_0 < x_2,$$

чтобы хоть на одном из концов значение функции было строго меньше, чем в точке x_0. Пусть, скажем,

$$f(x_1) < f(x_0), \quad f(x_2) \leqslant f(x_0).$$

Полагая $x_0 = q_1 x_1 + q_2 x_2$, умножим обе части первого неравенства на q_1, а второго на q_2 и сложим. Мы получим

$$q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) < f(x_0) = f(q_1 x_1 + q_2 x_2),$$

что противоречит выпуклости функции f. Этим наше утверждение доказано.

6°. *Если промежуток $[x_1, x_2]$, где $x_1 < x_2$, содержится в промежутке $\mathscr{X}$, в котором функция $f(x)$ выпукла, то соотношение* (1) *выполняется либо всегда со знаком равенства, либо всегда со знаком неравенства.*

Возвращаясь к обозначениям рис. 71, геометрически это можно выразить так: *дуга A_1A_2 либо сливается с хордой A_1A_2, либо же (за исключением концов) вся лежит под хордой.*

*) Все сформулированные в таблице утверждения очевидны из чертежа.

Для доказательства рассмотрим линейную функцию (3), которая в точках x_1 и x_2 принимает те же значения, что и функция $f(x)$; для краткости обозначим эту функцию через $l(x)$. Разность

$$\varphi(x) = f(x) - l(x) = f(x) + [-l(x)],$$

ввиду выпуклости функций f и $-l$, тоже будет выпуклой [2°]. Тогда либо $\varphi(x) \equiv 0$ в промежутке $[x_1, x_2]$, либо этого нет. В первом случае $f(x) \equiv l(x)$ в этом промежутке, т. е. дуга сливается с хордой, и соотношение (1) выполняется всегда со знаком равенства. Во втором случае во всем промежутке (x_1, x_2) должно быть $\varphi(x) < 0$, ибо, если бы функция φ принимала в этом промежутке и неотрицательные значения, то она достигала бы своего наибольшего в промежутке $[x_1, x_2]$ значения внутри этого промежутка, что для отличной от постоянной выпуклой функции невозможно [5°]. Итак, внутри промежутка $f(x) < l(x)$, кривая лежит под хордой, и соотношение (1) выполняется всегда со знаком неравенства.

Если для любого промежутка $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, *содержащегося в* $\mathcal{X}$, *соотношение* (1) *выполняется со знаком неравенства, мы будем функцию* $f(x)$ *называть строго выпуклой.* Аналогично устанавливается понятие строго вогнутой функции. Эта терминология применяется одновременно и к кривой $y = f(x)$.

143. Условия выпуклости функции. Учитывая (2) и (2а), можно основное неравенство (1) переписать так:

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

или — более симметрично —

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geqslant 0. \qquad (4)$$

Наконец, это условие может быть записано и с помощью определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0. \qquad (5)$$

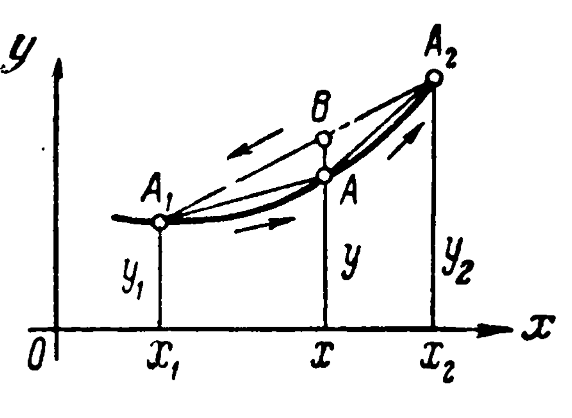


Рис. 72.

Во всех случаях предполагается, что x содержится между x_1 и x_2; для определенности будем впредь считать $x_1 < x_2$. Заметим, попутно, что условие выпуклости функции в форме (5) получает непосредственное геометрическое истолкование, если вспомнить, что написанный определитель выражает удвоенную площадь ΔA_1AA_2 (рис. 72) с плюсом именно тогда, когда треугольник положи-

тельно ориентирован, т. е. периметр его $A_1 - A - A_2$ описывается против часовой стрелки.

Отметим особо, что, *если речь идет о строгой выпуклости, то во всех этих условиях знак равенства должен быть исключен.*

Удобные для проверки условия выпуклости функции $f(x)$ получаются, если привлечь ее производные.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $\mathcal{X}$ и имеет в нем конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ была выпуклой в $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ возрастала (в широком смысле).*

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ выпукла. Предполагая $x_1 < x < x_2$, перепишем условие (4) в виде:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{6}$$

Если теперь устремить здесь x к x_1 или к x_2, то в пределе, соответственно, получим

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{7а}$$

и

$$f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,^{*)}, \tag{7б}$$

откуда $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, так что функция $f'(x)$ действительно оказывается возрастающей (в широком смысле).

Достаточность. Предположим теперь выполнение этого последнего условия. Для доказательства неравенства (6) применим к каждой из его частей формулу конечных приращений [**112**]

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2),$$

причем $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Так как, по предположению, $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, то соотношение (6), действительно, имеет место, а из него можно восстановить соотношение (4), обусловливающее выпуклость функции $f(x)$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ в промежутке $\mathcal{X}$ и имеет внутри него конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости функции $f(x)$ в $\mathcal{X}$ необходимо и достаточно, чтобы внутри $\mathcal{X}$ было*

$$f''(x) \geqslant 0. \tag{8}$$

В связи с предыдущей теоремой, достаточно применить к функции $f'(x)$ теорему 2 n° **132**.

---

*) В интересах последующего подчеркнем, что при выводе неравенств (7а) и (7б) использовано было только существование производной, соответственно, в точке x_1 или x_2.

Для вогнутости функции аналогично получается условие

$$f''(x) \leqslant 0 \tag{8*}$$

Таким образом, требование

$$f''(x) > 0 \quad (< 0) \tag{9}$$

заведомо обеспечивает строгую выпуклость (вогнутость), ибо исключает возможность для функции $f(x)$ быть линейной в каком бы то ни было промежутке [**142**, 6°].

Теперь сразу облегчается построение любого числа примеров как выпуклых, так и вогнутых функций:

1) Функция a^x ($a > 0$, $a \neq 1$) является выпуклой в промежутке $(-\infty, +\infty)$, так как $(a^x)'' = a^x \cdot (\ln a)^2 > 0$;

2) функция $\ln x$ вогнута в промежутке $(0, +\infty)$, ибо $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ [ср. **142**, 4°];

3) для функции $x \cdot \ln x$ (в том же промежутке) вторая производная $\frac{1}{x} > 0$, и функция выпукла;

4) для функции x^r (в том же промежутке) вторая производная равна $r(r-1)x^{r-2}$: отсюда видно, что при $r > 1$ и $r < 0$ функция выпукла, а при $0 < r < 1$ вогнута*), и т. д.

Во всех этих примерах фактически имела место строгая выпуклость или вогнутость.

В заключение, мы укажем еще одну важную геометрическую характеристику выпуклой функции $f(x)$. При этом, вместо хорды графика функции $y = f(x)$, которую мы рассматривали в n° **141**, здесь мы привлечем к рассмотрению касательную в любой точке графика (рис. 73).

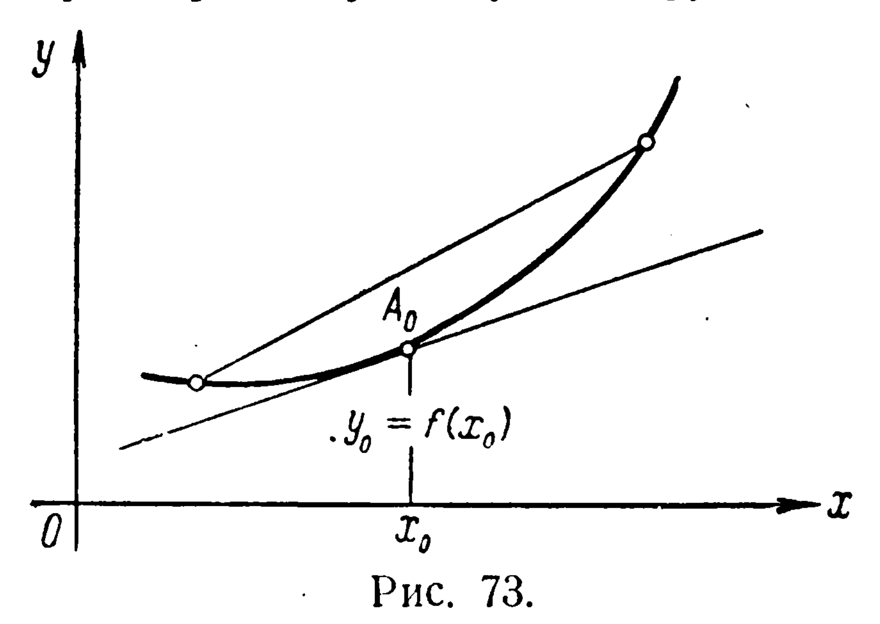


Рис. 73.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $\mathcal{X}$ и имеет в нем конечную производную $f'(x)$. Для выпуклости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы ее график всеми точками лежал над любой своей касательной (или на ней).*

Необходимость. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $A_0(x_0, f(x_0))$ имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$. Уравнение касательной напишется так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

---

*) Этот пример дает возможность — попутно — показать, что произведение двух выпуклых функций может не быть выпуклой функцией; так, функция $-x^{1/3}$ выпукла, в то время как ее квадрат, т. е. функция $x^{2/3}$ оказывается вогнутой.

Надлежит показать, что выпуклость функции $f(x)$ влечет, для любых точек x_0 и x из $\mathscr{X}$, неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{10}$$

Оно равносильно двум таким

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{для } x > x_0 \tag{11а}$$

и

$$f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{для } x < x_0, \tag{11б}$$

а эти неравенства совпадают, соответственно, с неравенствами (7а) и (7б), полученными при доказательстве теоремы 1 (именно в предположении выпуклости функции), если в первом из них положить $x_2 = x$, $x_1 = x_0$, а во втором $x_2 = x_0$, $x_1 = x$.

Достаточность. Предположим, наоборот, что выполняется неравенство (10) или — что то же — неравенства (11а) и (11б). Тогда по ним можно восстановить неравенства (7а) и (7б), откуда следует, что $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, так что производная $f'(x)$ будет возрастающей функцией. Это же, в свою очередь, как мы знаем (теорема 1) влечет за собой выпуклость функции $f(x)$.

Замечание. Обращаем внимание читателя на то, что фактически (см. сноску на стр. 299) необходимость неравенства (10) — для данного x_0 и произвольного $x \neq x_0$ — доказана в предположении лишь существования производной $f'(x_0)$ в самой точке x_0.

144. Неравенство Иенсена и его приложения. Согласно определению выпуклой функции [см. (1)], имеем

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2).$$
$$(q_1,\ q_2 > 0;\ q_1 + q_2 = 1)$$

Можно доказать, что для выпуклой функции имеет место более общее неравенство (которое связывают с именем Иенсена):

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) + \ldots + q_n \cdot f(x_n) \tag{12}$$
$$(q_1, \ldots, q_n > 0;\quad q_1 + \ldots + q_n = 1)$$

каковы бы ни были значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из основного промежутка $\mathscr{X}$. Для $n = 2$ оно, как мы знаем, верно; допустив теперь, что оно верно для какого-либо натурального числа $n \geqslant 2$, докажем, что оно верно и для $n + 1$, т. е. что, взяв $n + 1$ значений $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ из $\mathscr{X}$ и $n + 1$ положительных чисел $q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}$, сумма которых равна единице, будем иметь

$$f(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}) \leqslant$$
$$\leqslant q_1 \cdot f(x_1) + \ldots + q_n \cdot f(x_n) + q_{n+1} \cdot f(x_{n+1}). \tag{13}$$

С этой целью, заменим слева сумму двух последних слагаемых $q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}$ одним слагаемым

$$(q_n + q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right);$$

это даст возможность воспользоваться неравенством (12) и установить, что выражение в (13) слева не превосходит суммы

$$q_1 \cdot f(x_1) + \ldots + (q_n + q_{n+1}) \cdot f\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}} x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} x_{n+1}\right).$$

Остается лишь применить к значению функции в последнем слагаемом основное неравенство (1), чтобы придти к (13). Таким образом — по методу математической индукции — неравенство (12) полностью оправдано.

Обычно, вместо множителей q_i, сумма которых равна единице, вводят произвольные положительные числа p_i. Полагая в неравенстве (12)

$$q_i = \frac{p_i}{p_1 + \ldots + p_n},$$

приведем его к виду

$$f\left(\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}\right) \leqslant \frac{\Sigma p_i \cdot f(x_i)}{\Sigma p_i}. \qquad (12^*)$$

В случае в о г н у т о й функции f, очевидно, знак неравенства нужно изменить на обратный.

Выбирая различными способами функцию f, можно получать важные конкретные неравенства — и притом все из одного источника! Приведем п р и м е р ы.

1) Пусть $f(x) = x^k$, где $x > 0$, $k > 1$ (в ы п у к л а я функция). Имеем

$$\left(\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}\right)^k \leqslant \frac{\Sigma p_i x_i^k}{\Sigma p_i}$$

или

$$(\Sigma p_i x_i)^k \leqslant (\Sigma p_i)^{k-1} \cdot \Sigma p_i x_i^k.$$

Заменяя здесь p_i на $b_i^{\frac{k}{k-1}}$, а x_i на $\frac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$, придем к уже известному нам неравенству К о ш и — Г е л ь д е р а

$$\Sigma a_i b_i \leqslant \{\Sigma a_i^k\}^{\frac{1}{k}} \cdot \{\Sigma b_i^{\frac{k}{k-1}}\}^{\frac{k-1}{k}}$$

[ср. 133 (5)].

2) Полагая $f(x) = \ln x$, где $x > 0$ (в о г н у т а я функция), получим

$$\frac{\Sigma p_i \cdot \ln x_i}{\Sigma p_i} \leqslant \ln \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}.$$

Отсюда, потенцируя, придем тоже к уже встречавшемуся неравенству

$$\left\{\prod x_i^{p_i}\right\}^{\frac{1}{\Sigma p_i}} \leqslant \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}$$ *)

[ср. 133 (4)].

3) Наконец, возьмем $f(x) = x \cdot \ln x$, где $x > 0$ (в ы п у к л а я функция). Тогда окажется, что

$$\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \ln \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \leqslant \frac{\Sigma p_i x_i \ln x_i}{\Sigma p_i}.$$

---

*) Наподобие того, как Σ означает с у м м у, знак $\prod$ означает п р о и з в е д е н и е.

Умножая на $\sum p_i$ и потенцируя, получим неравенство

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leqslant \left\{\prod x_i^{p_i x_i}\right\}^{\frac{1}{\sum p_i x_i}}.$$

В частности, положив здесь $p_i = \frac{1}{x_i}$, будем иметь

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod x_i}.$$

Если распространить понятие **среднего гармонического***) на случай нескольких чисел, то неравенство это можно сформулировать так: *среднее гармоническое ряда положительных чисел не превосходит их среднего геометрического.*

145. Точки перегиба. При построении графиков функций (чему будет посвящен следующий параграф), представляют интерес, так называемые, точки перегиба кривой $y = f(x)$.

Точку $M(x_0, f(x_0))$ кривой называют ее точкой перегиба, если она отделяет участок кривой, где функция $f(x)$ выпукла (выпукла вниз), от участка, где эта функция вогнута (выпукла вверх) (рис. 74).

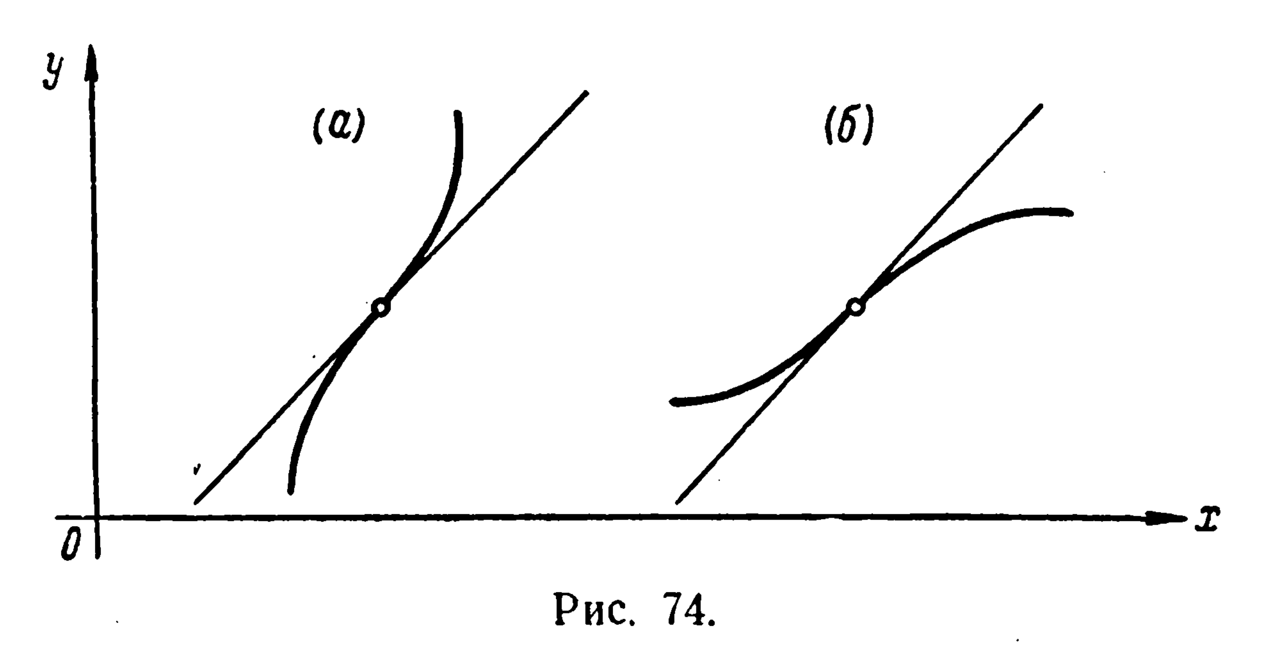


Рис. 74.

Если предположить, что в рассматриваемом промежутке функция $f(x)$ имеет конечную производную, то эта производная, по теореме 2, возрастает в некоторой окрестности $[x_0 - \delta, x_0]$ слева от x_0 и убывает в окрестности $[x_0, x_0 + \delta]$ справа, или наоборот — убывает слева и возрастает справа. В первом случае $f'(x)$ имеет при $x = x_0$ максимум, а во втором — минимум. Если допустить еще существование конечной второй производной $f''(x)$ хотя бы только при $x = x_0$, то необходимо $f''(x_0) = 0$ (ср. **134**).

Это условие $f''(x_0) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x_0) = 0$ при разыскании

*) См. сноску на стр. 74.

экстремумов функции $f(x)$: оно необходимо, но не достаточно. В последнем легко убедиться на примере — пусть $f(x)=x^4$, тогда $f''(x)=12x^2 \geqslant 0$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$, так что, по теореме 2, функция $f(x)$ выпукла во всем этом промежутке, хотя $f''(x)$ обращается в нуль в точке $x=0$.

Если вторая производная $f''(x)$ существует везде внутри рассматриваемого промежутка, то абсциссы точек перегиба следует искать среди корней этой производной. Но каждый корень x_0 подлежит испытанию. Пусть в некоторых окрестностях $[x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta]$ слева и справа от x_0 производная $f''(x)$ сохраняет определенный знак. Тогда для распознавания точки перегиба можно дать такое правило: *если при переходе через значение $x=x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то налицо перегиб, если же знака не меняет, то перегиба нет* [ср. **135**].

Отметим, что при этом на участках кривой, отделенных точкой $(x_0, f(x_0))$, кривая оказывается строго выпуклой на одном и строго вогнутой на другом.

Рассмотрим, для примера, функцию $f(x)=\sin x$; для нее $f''(x)=-\sin x$ обращается в нуль в точках $x=k\pi$ (k — целое), меняя при этом знак. Следовательно, все точки синусоиды, лежащие на оси x, являются точками перегиба; легко видеть, что в промежутках $(\overline{2m-1}\,\pi, 2m\pi)$ синусоида выпукла (выпукла вниз), а в промежутках $(2m\pi, \overline{2m+1}\pi)$ она вогнута (выпукла вверх).

Можно было бы, как мы это сделали в n° **138** при разыскании экстремумов функции, привлечь и высшие производные в испытуемой точке x_0, для которой $f''(x_0)=0$. Таким путем получается правило: *если первая из производных (выше второго порядка), не обращающихся в точке x_0 в нуль, есть производная нечетного порядка, то налицо перегиб; если же такой производной является производная четного порядка, то перегиба нет.*

В заключение, укажем замечательное свойство кривой $y=f(x)$ относительно касательной к ней в точке перегиба (если такая касательная существует): *кривая переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую, т. е. кривая и касательная взаимно пересекаются* (см. рис. 74).

Это обстоятельство очевидно, если касательная вертикальна (ср. рис. 43, а и б). Обратимся к случаю наклонной или горизонтальной касательной, предполагая существование конечной производной $f'(x_0)$. Допустим для определенности, что левее точки перегиба, для $x_0-\delta \leqslant x < x_0$, кривая выпукла, а правее, для $x_0 < x \leqslant x_0+\delta$, кривая вогнута (это отвечает рис. 74, *б*). В этом случае установим, что для $x<x_0$ кривая лежит над касательной (или на ней), а для $x>x_0$ — под касательной (или на ней), т. е. что

$$f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{если } x<x_0$$

и

$$f(x) \leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \text{если } x>x_0.$$

Но первое из этих неравенств совпадает с неравенством (10) [**143**] (следует иметь в виду замечание, там же). Второе есть аналог неравенства (10) для вогнутой функции.

Замечание. Часто именно это свойство кривой принимают просто за определение точки перегиба. Такое определение вовсе не равносильно данному выше. Кривая прежде всего может не иметь касательной в точке перегиба, так что второе определение окажется неприложимым. Может случиться обратное: кривая пересекает касательную в точке, которая не отделяет выпуклого участка кривой от вогнутого, и первое определение неприложимо. Таковы кривые на рис. 43, *в* и *г*; но интереснее кривая $y=x^5\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$, $y=0$ при $x=0$, которая в начале координат касается оси x и пересекает ее; здесь существует даже непрерывная вторая производная, но она бесчисленное множество раз меняет знак вблизи точки $x=0$ как слева, так и справа от нее.

§ 3. Построение графиков функций

146. Постановка задачи. Во всеоружии методов дифференциального исчисления вернемся к вопросу о построении графиков функций [ср. **47**]. Пусть сначала требуется построить график непрерывной в конечном промежутке $[a, b]$ функции $y=f(x)$. При этом сейчас основной целью для нас является *возможно точная характеристика самого хода изменения функции;* точность отдельных ординат интересует нас в меньшей степени.

Обычно применяемый прием построения «по точкам» [**47**], взятым более или менее густо, но случайно и без отношения к (неизвестным наперед) особенностям графика, непригоден. Он прежде всего требует вычисления большого числа координат, что практически неудобно. Но главное в другом: он непригоден принципиально, потому что именно ввиду случайности вычисляемых ординат он все же не обеспечивает достижения поставленной цели.

Предположим теперь, что функция $y=f(x)$ вообще имеет конечную производную $y'=f'(x)$; исключение может представиться лишь в конечном числе отдельных точек, где производная оказывается бесконечной — определенного знака или разных знаков справа и слева. Тогда методы дифференциального исчисления дают возможность установить некоторое число «опорных» точек, характерных именно для данного графика, по которым график строится уже с достаточной точностью.

Прежде всего, мы имеем здесь в виду поворотные точки графика, т. е. вершины его горбов и впадин, отвечающие экстремальным значениям функции [**134—138**]. Впрочем, к ним следует

присоединить все вообще точки, где касательная горизонтальна или вертикальна, даже если они не отвечают экстремумам функции. Разумеется, должны быть отмечены и концы графика.

Когда упомянутые только что точки нанесены на чертеж (а число их обычно невелико), этого, собственно, уже достаточно для построения графика.

Построенный подобным образом график уже довольно полно отображает ход изменения функции, точно отмечая промежутки ее возрастания и убывания, а также точки, где скорость изменения функции падает до нуля ($y'=0$) или возрастает до бесконечности ($y'=\pm\infty$).

Можно достигнуть дальнейшего уточнения графика, если учесть его выпуклость (выпуклость вниз) или вогнутость (выпуклость вверх) на отдельных участках и положение отделяющих их точек перегиба [**143, 145**].

147. Схема построения графика. Примеры. Итак, пусть функция $y=f(x)$ в рассматриваемом промежутке $[a, b]$ дважды дифференцируема, исключая отдельные точки, в которых производная $y'=f'(x)$ имеет бесконечное значение, определенного знака с обеих сторон или разных знаков справа и слева.

Тогда для построения графика функции $y=f(x)$ надлежит выполнить следующее:

1) определить значения x, для которых производная $y'=f'(x)$ равна нулю или бесконечности, и подвергнуть их исследованию на экстремум;

2) определить значения x, для которых вторая производная $y''=f''(x)$ равна нулю, и подвергнуть их исследованию на перегиб;

3) вычислить значения самой функции $y=f(x)$, отвечающие всем этим значениям x, а также концам a и b рассматриваемого промежутка.

Результаты удобно расположить в виде таблицы [см. ниже примеры], с непременным указанием особенности вычисленной точки графика: *максимум, минимум,* $y'=0$, $y'=+\infty$ или $-\infty$, $y'=\mp\infty$ или $\mp\infty$ *), *перегиб.*

Иногда к названным точкам графика при желании присоединяют еще и некоторые другие, например, точки пересечения графика с осями.

После нанесения на чертеж всех вычисленных точек через них проводят самый график, учитывая при этом все упомянутые их особенности.

Мы имеем в виду, конечно, обычный в практике построения графиков случай, когда первая производная обращается в 0 (или в $\pm\infty$) *или вторая производная обращается в* 0 — *лишь в конечном числе точек.* Тогда в промежутках между ними график идет

*) Так мы условно будем отмечать тот факт, что производная слева есть $+\infty$, а справа $-\infty$, или наоборот.

все время вверх или все время вниз, а также оказывается выпуклым, вниз или вверх.

Вычисления и проведение кривой упрощаются, если функция не изменяет своего значения при изменении знака x (четная функция), так что график симметричен относительно вертикальной оси. Аналогичную услугу может оказать и симметрия относительно начала координат, которая аналитически выражается в том, что функция при изменении знака x также лишь меняет знак (нечетная функция).

Примеры. 1) В **136**, 2) мы уже исследовали поведение функции

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x;$$

с помощью ее производной мы установили значения x, доставляющие функции экстремумы, а также вычислили и сами экстремальные значения функции. При этом, ввиду периодичности функции, мы ограничились промежутком $[0, 2\pi]$ изменения x. График функции также достаточно построить для этого промежутка.

Теперь нам нужно найти корни второй производной. Если представить ее в виде

$$y'' = \frac{9}{2}(\sin x + \cos x)\left(\sin 2x - \frac{2}{3}\right),$$

то легко видеть, что первый множитель в скобках обращается в 0 при $x = \frac{3\pi}{4} \doteq 2{,}36$ и $\frac{7\pi}{4} \doteq 5{,}50$, а второй — при $x \doteq 0{,}36$ (21°), 1,21 (69°), 3,51 (201°) и 4,35 (249°); во всех случаях знак y'' меняется, так что налицо перегиб. Составляем таблицу:

$x = 0$	0,36	0,78	1,21	1,57	2,36	3,14	3,51	3,94	4,35
$y = 1$	0,86	0,71	0,86	1	0	-1	$-0{,}86$	$-0{,}71$	$-0{,}86$
$y' = 0$ *макс.*	*перегиб*	$y' = 0$ *мин.*	*перегиб*	$y' = 0$ *макс.*	*перегиб*	$y' = 0$ *мин.*	*перегиб*	$y' = 0$ *макс.*	*перегиб*

$x = 4{,}71$	5,50	6,28
$y = -1$	0	1
$y' = 0$ *мин.*	*перегиб*	$y' = 0$ *макс.*

По этой таблице и построен график, изображенный на рис. 58.

Замечание. Читатель должен иметь в виду, что приводимые в книге чертежи, ввиду малого масштаба, не полностью используют те точные данные, которые получены вычислением. Рекомендуется повторить эти чертежи в большом масштабе.

2) Рассмотрим функцию

$$y = \sin x + \sin 2x.$$

Она не только периодична, но и нечетна. Это позволяет сократить еще промежуток изменения x, сведя его к $[0, \pi]$.

В этом промежутке производная

$$y' = \cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + \cos x - 2$$

обращается в 0, если $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$, т. е. при $x \doteq 0{,}94$ (54°) и 2,57 (147°). Так как вторая производная

$$y'' = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x\,(1 + 8\cos x)$$

при первом из этих значений, очевидно, отрицательна, то она доставляет функции максимум; аналогично, при втором значении имеем минимум.

Сама вторая производная обращается в 0 вместе с $\sin x$ при $x = 0$ или $x = \pi \doteq 3{,}14$, а также вместе с множителем в скобках при $x \doteq 1{,}70$ (97°) — во всех случаях меняя знак (перегиб).

Таблица:

$x = 0$	0,94	1,70	2,09	2,57	3,14
$y = 0$	1,76	0,74	0	$-0{,}37$	0
перегиб	$y' = 0$ *макс.*	*перегиб*		$y' = 0$ *мин.*	*перегиб*

К указанным выше значениям x мы присоединили здесь еще значение $x = \frac{2}{2}\pi \doteq 2{,}09$ (120°), при котором $y = 0$ (график пересекает ось x). График,

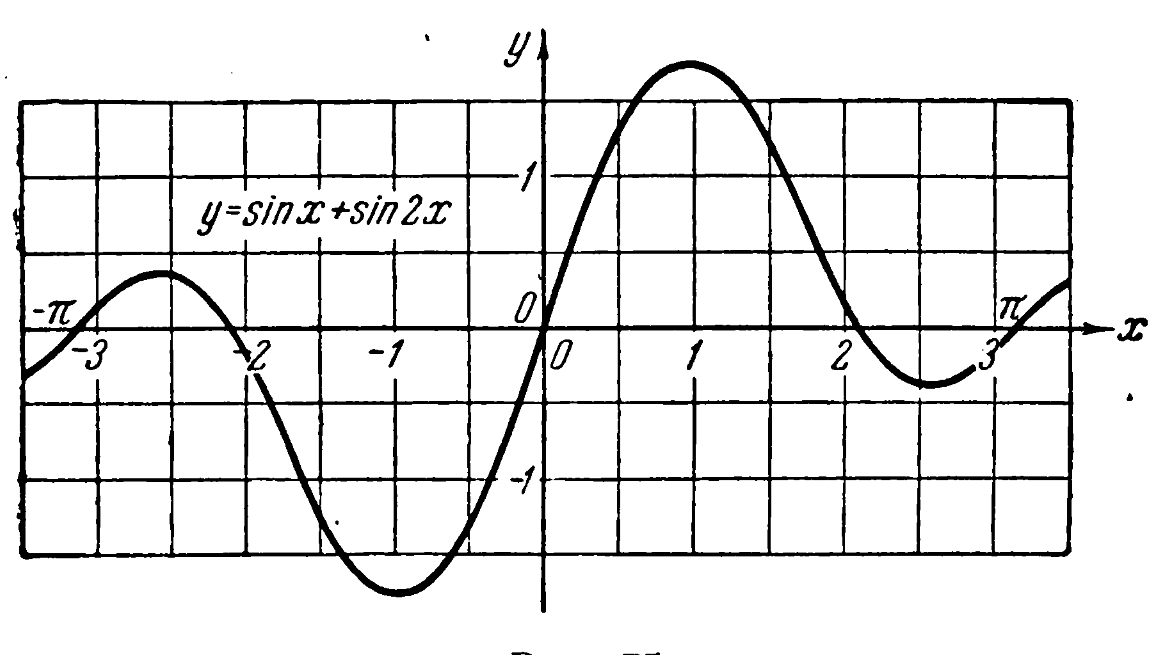


Рис. 75.

построенный по этим точкам, изображен на рис. 75; для промежутка $[-\pi, 0]$ он получается двойным перекладыванием: вокруг оси y, а затем — вокруг оси x.

148. Бесконечные разрывы, бесконечный промежуток. Асимптоты. Полезно расширить класс рассматриваемых функций в двух направлениях. Во-первых, мы допустим теперь для функции $y = f(x)$ возможность обращаться в бесконечность для отдельных значений x. Это значит, — если x_0 есть одно из таких значений, что, при приближении x к x_0 с той или с другой стороны, $f(x)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. Во-вторых, нас может интересовать поведение функции и в бесконечном промежутке.

Так как размеры чертежа, разумеется, конечны, то в обоих этих случаях приходится довольствоваться частью всего графика. За пре-

делами чертежа стараются оставить такие части графика, о виде которых легко наперед составить себе представление, исходя из того, что начерчено.

Остановимся на случае бесконечного разрыва функции, скажем, при $x=x_0$. При приближении x к x_0 с одной стороны функция стремится к бесконечности (того или иного знака) монотонно — если, по крайней мере, в конечной части промежутка — производная $y'=f'(x)$ лишь конечное число раз меняет знак. С разных сторон от x_0 (если x_0 не есть конец промежутка) функция может иметь пределы и разных знаков. Во всяком случае, график будет безгранично приближаться, уходя в бесконечность, к вертикальной прямой $x=x_0$ в верхней или в нижней его части, смотря по знаку бесконечного предела. Эта прямая позволяет отчетливо представить себе вид графика и за пределами чертежа (рис. 76). Примерами могут служить и уже известные нам графики функций $y=\frac{a}{x}$ при $x=0$ (рис. 10), $y=\operatorname{tg} x$ при $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (рис. 16), $y=\log_a x$ при $x=0$ (рис. 14).

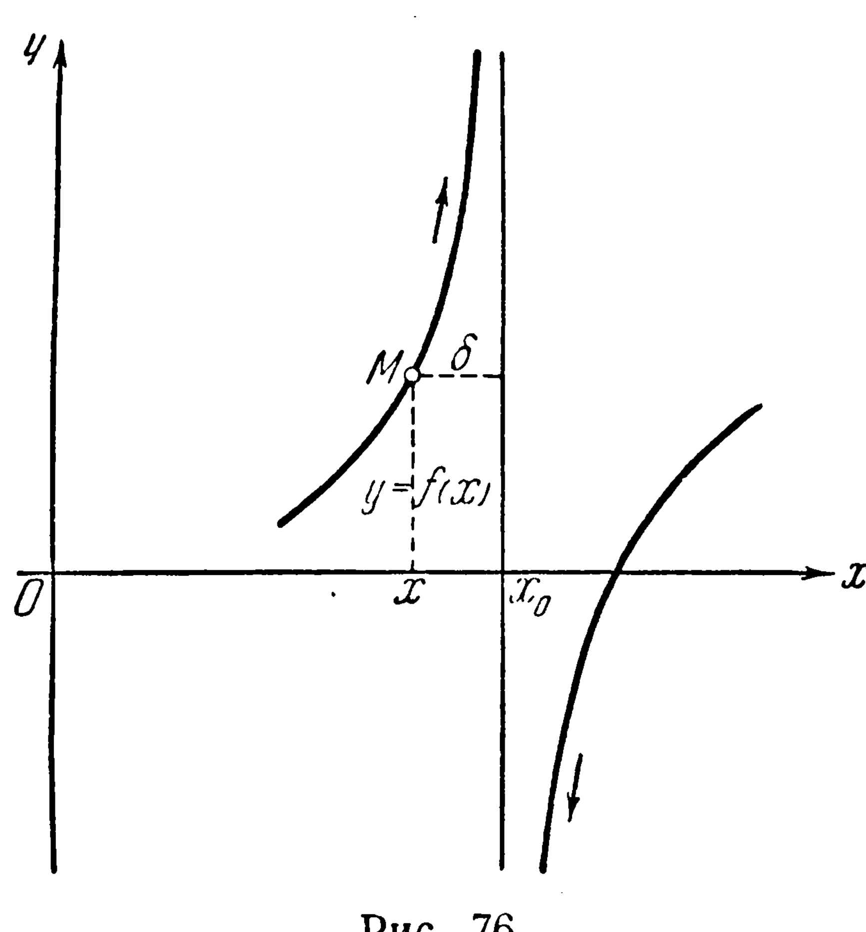


Рис. 76.

В случае бесконечного (в одну сторону или в обе) промежутка, подобную же услугу иногда оказывает горизонтальная или наклонная прямая, к которой график приближается безгранично. В связи с этим, дадим следующее общее определение.

Пусть имеем кривую, ветвь которой в том или ином направлении удаляется в бесконечность. *Если расстояние δ от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется асимптотой кривой.*

Только что мы имели дело с вертикальными асимптотами; теперь займемся асимптотами горизонтальными и наклонными — все время для кривой, заданной уравнением $y=f(x)$.

Примеры горизонтальных асимптот нам уже встречались: для кривой $y=\frac{a}{x}$ — прямая $y=0$ при $x\to\pm\infty$ (рис. 10), для кривой $y=\operatorname{arctg} x$ прямые $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$, соответственно, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ (рис. 21), для кривой $y=a^x$ — прямая $y=0$ при $x\to-\infty$, если $a>1$ и при $x\to+\infty$, если $a<1$ (рис. 13).

Для того чтобы, например, при $x \to +\infty$, прямая $Y = b$ служила асимптотой для кривой $y = f(x)$, очевидно (рис. 77), необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{x \to +\infty} \delta = \lim_{x \to +\infty} |y - b| = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Таким образом, вопрос о горизонтальной асимптоте сводится попросту к вопросу об этом пределе.

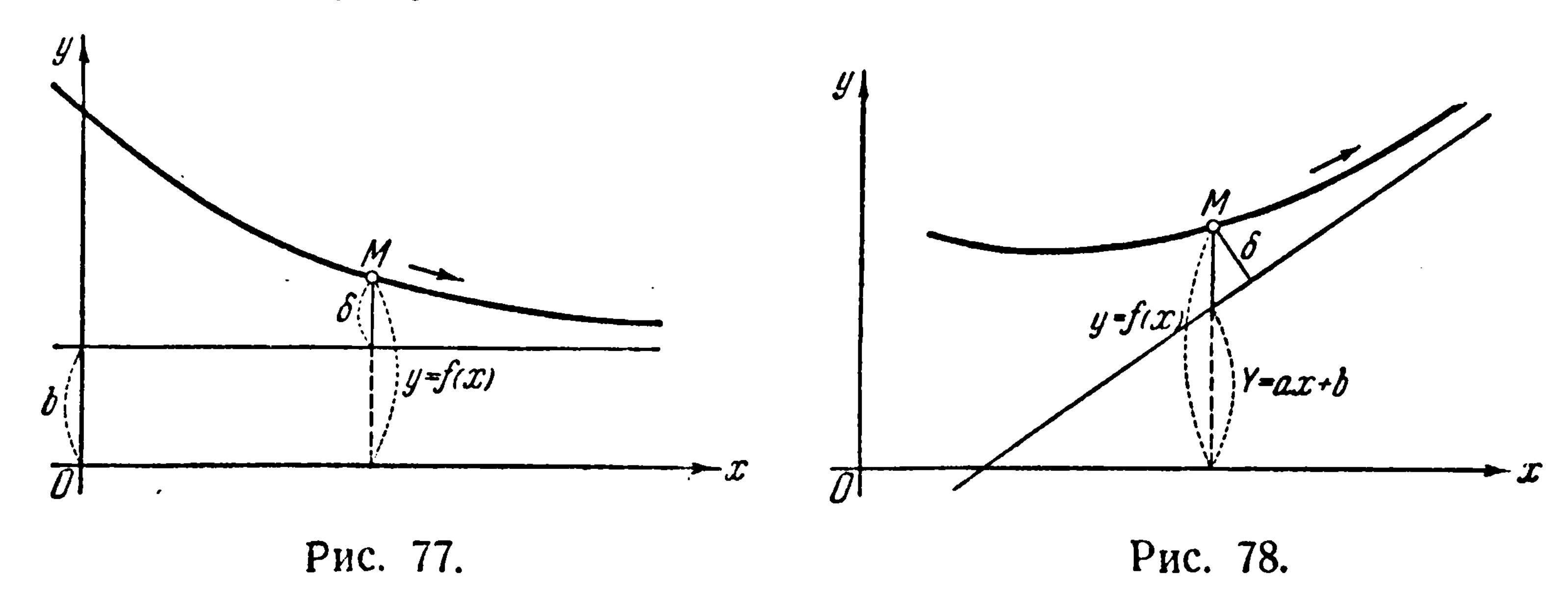


Рис. 77. Рис. 78.

Отдельно нужно искать подобный предел и при $x \to -\infty$; при этом (как, например, в случае кривой $y = \operatorname{arctg} x$) может получиться и другая асимптота.

Переходя к наклонным асимптотам, упомянем, что примерами их могут служить известные читателю из аналитической геометрии асимптоты $y = \pm \frac{b}{a} x$ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{1}$$

(см. также рис. 7).

Предположим теперь, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту

$$Y = ax + b \tag{2}$$

(рис. 78), скажем, со стороны положительной части оси x. Так как разность ординат $|y - Y|$ лишь постоянным множителем (равным косинусу угла между асимптотой и осью x) разнится от расстояния δ, то при $x \to +\infty$ одновременно с δ должна стремиться к нулю и эта разность:

$$\lim_{x \to +\infty} (y - ax - b) = 0. \tag{3}$$

Разделив на x, получим отсюда:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = a; \tag{4}$$

кроме того, равенство (3) непосредственно дает

$$\lim_{x \to +\infty} (y - ax) = b. \tag{5}$$

Итак, для того чтобы прямая (2) была асимптотой для данной кривой, **необходимо** выполнение условий (4) и (5). Обратное рассуждение легко покажет и их **достаточность**. Вопрос здесь свелся к последовательному разысканию пределов (4) и (5), которыми уже и определятся коэффициенты уравнения прямой (2).

Разумеется, для $x \to -\infty$ нужно повторить все исследование. Например, в случае гиперболы (1), считая $x \to +\infty$, имеем

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \pm\frac{b}{b} \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \to \pm\frac{b}{a};$$

затем,

$$y \mp \frac{b}{a}x = \pm\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x) = \mp\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \to 0,$$

и мы приходим к известным уже нам асимптотам:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Возвращаясь к задаче о проведении графика функции, теперь мы добавим к сказанному в предыдущем n° в пунктах 1), 2), 3), что следует еще:

4) определить значения x, обращающие функцию $y=f(x)$ в бесконечность, с учетом знака, и построить соответствующие вертикальные асимптоты;

5) найти горизонтальную или наклонную асимптоту графика (и притом отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, если промежуток бесконечен в обе стороны).

Обратимся снова к примерам.

149. Примеры. 3) Вернемся к функции

$$y=(x+2)^2(x-1)^3,$$

для которой мы уже искали экстремумы в **136**, 1). Эта функция сохраняет непрерывность при $-\infty < x < +\infty$. При $x \to \pm\infty$ не только y, но и $\frac{y}{x}$ стремится к ∞, так что асимптот нет.

Рассмотрим дополнительно вторую производную

$$y'' = 2(x-1)(10x^2+16x+1).$$

Она обращается в 0 при $x=1$; $-0{,}07$; $-1{,}53$, меняя при этом знак (перегиб). Составляем таблицу:

$x=-2$	$-1{,}53$	$-0{,}8$	$-0{,}07$	0	1
$y=0$	$-3{,}58$	$-8{,}40$	$-4{,}56$	-4	0
$y'=0$ *макс.*	*перегиб*	$y'=0$ *мин.*	*перегиб*		$y'=0$ *перегиб*

График мы уже имели на рис. 57.

1) Пусть

$$y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$$

[см. **136**, 3)]. Функция сохраняет непрерывность в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Представив ее в виде

$$y = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}}},$$

легко установить, что $y \to 0$ при $x \to \pm\infty$, так что график нашей функции имеет асимптотой ось x (и направо и налево). Вторая производная y'' не имеет корней; перегибы будут лишь в точках, где производная y' обращается в бесконечность. Ввиду четности функции — симметрия относительно оси y.

Таблица:

$x=-\infty$	-1	$-0{,}71$	0	$0{,}71$	1	$+\infty$
$y=0$	1	1,59	1	1,59	1	0
	$y'=+\infty$	$y'=0$ *макс.*	$y'=\pm\infty$ *мин.*	$y'=0$ *макс.*	$y'=-\infty$	

График — на рис. 59.

5) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$ [см. **137**].

Непрерывна в $(-\infty, +\infty)$. При $x \to \pm\infty$, очевидно, $\lim y = 1$: горизонтальная асимптота. Вторая производная

$$y'' = -10\,\frac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

обращается в нуль при $x = -1$, $2+\sqrt{3} \doteq 2{,}41$ и $2-\sqrt{3} \doteq 0{,}27$, меняя знак (перегиб). Таблица:

$x=-\infty$	-10	-5	-1	$-0{,}41$	0	$0{,}27$	2	$2{,}41$	3	$3{,}73$	5	10	$+\infty$
$y=1$	1,55	2,15	6	7,04	6	4,40	0	−0,03	0	0,08	0,23	0,55	1
			перегиб	$y'=0$ *макс.*		*перегиб*		$y'=0$ *мин.*		*перегиб*			

График на рис. 61. Небольшой масштаб здесь мешает отчетливости чертежа, особенно в промежутке изменения x от 2 до 5; эта часть графика представлена в увеличенном масштабе.

Дадим теперь ряд новых примеров.

6) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

Функция обращается в бесконечность ($-\infty$) при $x=-1$. Так как при $x\to\pm\infty$ имеем

$$\frac{y}{x}\to 1,\quad y-x=\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}\to -5,$$

то кривая имеет асимптоту: $Y=x-5$.

Вычислим производные:

$$y'=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},\qquad y''=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Первая обращается в нуль при $x=1$ (перегиб) и при $x=-5$ (максимум); других точек перегиба нет. По таблице:

$x=-10$	-5	-3	-1	0	1	5	10
$y=-16,4$	$-13,5$	-16	$-\infty$	-1	0	$1,78$	$6,05$
	$y'=0$ *макс.*				$y'=0$ *перегиб*		

строим график, с учетом асимптоты (рис. 79).

7) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$ $(a>0)$.

По этой формуле функция получает вещественные значения, лишь если $x\leqslant 0$ или $x>a$; при $x=a$ функция обращается в бесконечность.

Считая $x>a$, имеем при $x\to+\infty$

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x}{x-a}}\to 1,$$

$$y-x=\frac{x}{\sqrt{x-a}}\times$$

$$\times\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}\to\frac{a}{2},$$

так что, со стороны положительных x, кривая приближается к асимптоте $y=x+\dfrac{a}{2}$. Аналогично получается со стороны отрицательных x другая асимптота $y=-x-\dfrac{a}{2}$.

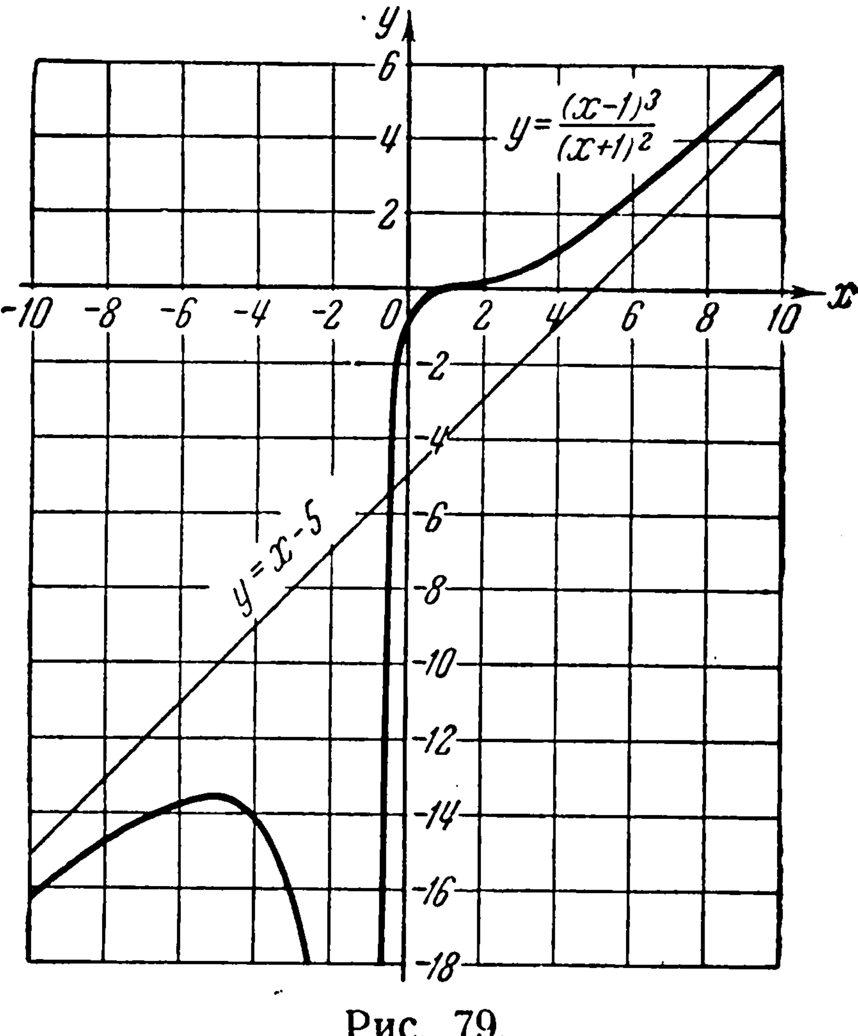


Рис. 79.

Производная

$$y'=\frac{1}{y}\cdot\frac{x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)}{(x-a)^2}=\left(x-\frac{3}{2}a\right)\sqrt{\frac{x}{(x-a)^3}}$$

обращается в нуль при $x=\dfrac{3}{2}a$, меняя знак минус на плюс (минимум). Она обращается в нуль и при $x=0$, но это — конец промежутка $(-\infty, 0]$, в котором мы функцию рассматриваем, и об экстремуме здесь не может быть и речи.

Вторая производная:

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot \frac{\frac{3}{4} a^2 x}{(x-a)^3};$$

она >0 и при $x<0$, и при $x>a$, так что кривая всегда выпукла (вниз). Вычислив еще ординату $y=2{,}60\,a$, отвечающую $x=\frac{3}{2}\,a$, мы имеем уже достаточно данных для построения графика (рис. 80).

8) $y=\sqrt{\dfrac{a^3-x^3}{3x}}$ $(a>0)$.

Переменная x может изменяться лишь в промежутке $(0,\ a]$; при $x=0$ функция обращается в бесконечность.

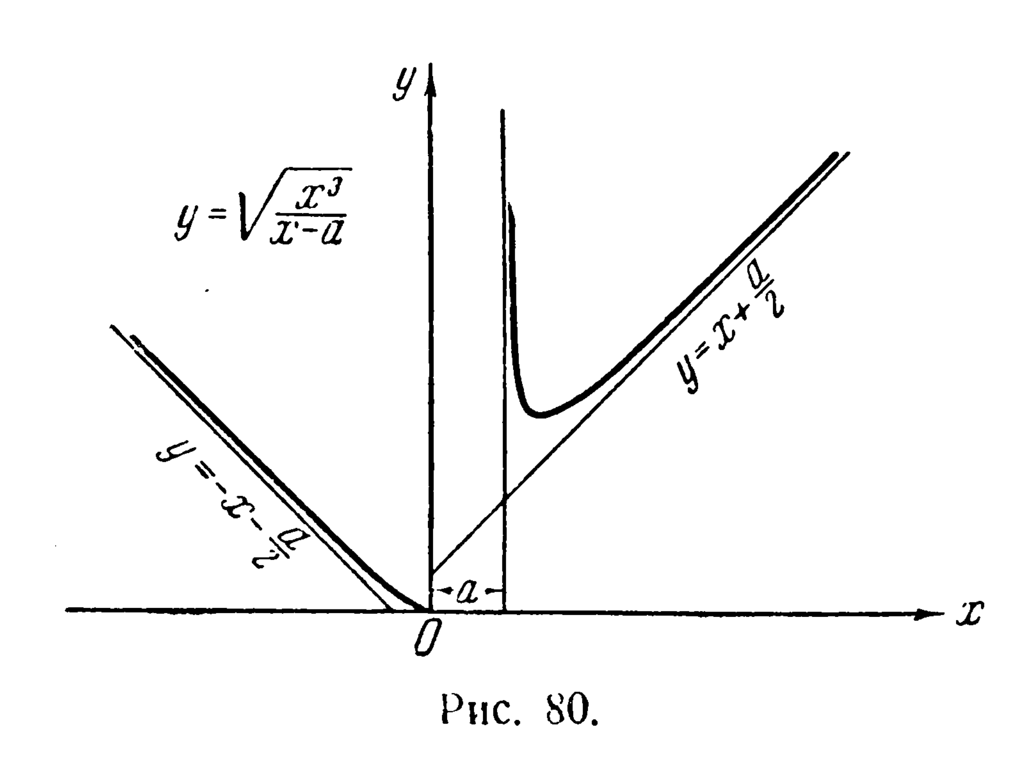


Рис. 80.

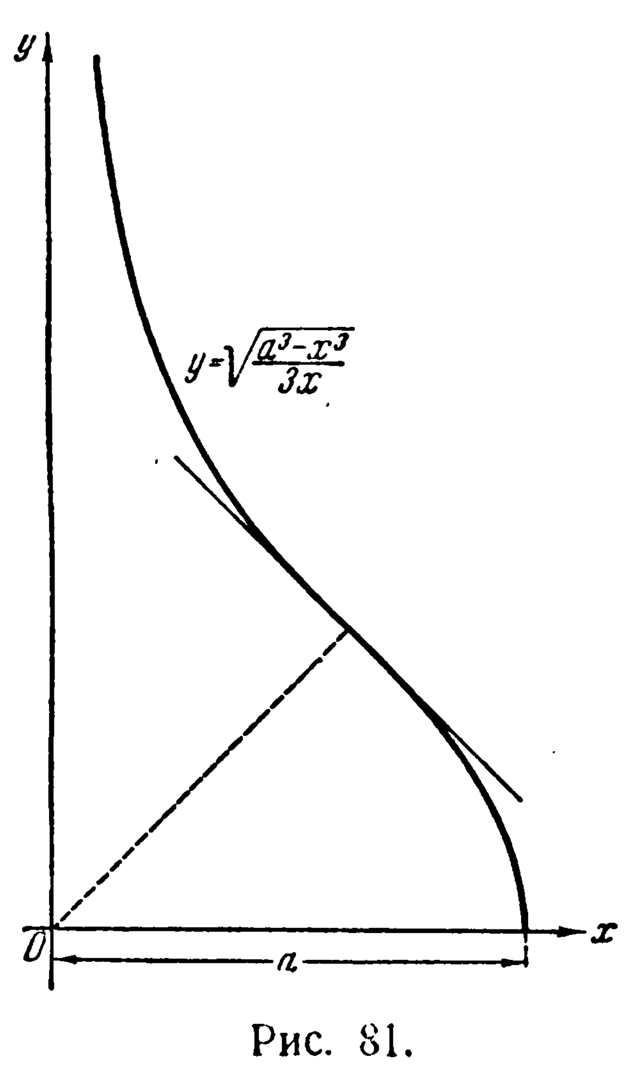


Рис. 81.

Производная

$$y' = -\frac{a^3+2x^3}{6x^2 y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

всегда отрицательна, так что функция убывает. При $x=a$ производная $y'=-\infty$.

Вторая производная

$$y'' = \frac{1}{2}(y-xy')\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$$

обращается в нуль, меняя знак, лишь при $y=x=\frac{a}{\sqrt[3]{4}} \doteq 0{,}63\,a$ (перегиб); при этом, очевидно, $y'=-1$. График представлен на рис. 81.

§ 4. Раскрытие неопределенностей

150. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Мы применим теперь понятие производной и доказанные в §§ 3, 5 предшествующей главы теоремы для раскрытия неопределенностей. Последующие теоремы 1—4 в основном принадлежат Лопиталю (G. F. de l'Hospitale) и И. Бернулли (Joh. Bernoulli). Высказанное в них правило обычно

называют **правилом Лопиталя**. Сначала мы займемся основным случаем неопределенности вида $\frac{0}{0}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к нулю (при определенном предельном переходе $x \to a$).

Начнем с простой теоремы, непосредственно использующей самое понятие производной.

Теорема 1. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $[a, b]$, 2) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, 3) *существуют конечные производные* $f'(a)$ *и* $g'(a)$, *причем* $g'(a) \neq 0$. *Тогда*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Существование конечных производных $f'(a)$ и $g'(a)$ обеспечивает непрерывность функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a. В силу 2) имеем: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0$ и $g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Ввиду того, что $g'(a) \neq 0$, по лемме n° **109**, $g(x) \neq 0$ для значений x, достаточно близких к a; ими мы и ограничимся, так что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет смысл.

Теперь это отношение можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to a$, и получим требуемый результат.

Примеры. 1) Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1}.$$

По теореме он равен вычисленному при $x = 0$ отношению производных

$$\left. \frac{e^x + e^{-x}}{1 - \dfrac{1}{e - x}} \right|_{x=0} = \frac{2}{1 - \dfrac{1}{e}} = \frac{2e}{e - 1}.$$

2) Найти предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}.$$

Он равен

$$\left. \frac{\dfrac{1 - 2x^3}{\sqrt{2x - x^4}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}} \right|_{x=1} = \frac{16}{9}.$$

В том случае, когда одновременно $f'(a)=0$, $g'(a)=0$, можно воспользоваться следующим обобщением теоремы 1, привлекающим к рассмотрению производные высших порядков:

Теорема 2. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $[a, b]$, 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, 3) *в промежутке* $[a, b]$ *существуют конечные производные всех порядков до* $(n-1)$*-го включительно* $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n-1)}(x)$, 4) *при* $x=a$ *они все обращаются в* 0, 5) *существуют конечные производные* $f^{(n)}(a)$ *и* $g^{(n)}(a)$, *причем* $g^{(n)}(a)\neq 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Доказательство. Приложим к каждой из функций $f(x)$, $g(x)$ в промежутке $[a, x]$ $(a<x\leqslant b)$ формулу Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано [см. **124**, (10а)]. Ввиду 2), 3) и 4), получим

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{n!}(x-a)^n,$$

$$g(x)=\frac{g^{(n)}(a)+\beta}{n!}(x-a)^n,$$

где α и $\beta\to 0$ при $x\to a$.

Второе из этих равенств, вследствие условия $g^{(n)}(a)\neq 0$, прежде всего показывает, что $g(x)$ отлично от нуля, по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a. Если этими значениями ограничиться, то отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет смысл.

Тогда из написанных равенств непосредственно и получается требуемый результат:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{g^{(n)}(a)+\beta}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Пример. 3) Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Здесь имеем:

$$\begin{array}{llll}
f(x)=e^x-e^{-x}-2x & f(0)=0; & g(x)=x-\sin x, & g(0)=0;\\
f'(x)=e^x+e^{-x}-2, & f'(0)=0; & g'(x)=1-\cos x, & g'(0)=0;\\
f''(x)=e^x-e^{-x} & f''(0)=0; & g''(x)=\sin x, & g''(0)=0;\\
f'''(x)=e^x+e^{-x} & f'''(0)=2; & g'''(x)=\cos x, & g'''(0)=1.
\end{array}$$

Следовательно, искомый предел равен 2.

Хотя в большинстве случаев для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ уже достаточно доказанных теорем, но на практике обычно удобнее следующая

Теорема 3. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $(a, b]$, 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, 3) *в промежутке* $(a, b]$ *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$, *и наконец,* 4) *существует* (*конечный или нет*) *предел*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Дополним определение функций $f(x)$ и $g(x)$, положив их при $x = a$ равными нулю: $f(a) = g(a) = 0$*). Тогда эти функции окажутся непрерывными во всем замкнутом промежутке $[a, b]$: их значения в точке a совпадают с пределами при $x \to a$ [ввиду 2)], а в прочих точках непрерывность вытекает из существования конечных производных [см. 3)]. Применяя теорему Коши [**114**], получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $a < c < x$. То обстоятельство, что $g(x) \neq 0$, т. е. $g(x) \neq g(a)$, есть следствие предположения: $g'(x) \neq 0$, как это было установлено при выводе формулы Коши.

Когда $x \to a$, очевидно, и $c \to a$, так что, в силу 4),

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказанная теорема сводит предел отношения функций к пределу отношения производных, если последний существует. Часто оказывается, что нахождение предела отношения производных проще и может быть осуществлено элементарными приемами.

Пример. 4) Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

Отношение производных последовательно упрощается:

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x};$$

при $x \to 0$ оно, очевидно, стремится к 2. Таков же будет, согласно теореме и искомый предел.

) Конечно, можно было бы просто предположить заранее функции определенными и непрерывными при $x = a$; но в приложениях иной раз удобнее формулировка условий теоремы, данная в тексте (см., например, теорему 8).

Теорема 1 в этом случае была бы неприложима, ибо при $x=0$ производные числителя и знаменателя обе равны 0. Что же касается теоремы 2, то, хотя с ее помощью задача могла бы быть разрешена, но для этого потребовалось бы (в чем легко убедиться) вычислить три последовательных производных от заданных функций.

Обращаем внимание читателя на то, что здесь и отношение производных снова представило неопределенность вида $\frac{0}{0}$, но раскрыть эту неопределенность оказалось возможным путем элементарных преобразований. В других случаях может понадобиться применить теорему повторно. Важно подчеркнуть, что при этом допустимы всякие упрощения получаемых выражений, сокращение общих множителей, использование уже известных пределов и т. п. (Всего этого делать нельзя, если применяется теорема 2!) В следующем примере теорема 3 применяется последовательно три раза; после первого мы сокращаем на e^x, а после второго — отбрасываем множитель e^x в знаменателе (ибо он стремится к 1). Этим выкладки упрощаются.

Примеры. 5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}+e^{2x}+xe^x+e^x-4e^{2x}+2e^x}{3(e^x-1)^2\cdot e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x-3e^x+3+x}{3(e^x-1)^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x+2e^x-3e^x+1}{2(e^x-1)e^x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+2xe^x+1}{e^x-1}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x+e^x}{e^x}=\frac{1}{6}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\,\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

Так как первый множитель справа стремится к e, то достаточно заняться вторым множителем. С помощью двухкратного применения теоремы 3 найдем, что предел его равен $-\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{e}{2}$.

Теорема 3 легко распространяется на случай, когда аргумент x стремится к бесконечному пределу: $a=\pm\infty$ (этого, разумеется, нельзя сделать в отношении теорем 1 и 2). Именно, имеет место, например,

Теорема 3*. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $[c, +\infty]$, *где* $c>0$, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 3) *существуют в промежутке* $[c, +\infty]$ *конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x)\neq 0$, *и, наконец,* 4) *существует (конечный или нет) предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Доказательство. Преобразуем переменную x по формуле $x=\frac{1}{t}$, $t=\frac{1}{x}$. Тогда, если $x\to+\infty$, то $t\to 0$, и обратно. Ввиду 2), имеем

$$\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0, \qquad \lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

а в силу 4),

$$\lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K.$$

К функциям $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ от новой переменной t можно применить теорему 3, что даст нам

$$\lim_{t\to+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K\text{*)},$$

а тогда и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=K,$$

ч. и тр. д.

Замечание. Иногда при раскрытии неопределенностей рассматриваемого вида можно обойтись формально без применения указанных выше теорем, используя разложения функций по формуле Тейлора [**124—125**]. Пусть $x\to 0$ (к этому случаю всегда можно свести дело). Если с помощью известных разложений удается выделить из числителя и знаменателя главные члены:

$$f(x)=ax^n+o(x^n), \quad g(x)=bx^m+o(x^m),$$

то становится сразу ясен предел дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$: он равен нулю, $\frac{a}{b}$ или $\pm\infty$, смотря по тому, будет ли n больше, равно или меньше m**). [Ср. **62**, **63**.]

Так, в примере 1) имеем, заменяя функции e^x, e^{-x} и $\ln(e-x)-1=\ln\left(1-\frac{x}{e}\right)$ несколькими первыми членами их разложений:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x+\ldots)-(1-x+\ldots)}{\left(-\frac{x}{e}+\ldots\right)+x}=\lim_{x\to 0} \frac{2x+\ldots}{\left(1-\frac{1}{e}\right)x+\ldots}=\frac{2e}{e-1}.$$

---

*) Функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ мы дифференцируем по t как сложные функции.

**) В последнем случае знак бесконечности нетрудно сообразить по знакам a и b, а также (в случае нечетности разности $m-n$) по знаку x.

Аналогично в примере 4):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)-x}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3}+\ldots}{\frac{x^3}{6}+\ldots} = 2.$$

Предлагается, в виде упражнения, тем же методом решить примеры 3) и 5).

151. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Обратимся к рассмотрению неопределенных выражений вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к $+\infty$ (при $x \to a$).

Покажем, что в этом случае применимо то же *правило Лопиталя*: следующая теорема есть простая перефразировка теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $(a, b]$, 2) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, 3) *существуют в промежутке* $(a, b]$ *конечные производные* $f'(x)$ и $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$, *и, наконец,* 4) *существует (конечный или нет) предел*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай конечного K.

Так как производная $g'(x)$ не обращается в нуль, то по теореме Дарбу [110] она сохраняет знак, и функция $g(x)$ изменяется монотонно [132]. Из 2) тогда ясно, что $g'(x) < 0$ и $g(x)$ с убыванием x монотонно возрастая стремится к $+\infty$. Можно считать, что всегда $g(x) > 0$.

Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, в силу условия 4), найдем такое $\eta > 0$, что при $a < x < a + \eta$ будет

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим для краткости $a + \eta = x_0$ и возьмем x между a и x_0. К промежутку $[x, x_0]$ применим формулу Коши *):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

*) В этом — существенное отличие от доказательства теоремы 3: здесь нельзя применить формулу Коши к промежутку $[a, x]$, ибо, как бы ни определять функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, ввиду 2), из них не получить функций, непрерывных в этой точке.

где $x < c < x_0$, следовательно,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Напишем теперь тождество (которое легко непосредственно проверить):

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - K\cdot g(x_0)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - K\right],$$

откуда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0) - K\cdot g(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - K\right|.$$

Второе слагаемое справа для $x < x_0 = a + \eta$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, в силу (1). Ввиду того же, что $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, первое слагаемое при этом стремится к нулю, и найдется такое $\delta > 0$ (можно считать $\delta < \eta$), что для $a < x < a + \delta$ первое слагаемое тоже станет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Для указанных значений x будем иметь тогда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает требуемое утверждение *).

В том случае, когда $K = +\infty$ [и заведомо $f'(x) \neq 0$, по крайней мере, вблизи a], имеем, меняя ролями f и g,

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0, \quad \text{так что и} \quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

откуда, наконец,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

так как (по крайней мере вблизи a) очевидно, и $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ **).

Отметим, что доказательство без существенных изменений распространяется и на случай $a = -\infty$. Точно так же теорема могла бы быть доказана и для промежутка $[b, a)$ $(b < a)$ как при конечном a, так и при $a = +\infty$. Таким образом, на случай бесконечного предела аргумента теорема 4 распространяется автоматически.

В виде примера легко получить уже известные нам пределы:

$$7)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}} = 0 \qquad (\text{если } \mu > 0).$$

---

*) Подчеркнем, что в нашем рассуждении мы фактически не пользовались предположением, что $\lim f(x) = +\infty$ [ср. доказательство теоремы Штольца в 33].

**) Случай $K = -\infty$ при предположениях теоремы невозможен.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x\cdot\ln a}\qquad(a>1,\ \mu>0).$

Если $\mu>1$, то справа снова имеем неопределенность того же типа $\frac{\infty}{\infty}$; но, продолжая этот процесс и повторно применяя теорему 4, в конце концов получим в числителе степень с отрицательным (или нулевым) показателем. Поэтому, во всяком случае,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0.$$

Сделаем общее замечание относительно теорем 3 (3*) и 4. В них устанавливается предел отношения функций в *предположении*, что существует предел отношения производных. Но обращение этих теорем недопустимо, и первый предел может существовать при отсутствии второго.

Например, существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

хотя отношение производных, равное $1+\cos x$, предела при $x\to+\infty$ не имеет.

152. Другие виды неопределенностей. Предыдущие теоремы относились к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Если имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$, то ее можно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и тогда воспользоваться правилом *Лопиталя*. Пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Тогда имеем

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Второе из этих выражений представляет при $x\to a$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$, третье — неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. 9)

$$\lim_{x\to+0}(x^\mu\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^\mu}{-\mu}=0$$

(мы считаем $\mu>0$).

К виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ всегда можно привести и неопределенности вида $\infty - \infty$. Пусть имеем выражение $f(x) - g(x)$, причем

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty.$$

Тогда можно произвести, например, следующее преобразование, сводящее это выражение к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}.$$

Часто, впрочем, того же удается достигнуть проще.

Пример. 10)

$$\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x},$$

но

$$\frac{x^2 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \frac{x \cdot \cos x + \sin x}{x} \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x \cdot \sin^2 x};$$

предел первого множителя находится элементарно:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos x + \sin x}{x} = \lim_{x \to 0}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) = 2,$$

а ко второму применяем теорему 3:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x \cdot \sin x}{\sin^2 x + 2x \cdot \sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} + 2\cos x} = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, искомый предел равен $-\frac{2}{3}$.

В случае неопределенных выражений вида 1^∞, 0^0, ∞^0 рекомендуется эти выражения предварительно прологарифмировать.

Пусть $y = [f(x)]^{g(x)}$; тогда $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. Предел $\ln y$ представляет собой неопределенность уже изученного типа $0 \cdot \infty$. Допустим, что одним из указанных выше приемов удается найти $\lim\limits_{x \to a} \ln y$, который оказывается равным конечному числу k, $+\infty$ или $-\infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} y$, соответственно, будет e^k, $+\infty$ или 0.

Примеры. 11) Пусть

$$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}.$$

Требуется найти $\lim y$ при $x \to 0$ (неопределенность вида: 1^∞).

Если считать $x>0$ (этим предположением, ввиду четности функции y, можно ограничиться), то

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}.$$

Применяя теорему 3 (и используя уже найденный в предыдущем примере результат), получим:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=-\frac{1}{3},$$

откуда

$$\lim_{x\to 0}y=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

12)

$$y=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

При $x\to+\infty$ это выражение представляет неопределенность вида 0^0. Имеем

$$\ln y=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}{\ln x}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1,$$

так что $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\dfrac{1}{e}$.

§ 5. Приближенное решение уравнений

153. Вводные замечания. Займемся теперь задачей о нахождении корней данной функции $f(x)$, т. е. корней уравнения

$$f(x)=0. \tag{1}$$

Впрочем, решать эту задачу мы будем в предположении, что интересующий нас корень ξ изолирован, т. е. что найден содержащий его промежуток $[a, b]$:

$$a<\xi<b,$$

в котором других корней нет.

Если, сверх того, на концах промежутка функция $f(x)$ имеет значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то, как это было разъяснено в n° **81**, в связи с применением 1-й теоремы Больцано — Коши, последовательно деля на части промежуток, содержащий корень, и определяя знак функции $f(x)$ в точках деления, можно произвольно сужать этот промежуток и тем осущест-

влять приближенное вычисление корня. Однако, этот прием, несмотря на его принципиальную простоту, на практике часто оказывается непригодным, ибо требует слишком большого количества вычислений. В настоящем параграфе читатель познакомится с простейшими приемами приближенного вычисления (изолированного) корня уравнения (1), которые более систематически и более быстро ведут к цели. При этом мы снова будем иметь случай использовать основные понятия и методы дифференциального исчисления.

Мы будем всегда предполагать выполнение следующих условий:

1) *функция* $f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ *непрерывна вместе со своими производными* $f'(x)$ *и* $f''(x)$;

2) *значения* $f(a)$ *и* $f(b)$ *функции на концах промежутка имеют разные знаки:* $f(a)\cdot f(b)<0$:

3) *обе производные* $f'(x)$ *и* $f''(x)$ *сохраняют каждая определенный знак во всем промежутке* $[a, b]$.

Из непрерывности функции $f(x)$ и условия 2) следует, что между a и b содержится корень ξ уравнения (1) [80]. Так как производная $f'(x)$ сохраняет знак [3)], то $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ возрастает или убывает и, следовательно, обращается в 0 лишь однажды: корень ξ изолирован.

Условие 3) геометрически означает, что кривая $y=f(x)$ не только идет в одном направлении, — все время вверх или все время вниз, смотря по знаку $f(x)$ [**132**], но к тому же (строго) выпукла вниз или вверх, смотря по знаку $f''(x)$ [**143**]. На рис. 82 изображены четыре возможных случая, отвечающих различным комбинациям знаков $f'(x)$ и $f''(x)$.

В алгебре устанавливается, что при вычислении (вещественных) корней алгебраических уравнений всегда может быть создано такое положение вещей, при котором выполняются условия 1), 2), 3), так что эти условия принципиально не ограничивают приложимости излагаемых ниже приемов. Этого нельзя сказать по отношению к трансцендентным (т. е. неалгебраическим) уравнениям. Однако на практике поставленные ограничения мало стеснительны, так как в большинстве случаев высказанные условия выполняются.

154. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если промежуток $[a, b]$ достаточно мал, то с известным приближением можно считать, что — при изменении x в его пределах — приращение функции $f(x)$ пропорционально приращению аргумента. Обозначая через ξ корень функции, имеем, в частности,

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\xi-a}{b-a},$$

откуда, с учетом того, что $f(\xi)=0$,

$$\xi \doteq a-\frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Таким образом, за приближенное значение корня здесь принимается число

$$x_1=a-\frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{2}$$

Это выражение, очевидно, можно представить и в такой форме

$$x_1=b-\frac{(b-a)\cdot f(b)}{f(b)-f(a)}. \tag{2*}$$

Изложенное правило получения приближенного значения корня и называется *правилом пропорциональности частей* *). Оно допускает простое гео-

*) В старину его называли «правилом ложного положения» (regula falsi), ибо оно основано на предположении, которое, строго говоря, не отвечает действительности.

метрическое истолкование. Заменим дугу MM' кривой (рис. 82) — хордой MM'. Уравнение последней может быть написано, например, в виде

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \qquad (3)$$

Наше правило, по существу, сводится к тому, что вместо точки A пересечения кривой с осью x определяется точка D пересечения с осью x этой

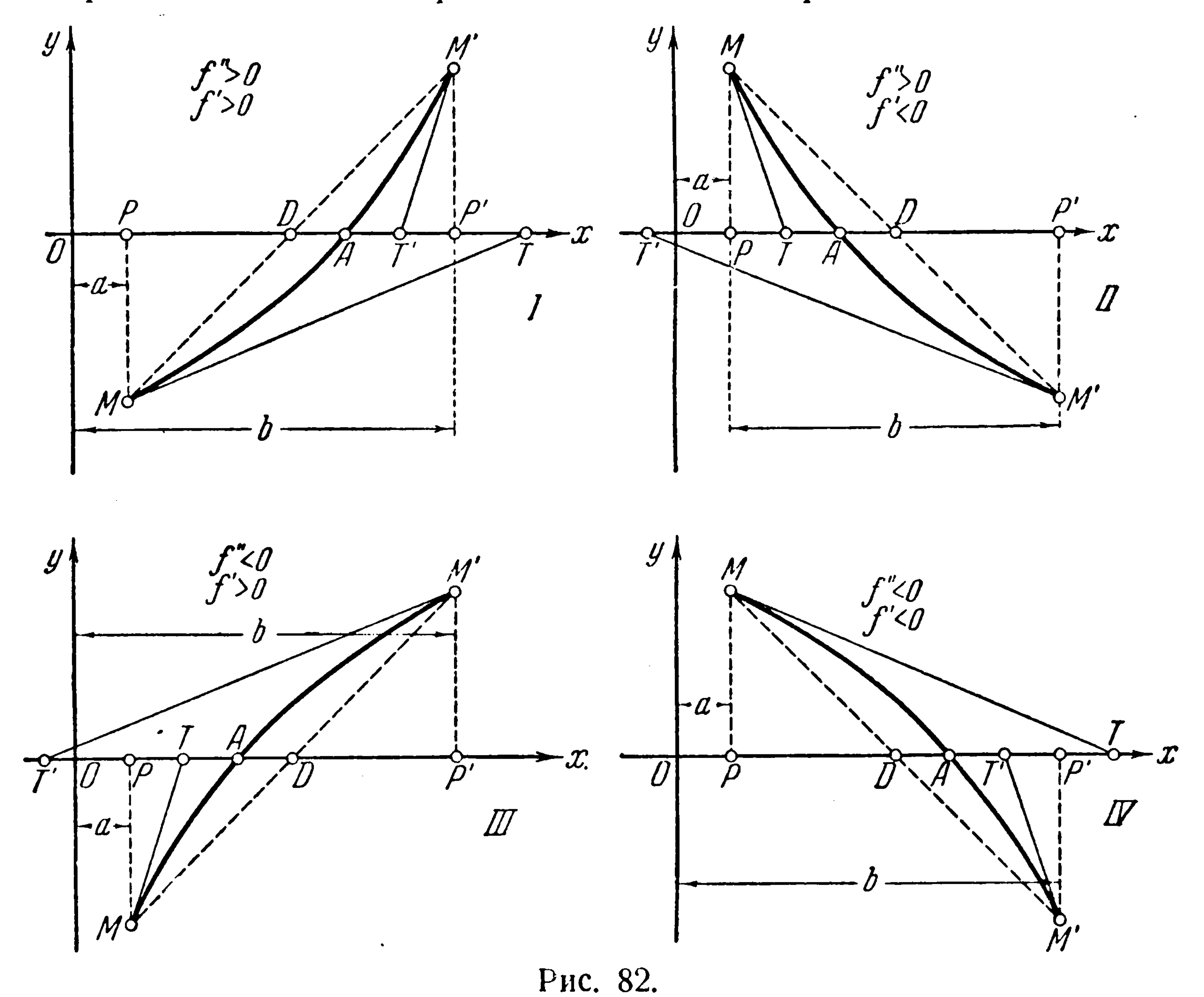


Рис. 82.

хорды. Действительно, полагая в (3) $y=0$, для абсциссы x_1 точки D получаем именно выражение (2).

В связи с этим правило пропорциональных частей называют также *методом хорд.*

Обратимся теперь к исследованию вопроса о положении точки x_1 по отношению к корню ξ. Непосредственно ясно, что точка x_1 лежит между a и b, но с какой стороны от ξ?

Так как в случаях I и II (III и IV) мы имеем дело с выпуклой вниз (вверх) функцией, то кривая MM' лежит под (над) хордой MM', т. е.

$$f(x)\underset{(>)}{<}f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (a<x<b). \qquad (4)$$

Полагая здесь $x=x_1$, непосредственно получаем

$$f(x_1)\underset{(>)}{<}0,$$

так что $f(x_1)$ всегда имеет знак, противоположный знаку $f''(x)$. Отсюда, наконец, заключаем, что *в случаях* I *и* IV *значение x_1 лежит между a и ξ, в случаях же* II *и* III — *между ξ и b.*

Ограничиваясь случаями I и IV, применим снова наше правило, на этот раз к промежутку $[x_1, b]$; заменяя в (2) a на x_1, получим новое приближенное значение корня ξ:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) \cdot f(x_1)}{f(b) - f(x_1)},$$

содержащееся, по доказанному, между x_1 и ξ. Этот процесс можно продолжать неопределенно и построить последовательность все *возрастающих* приближенных значений

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi.$$

При этом любые два последовательных значения x_n и x_{n+1} связаны формулой, аналогичной (2),

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) \cdot f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \tag{5}$$

Покажем, что, с возрастанием n, $x_n \to \xi$. В самом деле, монотонно возрастающая, но ограниченная (например, числом ξ) переменная x_n должна стремиться к некоторому конечному пределу $\alpha \leqslant \xi$. Если перейти к пределу в равенстве (5), используя при этом непрерывность функции $f(x)$, то получим, что

$$\frac{(b - \alpha) \cdot f(\alpha)}{f(b) - f(\alpha)} = 0,$$

откуда $f(\alpha) = 0$. Так как других корней уравнения (1), кроме ξ, в промежутке $[a, b]$ нет, то $\alpha = \xi$ *).

Рис. 83 иллюстрирует постепенное приближение точек D_1, D_2, ... пересечения последовательных хорд с осью x к искомой точке A.

Рис. 83.

Легко понять, что в случаях II или III повторное применение правила приведет к последовательности *убывающих* приближенных значений

$$b > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots > \xi,$$

стремящихся к корню ξ справа.

Таким образом, во всех случаях, применив достаточное число раз указанное выше правило, можно вычислить корень ξ *с любой степенью точности*. При этом, впрочем, остается открытым вопрос, *как оценить точность уже вычисленного приближенного значения* x_n.

Для решения его применим к разности $f(x_n) - f(\xi)$ формулу конечных приращений [112]:

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi) \cdot f'(c) \qquad (\xi \lessgtr c \lessgtr x_n).$$

Отсюда

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(c)};$$

*) Сходимость процесса можно установить и без предположения, относящегося ко второй производной, но тогда не исключена возможность того, что точки x_n переходят с одной стороны от корня на другую.

если обозначить через m наименьшее значение $|f'(x)|$ в рассматриваемом промежутке (которое можно раз навсегда вычислить наперед), то получим оценку:

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}. \tag{6}$$

Так по самой величине $f(x_n)$ оказывается возможным судить о близости x_n к корню!

Рассмотрим пример. Уравнение

$$x^3-2x^2-4x-7=0$$

имеет корень между 3 и 4, ибо, если через $f(x)$ обозначить левую его часть

$$f(3)=-10<0, \quad f(4)=9>0.$$

Поставим себе задачей вычислить этот корень с точностью до 0,01. В промежутке $[3, 4]$ обе производные

$$f'(x)=3x^2-4x-4 \text{ и } f''(x)=6x-4$$

сохраняют знак плюс (случай I); наименьшее значение первой из них будет $m=11$.

Имеем:

$$x_1=3-\frac{f(3)}{f(4)-f(3)}=3+\frac{10}{19}=3+0{,}52\ldots;$$

округляя, положим $x_1=3{,}52$. Так как $f(3{,}52)=-2{,}246592$, то, по неравенству (6), требуемой точности еще нет. Продолжаем:

$$x_2=3{,}52-\frac{0{,}48\cdot f(3{,}52)}{f(4)-f(3{,}52)}=3{,}52+\frac{1{,}07836416}{11{,}246592}=3{,}52+0{,}09\ldots$$

или, округляя, $x_2=3{,}61$. Вычислив $f(3{,}61)=-0{,}458319$ и пользуясь неравенством (6), снова видим, что цель еще не достигнута. Наконец,

$$x_3=3{,}61-\frac{0{,}39\cdot f(3{,}61)}{f(4)-f(3{,}61)}=3{,}61+\frac{0{,}17874441}{9{,}458319}=3{,}61+0{,}0188\ldots$$

Округляя, положим $x_3=3{,}63$. Так как мы округлили «в сторону корня», то могли и перескочить через него; что этого не произошло, видно по знаку числа $f(3{,}63)=-0{,}041653$. На этот раз, по неравенству (6),

$$|x_3-\xi|=\xi-x_3<\frac{0{,}041\ldots}{11}<0{,}004.$$

Таким образом,

$$3{,}630<\xi<3{,}634,$$

т. е. $\xi=3{,}63_{+0{,}004}$.

Этим примером мы ограничимся, так как метод хорд все же мало эффективен; ему следует предпочесть метод касательных, к которому мы и переходим.

155. Правило Ньютона (метод касательных). Вернемся к прежним предположениям относительно функции $f(x)$ [153]; искомый корень ξ этой функции изолирован в промежутке $[a, b]$: $a<\xi<b$. Отправляясь от какого-нибудь из концов этого промежутка, например, от b, напишем формулу Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа:

$$0=f(\xi)=f(b)+f'(b)\cdot(\xi-b)+\frac{1}{2}f''(c)\cdot(\xi-b)^2 \quad (\xi<c<b). \tag{7}$$

Отбрасывая дополнительный член, приближенно можно положить

$$f(b)+f'(b)\cdot(\xi-b)\doteq 0,$$

откуда

$$\xi=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Таким путем мы приходим к приближенному значению корня ξ:

$$x_1'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{8}$$

Получение этого значения можно наглядно истолковать и геометрически. Рассмотрим касательную к кривой $y=f(x)$ в точке M', с абсциссой b. Ее уравнение имеет вид

$$y-f(b)=f'(b)\cdot(x-b).$$

Полагая здесь $y=0$, найдем абсциссу точки T' пересечения касательной с осью x; она в точности совпадает с (8). Значит, суть дела в приближенной замене дуги кривой MM' — касательной к ней в одном из ее концов (см. рис. 82).

Это правило, носящее имя Ньютона, называется также *методом касательных.*

Встает, однако, вопрос, где лежит значение x_1', получаемое по формуле (8). Ведь тот же рис. 82 показывает, что точка пересечения касательной с осью x может лежать даже вне рассматриваемого промежутка! Мы докажем, что, *если значение $f(b)$ — одного знака с $f''(x)$* (т. е. в случаях I и IV), *x_1' лежит между ξ и b.*

Действительно, так как $f(b)$ и $f'(b)$ — одного знака, то из (8) непосредственно ясно, что $x_1'<b$. С другой стороны, из (7) и (8) следует:

$$\xi-x_1'=\xi-b+\frac{f(b)}{f'(b)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c)}{f'(b)}(\xi-b)^2. \tag{9}$$

Но $f''(x)$ в рассматриваемых случаях имеет одинаковый знак с $f'(x)$, следовательно, $\xi<x_1'$. Окончательно: $\xi<x_1'<b$.

Аналогично, если исходить из точки a, и касательную к кривой провести в конце M (с абсциссой a), то, взамен (8), получим приближенное значение

$$x_1'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{8*}$$

Относительно вычисленного по этой формуле значения можно установить, как и выше: *если значение $f(a)$ — одного знака* с $f''(x)$ (т. е. в случаях II и III), *x_1' лежит между a* и ξ.

Таким образом, для каждого из четырех возможных случаев указано, с какого конца гарантирована успешность приближения к корню по правилу Ньютона. Повторное применение его дает в случаях I и IV последовательность убывающих значений:

$$b>x_1'>x_2'>\ldots>x_n'>x_{n+1}'>\ldots>\xi,$$

а в случаях II и III — последовательность возрастающих значений:

$$a<x_1'<x_2'<\ldots<x_n'<x_{n+1}'<\ldots<\xi,$$

причем вычисление последующего значения по предыдущему всегда производится по формуле

$$x_{n+1}'=x_n'-\frac{f(x_n')}{f'(x_n')}. \tag{10}$$

И здесь легко доказать, что $x'_n \to \xi$. Монотонная и ограниченная переменная x'_n имеет конечный предел β; переходя же к пределу в (10), с учетом непрерывности обеих функций $f(x)$ и $f'(x)$, найдем:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}=0, \text{ откуда } f(\beta)=0 \text{ и } \beta=\xi.$$

Рис. 84 иллюстрирует приближение к точке A со стороны точек T_1, T_2, ... пересечения последовательных касательных с осью x.

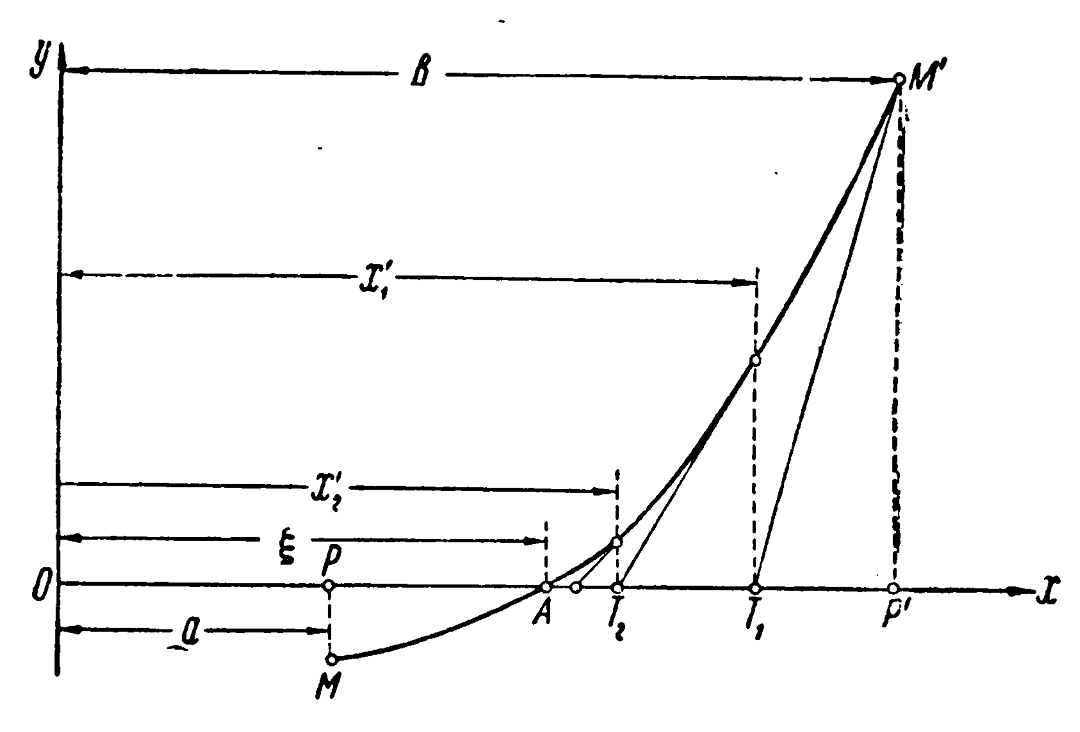


Рис. 84.

Таким образом, и правило Ньютона, повторно примененное, позволяет вычислить корень ξ с любой степенью точности. При этом точность уже вычисленного приближенного значения оценивается, как и выше, по формуле (6).

Чтобы охарактеризовать скорость убывания разностей $x_n - \xi$, вернемся к формуле (9); заменим в ней b через x'_n, а x'_1 — через x'_{n+1}:

$$x'_{n+1}-\xi=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c)}{f'(x'_n)}(x'_n-\xi)^2.$$

Обозначая через M наибольшее значение $|f''(x)|$ в заданном промежутке $[a, b]$ (и сохраняя за m его прежнее значение), отсюда легко получить теперь:

$$|x'_{n+1}-\xi| \leqslant \frac{M}{2m}\cdot|x'_n-\xi|^2. \qquad (11)$$

Поскольку справа стоит квадрат, этим обеспечено весьма быстрое приближение x'_n к ξ (по крайней мере, начиная с некоторого места), что и делает метод касательных одним из самых эффективных методов приближенного вычисления корня.

Неравенство (11) выполняет еще одну функцию. Если точность вычисленного значения x'_n уже оценена, например, с помощью неравенства (6), то неравенство (11) позволяет наперед оценить точность еще невычисленного значения x'_{n+1}. Это может оказаться полезным при решении вопроса о том, на каком знаке целесообразно его округлить.

Обратимся к примерам. Их решение, разумеется, предполагает использование всех вспомогательных средств вычисления, какие имеются под рукой, как-то: таблиц степеней и корней, таблиц умножения, арифмометра, логарифмических и логарифмотригонометрических таблиц, натуральных таблиц тригонометрических величин, таблиц для перевода градусной меры углов в радианную, и т. п.

156. Примеры и упражнения. В этом n° мы будем пользоваться исключительно методом касательных.

1) Вычислить с точностью до 0,01 корень уравнения

$$x^3-2x^2-4x-7=0,$$

зная, что он содержится в промежутке (3, 4) [ср. **154**].

Имеем:

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7,\quad f(3)=-10<0,\quad f(4)=+9>0,$$
$$f'(x)=3x^2-4x-4>0,\ f''(x)=6x-4>0\ (\text{при } 3\leqslant x\leqslant 4)$$

(случай I); наименьшее значение $|f(x)|$ есть $m=11$.

Отправляемся от того из концов заданного промежутка $b=4$, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком $f''(x)$. По формуле (8)

$$x_1'=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4-\frac{9}{28}=4-0{,}32\ldots;$$

округляя, положим $x_1'=4-0{,}3=3{,}7$. Так как $f(x_1')=f(3{,}7)=1{,}473$, то, по неравенству (6), $x_1'-\xi<\frac{1{,}473}{11}<0{,}14$, т. е. достигнутая точность недостаточна. Далее,

$$x_2'=3{,}7-\frac{f(3{,}7)}{f'(3{,}7)}=3{,}7-\frac{1{,}473}{22{,}27}=3{,}7-0{,}066\ldots;$$

положим, $x_2'=3{,}7-0{,}066=3{,}634$. На этот раз $f(x_2')=f(3{,}634)=0{,}042\ldots$, так что, в силу (6), $x_2'-\xi<\frac{0{,}042}{11}<$ $<0{,}004$. Поэтому $3{,}630<\xi<3{,}634$ и $\xi=3{,}63$ с требуемой точностью.

(Получение этого же результата в **154** по методу хорд потребовало трех шагов.)

2) Для второго примера предложим себе решить уравнение

$$x\cdot\log x=1.$$

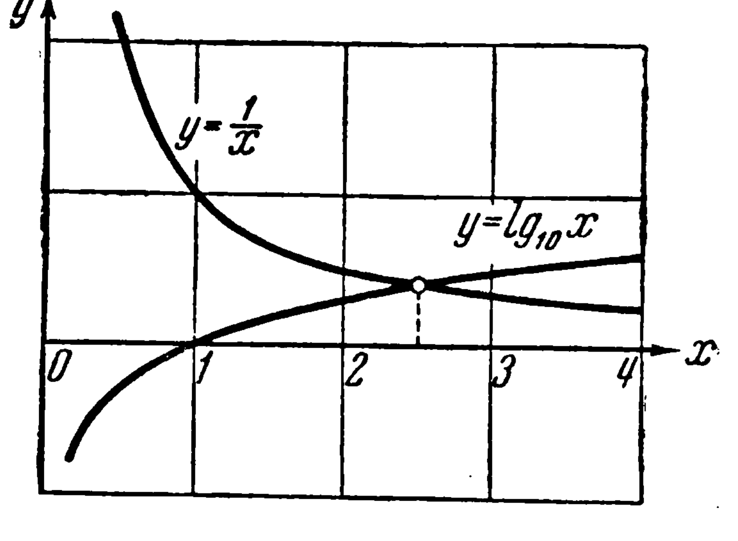


Рис. 85.

Воспользуемся этим случаем, чтобы пояснить читателю, как графическое изображение функций может служить для предварительной ориентировки в расположении корней уравнения. Значение x, удовлетворяющее уравнению

$$\log x=\frac{1}{x},$$

очевидно, представляет абсциссу точки пересечения кривых

$$y=\log x \ \text{ и } \ y=\frac{1}{x}.$$

Даже грубое их изображение (рис. 85) сразу показывает, что искомый корень лежит между 2 и 3. Это легко теперь проверить и вычислением, ибо, полагая $f(x)=x\cdot\log x-1$, имеем

$$f(2)=-0{,}39793\ldots<0,$$
$$f(3)=0{,}43136\ldots>0.$$

Вычислим упомянутый корень с точностью до 0,0001.

Очевидно, при $2 \leqslant x \leqslant 3$.

$$f'(x) = \log x + \log e > 0,$$
$$f''(x) = \frac{\log e}{x} > 0$$

(случай I); можно положить $m = 0{,}7$.

Так как именно $f(3)$ имеет тот же знак, что и $f''(x)$, то, по формуле (8),

$$x_1' = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{0{,}43136\ldots}{0{,}91141\ldots} = 3 - 0{,}473\ldots;$$

положим $x_1' = 3 - 0{,}47 = 2{,}53$. Имеем $f(x_1') = f(2{,}53) = 0{,}019894\ldots$, так что $x_1' - \xi \leqslant \frac{0{,}0199}{0{,}7} < 0{,}03$. Далее,

$$x_2' = 2{,}53 - \frac{f(2{,}53)}{f'(2{,}53)} = 2{,}53 - \frac{0{,}019894\ldots}{0{,}83741\ldots} = 2{,}53 - 0{,}02375\ldots;$$

возьмем $x_2' = 2{,}53 - 0{,}0237 = 2{,}5063$. Оценим, по неравенству (6), погрешность:

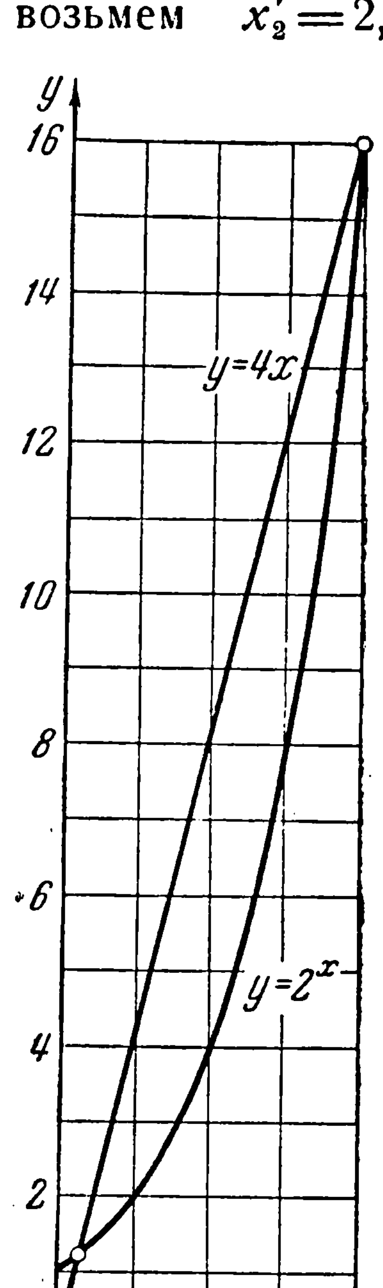


Рис. 86.

$$f(2{,}5063) = 0{,}000096\ldots,$$
$$x_2' = \xi < \frac{0{,}000096\ldots}{0{,}7} < 0{,}0002,$$

т. е. $2{,}5061 < \xi < 2{,}5063$. В таком случае имеем, с уже требуемой точностью,

$$\xi = 2{,}5062_{\pm 0{,}0001}.$$

[На деле 2,5062 является избыточным приближенным значением для ξ, ибо $f(2{,}5062) > 0$.]

3) Вернемся к уравнению

$$2^x = 4x,$$

о котором уже была речь в **81**. Мы видели там, что между 0 и 0,5 заключен корень этого уравнения. Это обстоятельство также легко было бы заметить с помощью графиков функций $y = 2^x$ и $y = 4x$; на рис. 86 ясно видно, что эти кривые, кроме точки с абсциссой 4, пересекаются еще в некоторой точке с абсциссой ξ между 0 и 0,5. Предложим себе вычислить этот корень с точностью до 0,00001.

Имеем для $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$,

$$f(x) = 2^x - 4x, \quad f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 4 < 0,$$
$$f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 > 0$$

(случай II). Здесь $m = 4 - \sqrt{2}\ln 2 > 3$, $M = 2\ln^2 2 < 0{,}7$, $\frac{M}{2m} < 0{,}12$. Так как $f(0) = 1$ имеет одинаковый знак с $f''(x)$, то начинаем с $a = 0$. В силу (6), погрешность этого приближенного значения $< \frac{1}{3}$, а тогда, в силу (11), можно наперед оценить погрешность:

$$\xi - x_1' < 0{,}12 \cdot \frac{1}{9} < 0{,}014.$$

Поэтому вычисленное по формуле (8*) значение

$$x_1' = \frac{1}{\ln 2 - 4} = \frac{1}{3{,}306852\ldots} = 0{,}30\ldots$$

округляем на втором знаке: $x_1' = 0{,}30$. Пользуясь значением $f(0{,}30) = 0{,}031144\ldots$, по неравенству (6), точнее оцениваем погрешность:

$$\xi - x_1' < \frac{0{,}031144}{3} < 0{,}011$$

а тогда, по (11),

$$\xi - x_2' < 0{,}12 \cdot 0{,}000121 < 0{,}000015,$$

так что приближаемся к требуемой точности. Следующее приближение:

$$x_2' = 0{,}30 - \frac{0{,}031144\ldots}{0{,}8533643\ldots - 4} = 0{,}30 + \frac{0{,}031144\ldots}{3{,}1466356\ldots} = 309897\ldots$$

округляем на пятом знаке «в сторону корня» $x_2' = 0{,}30990$. Так как $f(0{,}30990) = 0{,}000021\ldots > 0$, то это значение все же меньше корня. Погрешность же его, в силу (6), на деле оказывается

$$\xi - x_2' < \frac{0{,}000022}{3} < 0{,}00001,$$

так что, окончательно,

$$\xi = 0{,}30990_{\pm 0{,}00001}.$$

4) Уравнение

$$\operatorname{tg} x = x$$

имеет бесчисленное множество корней. Это можно сразу усмотреть из рис. 87 — по бесчисленному множеству точек пересечения графика тангенса $y = \operatorname{tg} x$ с прямой $y = x$. Предложим себе вычислить **наименьший положительный** корень этого уравнения, который содержится между $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

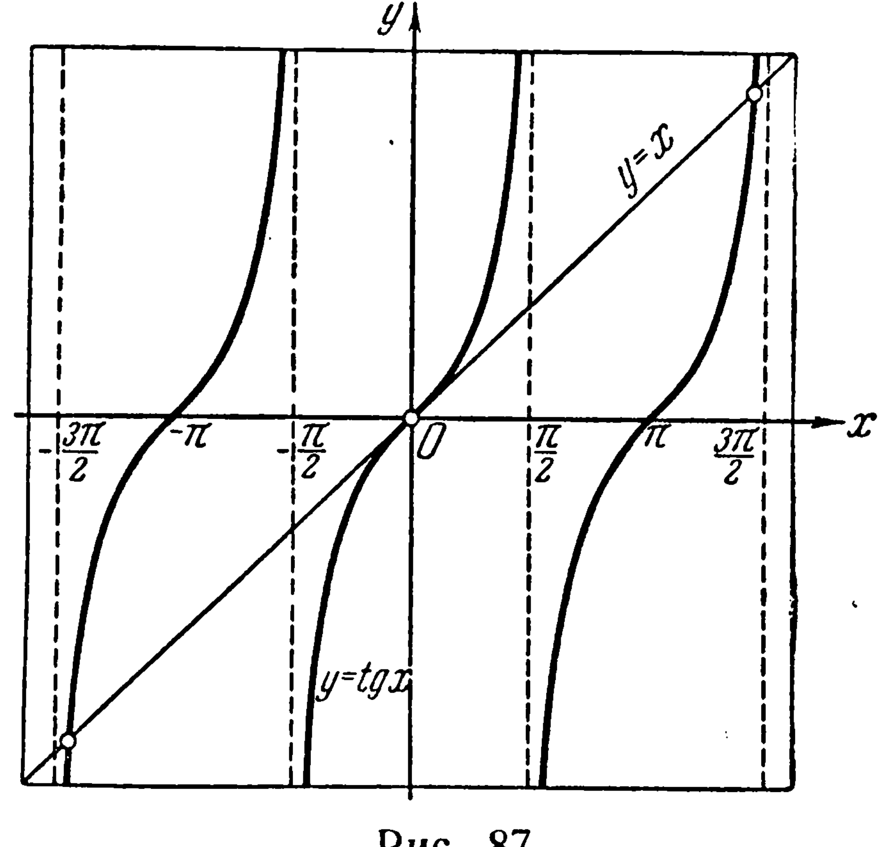


Рис. 87.

Так как при $x = \frac{3\pi}{2}$ тангенс обращается в бесконечность, то предложенное уравнение удобнее представить в виде $f(x) = \sin x - x \cdot \cos x = 0$. Имеем:

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{5\pi}{4}\right) > 0,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0;$$

$f'(x) = x \cdot \sin x < 0, \quad m > 2{,}7; \quad f''(x) = \sin x + x \cdot \cos x < 0$ (случай IV). Начинаем с $b = \frac{3\pi}{2} = 4{,}7123889\ldots$; получим

$$x_1' = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} = 4{,}7123889\ldots - 0{,}2122066\ldots$$

Здесь мы сталкиваемся со следующим обстоятельством: в таблицах тригонометрических величин (и их логарифмов) углы указываются в градусах, минутах.

и секундах; поэтому округление поправки 0,2122066... нам удобнее делать именно в этих единицах. Мы возьмем 12°10′, что отвечает несколько бóльшему числу 0,21223484... (округление в «сторону корня»), так что

$$x_1' = 4{,}5000406\ldots (257°50').$$

Далее,

$$f(x_1') = -\cos 12°10' + 4{,}5000406\ldots \cdot \sin 12°10' = -0{,}0291274\ldots,$$

$$f'(x_1') = -4{,}398962\ldots; \quad x_1' - \xi < \frac{0{,}03}{2{,}7} < 0{,}012.$$

Продолжаем:

$$x_2' = 4{,}5000406\ldots - \frac{0{,}0291274\ldots}{4{,}398962\ldots} = 4{,}5000406\ldots - 0{,}0066214\ldots;$$

округляем поправку до $0{,}0066177\ldots (22'45'')$ и берем

$$x_2' = 4{,}4934229\ldots (257°27'15'').$$

Так как $f(x_2') = -0{,}000059\ldots$, то

$$x_2' - \xi < \frac{0{,}00006}{2{,}7} < 0{,}0000223.$$

Таким образом

$$4{,}4934006\ldots < \xi < 4{,}4934229\ldots,$$

и можно положить

$$\xi = 4{,}4934 + 0{,}00003.$$

5) Сила метода Ньютона особенно проявляется, когда промежуток, содержащий корень, достаточно сужен. Вычислим в заключение с большой точностью, скажем, до $\frac{1}{10^{10}}$, корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$, исходя из промежутка (2; 2,1), в котором он содержится.

Здесь:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad f(2) = -1 < 0, \quad f(2{,}1) = 0{,}061 > 0,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \; f''(x) = 6x > 0 \quad (\text{при } 2 \leqslant x \leqslant 2{,}1).$$

(случай I). Легко подсчитать, что $m = 10$, $M < 12{,}6$, так что

$$\frac{M}{2m} < 0{,}63.$$

Начинаем с $b = 2{,}1$. По формуле (6): $b - \xi < \frac{0{,}061}{10} = 0{,}0061$. Теперь, пользуясь неравенством (11), мы заранее подсчитаем, какой точности *можно ждать* от x_1':

$$x_1' - \xi < 0{,}63 \cdot 0{,}0061^2 < 0{,}000024.$$

Поэтому число

$$x_1' = 2{,}1 - \frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}1 - 0{,}00543\ldots$$

округляем «в сторону корня» на пятом знаке: $x_1' = 2{,}1 - 0{,}00544 = 2{,}09456$. Так как $f(x_1') = f(2{,}09456) = 0{,}000095078690816$, то теперь, по формуле (6), можно точнее оценить погрешность:

$$x_1' - \xi < \frac{0{,}000095\ldots}{10} < 0{,}00001.$$

Переходя к x_2' и снова прибегнув к (11), подсчитаем наперед:

$$x_2' - \xi < 0{,}63 \cdot 0{,}00001^2 = 0{,}000000000063.$$

Поэтому число

$$x_2' = 2{,}09456 - \frac{0{,}000095078690816}{11{,}1615447808} = 2{,}09456 - 0{,}000008518416\ldots,$$

округленное на одиннадцатом знаке: $x_2' = 2{,}09456 - 0{,}00000851841 = 2{,}09455148159$, все же отличается от искомого корня меньше, чем на 0,00000000007. Итак,

$$2{,}09455148152 < \xi < 2{,}09455148159,$$

т. е. $\xi = 2{,}0945514815 + \frac{1}{10^{10}}$.

157. Комбинированный метод. Этот метод состоит в одновременном использовании как метода касательных, так и метода хорд.

Для определенности предположим, что мы имеем дело со случаем I. Приближенные значения x_1 и x_1' вычислим, как и выше, пользуясь формулами (2) и (8):

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

тогда, по доказанному,

$$a < x_1 < \xi < x_1' < b.$$

При следующем же шаге мы попросту заменяем в этих формулах a и b через x_1 и x_1':

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1'-x_1)\cdot f(x_1)}{f(x_1')-f(x_1)}, \quad x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

Этот процесс может быть продолжен неопределенно; имея два приближенных значения x_n и x_n', между которыми содержится корень ξ, мы переходим к следующей паре приближенных значений по формулам:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n'-x_n)\cdot f(x_n)}{f(x_n')-f(x_n)}, \quad x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n)}{f'(x_n')}.$$

Вторая из них тождественна с (10); первая же существенно отличается от (5) тем, что *точка b заменяется здесь точкой x_n', все более и более близкой к ξ*. Если неравенство (4) — для рассматриваемого случая — переписать в виде

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)} > \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

и положить в нем $a = x_n$ и $x = x_n'$, то легко усмотреть, что упомянутая замена b на x_n' *способствует лишь более быстрому приближению x_n к искомому корню* (геометрически это очевидно!).

Таким образом, при комбинированном методе мы получаем одновременно недостаточные и избыточные приближенные значения корня, которые стремятся к нему с разных сторон. В случаях I и IV x_n стремится к ξ слева, а x_n' — справа; в случаях же II и III, очевидно, будет наоборот. Величина $|x_n' - x_n|$ непосредственно позволяет судить о качестве достигнутого приближения — в этом удобство комбинированного метода.

Применение его осветим примерами.

158. Примеры и упражнения. Здесь предполагается пользование лишь *комбинированным методом*.

1) Найти три вещественных корня уравнения

$$f(x)=2x^3-x^2-7x+5=0$$

с точностью до 0,001.

Грубый график функции $y=f(x)$ помогает найти промежутки, в которых содержатся эти корни:

$$-2<\xi_1<-1,\quad 0<\xi_2<1,\quad 1<\xi_3<2;$$

проверить это легко по изменению знака функции.

(а) В промежутке $[-2, -1]$

$$f'(x)=6x^2-2x-7>0,\quad f''(x)=12x-2<0$$

случай (III). Так как $f(-2)=-1<0$, $f(-1)=9>0$, то правило *Ньютона* надлежит применять к *левым* концам промежутков. Имеем: $f'(-2)=21$ и

$$x_1'=-2-\frac{-1}{21}=-1,952\ \ldots,$$

$$x_1=-1-\frac{9}{9-(-1)}=-1,9.$$

Округляя значение x_1' в сторону уменьшения, получим число $-1,96<\xi_1$. Если же округлить его в сторону увеличения, т. е. в сторону корня, то получим число $-1,95$; но $f(-1,95)=0,01775>0$, т. е. в этом случае мы перескочили через корень. Это обстоятельство выгодно для нас, ибо дает возможность сузить промежуток, содержащий корень, и, отбросив прежнее значение x_1, положить

$$x_1'=-1,96,\quad x_1=-1,95.$$

Далее, имеем:

$$f(-1,96)=-0,180672,\quad f'(-1,96)=19,9696,$$

$$x_2'=-1,96+\frac{0,180672}{19,9696}=-1,96+0,00904\ \ldots=-1,95095\ \ldots,$$

$$x_2=-1,95-\frac{0,01\cdot 0,01775}{0,01775+0,180672}=-1,95-0,00089\ \ldots=-1,95089\ \ldots$$

Поскольку ξ_1 должно быть заключено между этими границами, то ясно, что

$$\xi_1=-1,9509_{\pm 0,0001}$$

(так что требуемая точность превзойдена!).

(б) В промежутке $[0, 1]$ первая производная $f'(x)$ сохраняет знак минус, но вторая производная $f''(x)$ меняет знак, обращаясь в нуль в точке $x=\frac{1}{6}$. Это обстоятельство заставляет предварительно еще сузить промежуток. Испытывая значения $x=0,5$, получаем: $f(0,5)=1,5>0$; так как $f(1)=-1<0$, то ξ_2 содержится внутри промежутка $[0,5, 1]$, где $f''(x)$ сохраняет знак плюс (случай II). И здесь правило *Ньютона* применяем к левым концам. *Имеем*:

$$x_1'=0,5+\frac{1,5}{6,5}=0,7307=0,74,\quad x_1=1-\frac{0,5}{2,5}=0,80.$$

Округление x_1' в сторону корня не привело к перескакиванию через корень, ибо $f(0,74)=0,082848>0$. Наконец,

$$x_2'=0,74+\frac{0,082848}{5,1944}=0,755\ \ldots,$$

$$x_2=0,80-\frac{0,01296}{0,298848}=0,756\ \ldots,$$

так, что $0{,}755\ldots<\xi_2<0{,}756\ldots$, и можно положить

$$\xi_2=0{,}756_{\pm 0{,}001}.$$

(в) В промежутке $[1, 2]$ вторая производная сохраняет знак плюс, но первая производная меняет знак, обращаясь в 0 при

$$x=\frac{1+\sqrt{43}}{6}\doteq 1{,}26.$$

Испытываем 1,5: $f(1{,}5)=-1$, в то время как $f(2)=3$, так что $1{,}5<\xi_3<2$; $f'(x)$ в этом промежутке имеет знак плюс (случай I). Имеем:

$$x_1=1{,}5+\frac{1}{8}\doteq 1{,}6,\quad x_1'=2-\frac{3}{13}\doteq 1{,}7;$$

через корень и здесь не перескочили, ибо $f(1{,}7)=0{,}036$. Наконец,

$$x_2=1{,}6+\frac{0{,}0568}{0{,}604}=1{,}6+0{,}094\ldots=1{,}694\ldots,$$

$$x_2'=1{,}7-\frac{0{,}036}{6{,}94}=1{,}7-0{,}005\ldots=1{,}694\ldots,$$

так что и $\xi_3=1{,}694_{+0{,}001}$.

Замечание. Так как сумма корней, по известной теореме алгебры, должна равняться 0,5, то этим можно воспользоваться для проверки.

2) Уравнение

$$f(x)=x^4-3x^2+75x-10\,000=0$$

имеет два вещественных корня: один между -11 и -10, а другой — между 9 и 10. Вычислить их с точностью до 0,00001.

(а) В промежутке $[-11, -10]$

$$f'(x)=4x^3-6x+75<0,\quad f''(x)=12x^2-6>0$$

(случай II). Получаем:

$$x_1'=-11+\frac{3453}{5183}=-10{,}33\ldots\doteq-10{,}3,$$

$$x_1=-10-\frac{1050}{4503}=-10{,}23\ldots\doteq-10{,}2;$$

в первом случае мы округлили в сторону корня, но через него не перескочили. Далее,

$$x_2'=-10{,}3+\frac{164{,}3181}{4234{,}108}=-10{,}262\ldots\doteq-10{,}262,$$

$$x_2=-10{,}2-\frac{25{,}27984}{417{,}1165}=-10{,}260\ldots\doteq-10{,}260$$

(то же замечание). Наконец,

$$x_3'=-10{,}262+\frac{4{,}334569118736}{4186{,}137218912}=-10{,}262+0{,}0010354\ldots=$$
$$=-10{,}2609645\ldots,$$

$$x_3=-10{,}260-\frac{0{,}00807038048}{8{,}369759358736}=-10{,}260-0{,}0009642\ldots=$$
$$=-10{,}2609642\ldots,$$

так что

$$\xi_1=-10{,}260964_{-0{,}000001}$$

(даже с большей точностью, чем требовалось).

(б) В промежутке [9, 10] $f'(x)>0$ и $f''(x)>0$ (случай I). Здесь:

$$x_1=9+\frac{3007}{3457}=9+0{,}869\ldots \doteq 9{,}87 \text{ (в сторону корня!)}.$$

$$x_1'=10-\frac{450}{4015}=10-0{,}112\ldots \doteq 9{,}89;$$

$$x_2=9{,}87+\frac{1{,}2389658878}{77{,}4689008}=9{,}87+0{,}01599\ldots=9{,}88599\ \ldots,$$

$$x_2'=9{,}89-\frac{15{,}52060641}{3885{,}106676}=9{,}89-0{,}003993\ldots=9{,}886006\ldots$$

так что, очевидно,

$$\xi_2=9{,}88600_{\pm\,0{,}00001}.$$

3) Рассмотрим уравнение

$$f(x)=x\cdot\sin x-0{,}5=0.$$

Построив графики функций $y=\sin x$ и $y=\frac{0{,}5}{x}$ (рис. 88), видим, что они пересекаются в бесчисленном множестве точек, так что наше уравнение имеет бесчисленное множество корней. По графику видно также, что наименьший положительный корень ξ близок к 0,7; поставим себе задачей вычислить его

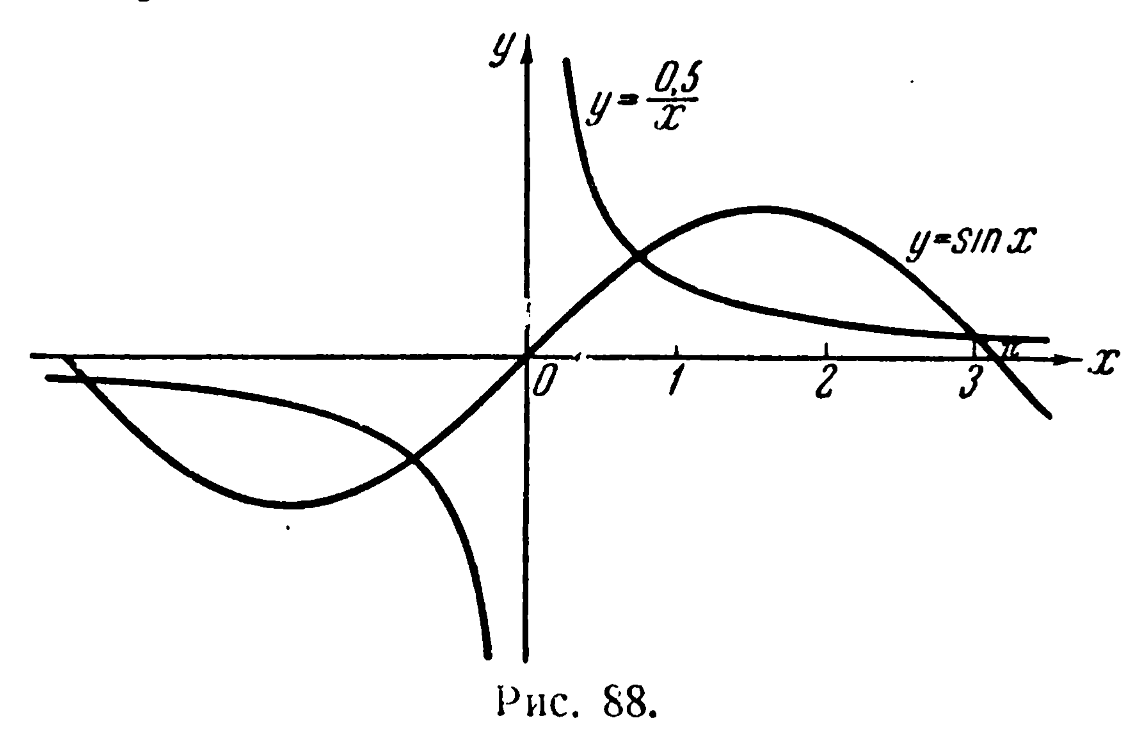


Рис. 88.

с точностью до 0,000001. [Здесь следует иметь в виду замечание об округлении в долях градуса, которое было сделано по поводу задачи 4) в **156**.]

Подставляя в функцию $f(x)$ значения

$$a=0{,}6981317\ldots\ (40^\circ) \text{ и } b=0{,}7853982\ldots\ (45^\circ),$$

получаем в первом случае отрицательный результат, а во втором — положительный, значит, $a<\xi<b$. Обе производные $f'(x)$, $f''(x)$ в этом промежутке имеют знак плюс (случай I).

Схема вычислений:

$$x_1=0{,}6981317\ldots+0{,}0419512\ldots,$$

$$x_1'=0{,}7853982\ldots-0{,}0438510\ldots;$$

первую поправку «округляем» до $0{,}0418879\ldots(2^\circ24')$, а вторую — до $0{,}0439231\ldots\ (2^\circ31')$, так что окончательно

$$x_1=0{,}7400196\ldots\ (42^\circ24'),\quad x_1'=0{,}7414741\ldots\ (42^\circ29').$$

Далее,

$$x_2 = 0{,}7400196\ldots + 0{,}0008211\ldots = 0{,}7408407\ldots,$$
$$x_2' = 0{,}7414741\ldots - 0{,}0006329\ldots = 0{,}7408412\ldots,$$

откуда и получаем с требуемой точностью:

$$\xi = 0{,}740841_{\pm\,0{,}0000005}.$$

4) В заключение вернемся к уравнению

$$f(x) = x^4 - x - 1 = 0.$$

Мы видели в **81**, что оно имеет корень ξ между $a = 1{,}22$ и $b = 1{,}23$. Установить, какую точность в определении этого корня дает всего лишь двукратное применение комбинированного метода.

Схема вычислений (случай I):

$$x_1 = 1{,}22 + \frac{0{,}0000466544}{0{,}06353115} = 1{,}22073\ldots = 1{,}2207,$$

$$x_1' = 1{,}23 - \frac{0{,}05886641}{6{,}443468} = 1{,}22086\ldots = 1{,}2209;$$

$$x_2 = 1{,}2207 + \frac{0{,}0000000055337605983\,98}{0{,}0012555380\,12096} = 1{,}22074407\ldots,$$

$$x_2' = 1{,}2209 - \frac{0{,}0009788499821761}{6{,}279478581316} = 1{,}2207441\ldots$$

Таким образом,

$$\xi = 1{,}2207441_{\pm\,0{,}0000001}.$$

ГЛАВА ПЯТАЯ
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

159. Функциональная зависимость между переменными. Примеры. До сих пор мы изучали совместное изменение *двух* переменных, из которых одна *зависела* от другой: значением *независимой* переменной уже вполне определялось значение *зависимой* переменной или функции. В науке и в жизни нередки, однако, случаи, когда *независимых переменных* оказывается несколько, и для определения значения функции необходимо предварительно установить значения, совместно принимаемые всеми этими независимыми переменными.

1) Так, например, объем V кругового цилиндра есть *функция* от радиуса R его основания и от высоты H; зависимость между этими переменными выражается формулой

$$V = \pi R^2 H,$$

которая дает возможность, зная значения *независимых переменных* R и H, установить соответствующее значение V.

Объем V усеченного конуса, очевидно, является функцией от *трех* независимых переменных — радиусов R и r обоих его оснований и высоты H, по формуле

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

2) По закону *Ома*, напряжение V в цепи электрического тока связано с сопротивлением R цепи и с силой тока I зависимостью $V = RI$. Если V и R считать данными, то отсюда определится I как *функция* от V и R:

$$I = \frac{V}{R}.$$

3) Пусть температура массы газа, находящегося под поршнем цилиндра, не постоянна; тогда объем V и давление p одного моля газа связаны с ее (абсолютной) температурой T, так называемой, формулой *Клапейрона*:

$$pV = RT \quad (R = \text{const}).$$

Отсюда, считая, например, V и T независимыми переменными, функцию p можно выразить через них так:

$$p=\frac{RT}{V}.$$

4) Изучая физическое состояние какого-нибудь тела, часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы: плотность, температура, электрический потенциал и т. п. Все эти величины суть «функции точки» или, если угодно, функции от координат x, y, z точки. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется еще и время, t. В этом случае мы имеем дело с функциями от четырех независимых переменных.

Число подобных примеров читатель и сам может произвольно увеличить.

Уточнение понятия функции в случае нескольких независимых переменных начнем с простейшего случая, когда этих переменных две.

160. Функции двух переменных и области их определения. Говоря об изменении двух независимых переменных x и y, мы должны всякий раз указывать, какие пары значений (x, y) они могут принимать совместно; множество $\mathcal{M}$ этих пар и будет областью изменения переменных x, y.

Самое определение понятия функции дается в тех же выражениях, что и для случая одной независимой переменной:

Переменная z (с областью изменения $\mathcal{Z}$) называется функцией независимых переменных x, y в множестве $\mathcal{M}$, если каждой паре (x, y) их значений из $\mathcal{M}$ — по некоторому правилу или закону — ставится в соответствие одно определенное значение z (из $\mathcal{Z}$).

Здесь имеется в виду однозначная функция; легко распространить это определение и на случай многозначной функции.

Множество $\mathcal{M}$, о котором выше шла речь, и есть область определения функции. Сами переменные x, y, — по отношению к их функции z — называются ее аргументами. Функциональная зависимость между z и x, y обозначается, аналогично случаю одной независимой переменной, так:

$$z=f(x,y),\quad z=\varphi(x,y),\quad z=z(x,y) \text{ и т. п.}$$

Если пара (x_0, y_0) взята из $\mathcal{M}$, то $f(x_0, y_0)$ означает то частное (числовое) значение функции $f(x, y)$, которое она принимает, когда $x=x_0$, $y=y_0$.

Приведем несколько примеров функций, заданных аналитически — формулами, с указанием их областей определения. Формулы:

$$1)\ z=xy \text{ и } 2)\ z=x^2+y^2$$

определяют функции для всех пар (x, y) без исключения. Формулы:

$$3)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\qquad 4)\ z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

годятся (если мы хотим иметь дело с конечными вещественными значениями z) лишь для тех пар (x, y), которые удовлетворяют, соответственно, неравенству

$$x^2+y^2\leqslant 1 \text{ или } x^2+y^2<1.$$

Формулой:

$$5)\ z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$$

функция определена для тех значений x и y, которые порознь удовлетворяют неравенствам

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b.$$

Во всех этих случаях мы указывали наиболее широкую — *естественную* [46, 2°] — область применения формулы.

Рассмотрим теперь такой пример.

6) Пусть стороны треугольника произвольно изменяются, с тем лишь ограничением, что периметр его сохраняет постоянную величину $2p$. Если две стороны его обозначить через x и y, то третья сторона будет $2p-x-y$, так что треугольник вполне определяется сторонами x и y. Как зависит от них площадь z треугольника?

По формуле *Герона* эта площадь выразится так:

$$z=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Что же касается *области определения* $\mathcal{M}$ этой функции, то она обусловливается, на этот раз, тем конкретным вопросом, который привел к рассмотрению функции. Так как длина каждой стороны треугольника есть положительное число, меньшее полупериметра, то должны выполняться неравенства

$$0<x<p,\quad 0<y<p,\quad x+y>p;$$

они и характеризуют область $\mathcal{M}$*).

Таким образом, в то время как для функции одной переменной стандартной областью изменения аргумента являлся (конечный или бесконечный) *промежуток*, в случае функции двух переменных мы уже сталкиваемся с большим разнообразием и сложностью возможных (и естественных) областей изменения аргументов.

Рассмотрение этих областей значительно облегчается их геометрической интерпретацией. Если взять на плоскости две взаимно перпендикулярные оси и обычным образом откладывать на них значения x и y, то, как известно, каждой парой (x, y) однозначно определяется *точка* на плоскости, имеющая эти значения своими координатами, и обратно.

Тогда для характеристики тех *пар* (x, y), для которых определена функция, проще всего указать, какая фигура на плоскости xy заполняется соответствующими точками.

---

*) Несмотря на то, что полученная формула *сама по себе* сохраняет смысл и в более широкой области, например, для $x>p$ и $y>p$.

Так, говорят, что функции 1) и 2) определены во всей плоскости, функции 3) и 4) — в круге, соответственно, замкнутом (т. е. включающем окружность) или открытом (без окружности) (рис. 89); функция 5) определена в прямоугольнике (рис. 90); наконец, функция 6) рассматривается в открытом треугольнике (рис. 91).

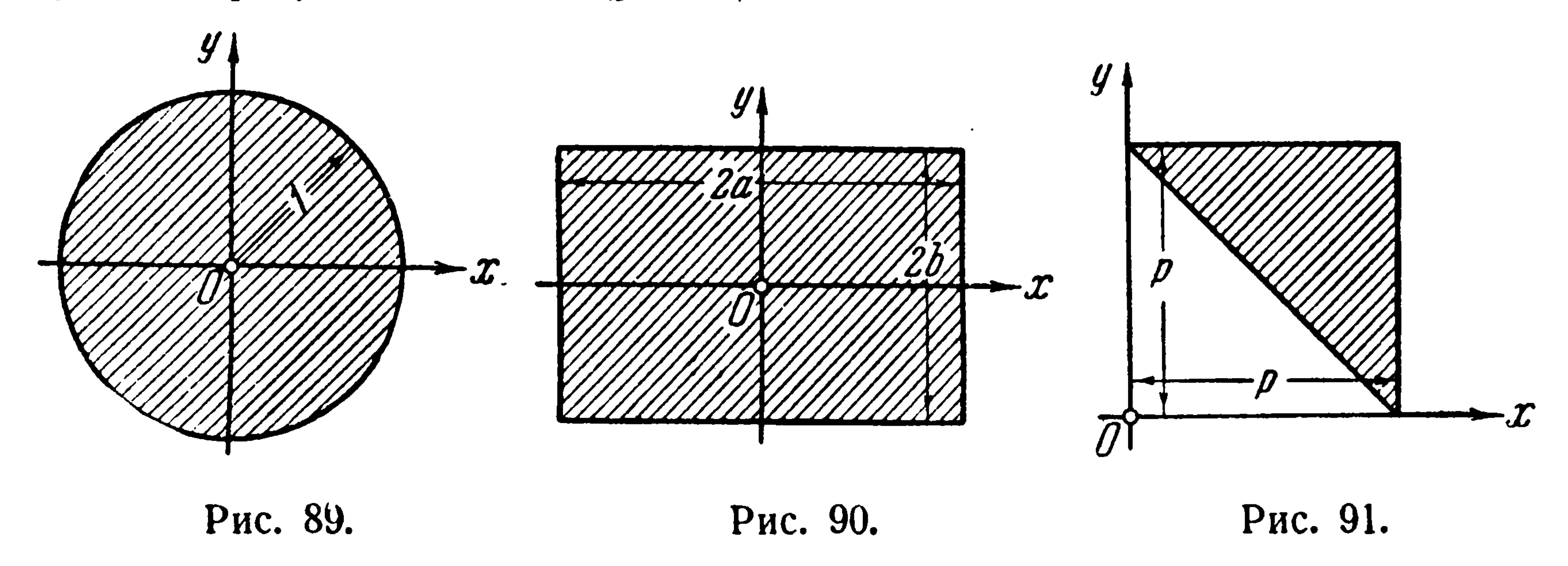


Рис. 89. Рис. 90. Рис. 91.

Эта геометрическая интерпретация настолько удобна, что обычно самые пары чисел (x, y) называют «точками», а множество таких «точек», отвечающее тем или иным геометрическим образам, называют по имени этих образов. Так, множество «точек» или пар (x, y), для которых выполняются неравенства

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

есть «прямоугольник», измерения которого равны $b-a$ и $d-c$; его будем обозначать символом $[a, b; c, d]$, сходным с обозначением промежутка. Множество «точек» или пар (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2,$$

есть «круг» радиуса r, с центром в «точке» (α, β), и т. п.

Наподобие того, как функция $y=f(x)$ геометрически иллюстрировалась своим графиком [47], можно геометрически истолковать и уравнение $z=f(x, y)$. Возьмем в пространстве прямоугольную систему координатных осей x, y, z; изобразим на плоскости xy область $\mathcal{M}$ изменения переменных x и y, наконец, в каждой точке $M(x, y)$ этой области восставим перпендикуляр к плоскости xy и отложим на нем значение $z=f(x, y)$. Геометрическое место полученных таким образом точек и явится своего рода пространственным графиком нашей функции. Это будет, вообще говоря, некоторая поверхность; в свою очередь, равенство $z=f(x, y)$ называется уравнением поверхности.

Для примера на рис. 92, 93 и 94 изображены геометрические образы функций:

$$z=xy, \quad z=x^2+y^2,$$
$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Первый из них представляет собой гиперболический параболоид, второй — параболоид вращения, а третий — полусферу.

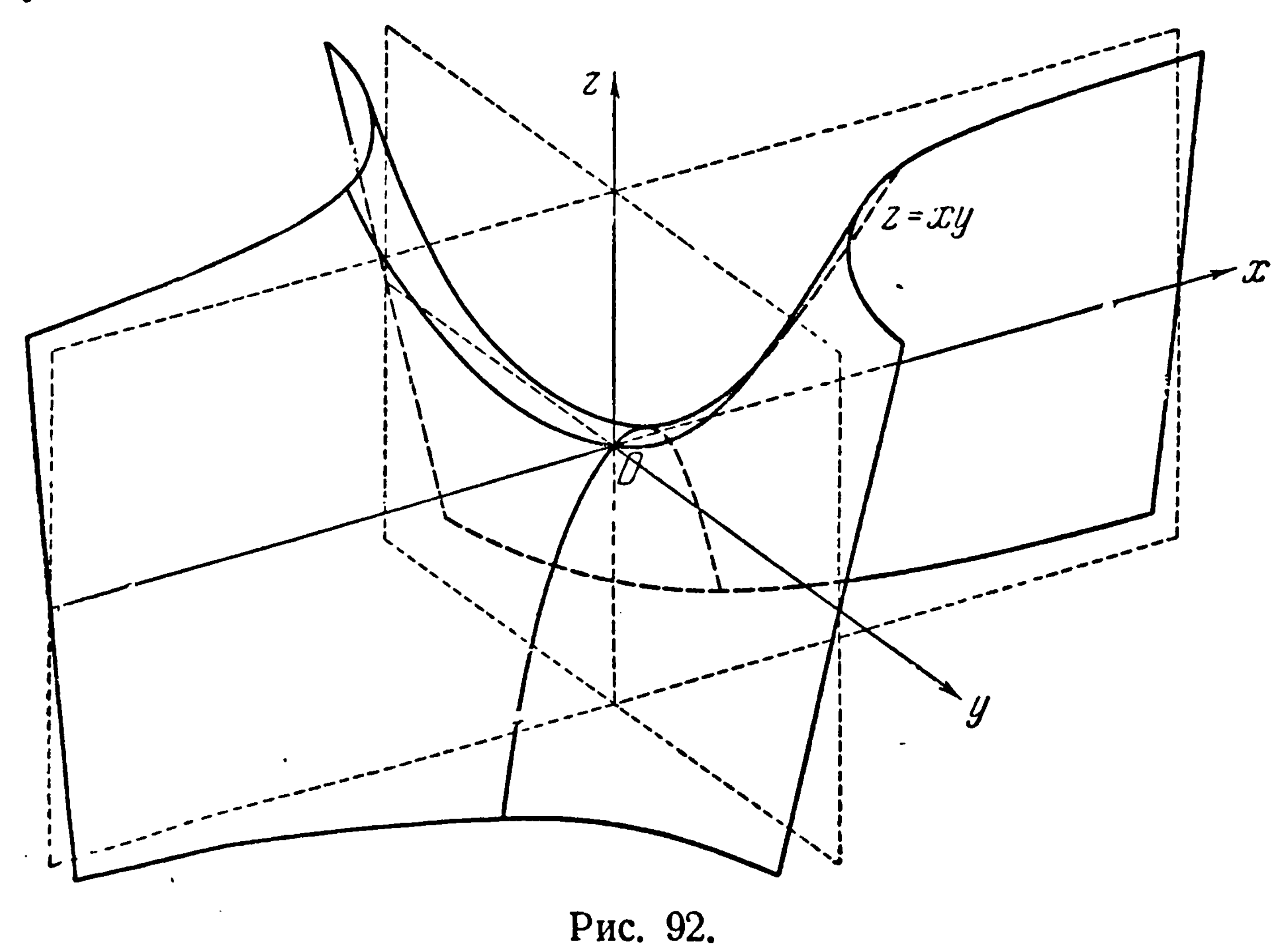


Рис. 92.

В заключение упомянем, что иногда приходится рассматривать переменную $x_{m,n}$, значения которой занумерованы двумя натуральными значками m и n (каждый из которых, независимо от другого,

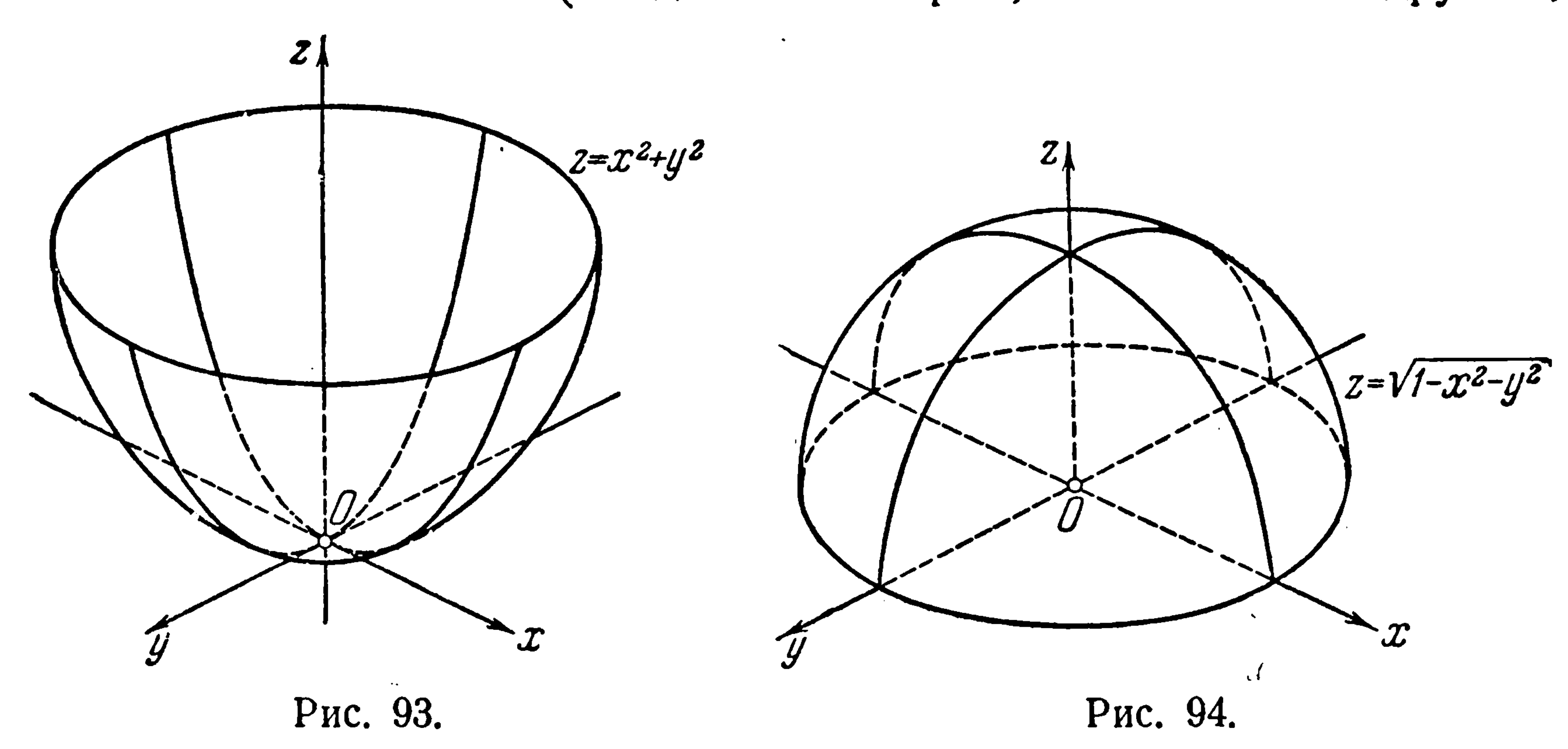


Рис. 93. Рис. 94.

пробегает натуральный ряд чисел). Такая переменная представляет собой, в некотором смысле, обобщение варианты x_n.

Можно положить, например,

$$x_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!},\quad x_{m,n}=\frac{1}{m^2+n^2},\quad x_{m,n}=\frac{(m+1)\cdot n}{m\cdot(n+1)}$$

и т. п.

По сути дела, значки m и n следует рассматривать как независимые переменные, а переменную $x_{m,n}$ — как функцию от них. Область изменения независимых переменных в данном случае геометрически иллюстрируется своеобразной точечной квадратной сеткой в первом координатном угле.

161. Арифметическое n-мерное пространство. Переходя к функциям от n независимых переменных (при $n \geqslant 3$), мы сначала остановимся на системах совместных значений этих переменных.

В случае $n = 3$ такая система из трех чисел (x, y, z) как ясно читателю, еще может быть геометрически истолкована как точка пространства, а множество таких троек — как часть пространства или геометрическое тело. Но при $n > 3$ возможности непосредственной геометрической интерпретации уже нет, ввиду отсутствия у нас интуиции пространства с числом измерений, бо́льшим трех.

Тем не менее, желая распространить геометрические методы (оказавшиеся плодотворными для функций двух и трех переменных) и на теорию функций большего числа переменных, в анализе вводят понятие n-мерного «пространства» и при $n > 3$.

Назовем (n-мерной) «точкой» систему из n вещественных чисел: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *); сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами этой «точки» M. Множество всех мыслимых n-мерных «точек» составляет n-мерное «пространство» (которое иногда называют арифметическим).

Целесообразно ввести понятие «расстояния» $\overline{MM'}$ между двумя (n-мерными) «точками»

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Подражая известной из аналитической геометрии формуле, полагают

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2} = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}; \quad (1)$$

при $n = 2$ или 3 это «расстояние» совпадает с обычным расстоянием между двумя соответственными геометрическими точками.

Если взять еще одну «точку»

$$M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n),$$

*) Имея дело с неопределенным числом переменных, представляется удобным обозначать их не различными буквами, но одной и той же буквой лишь с различными номерами. Таким образом, x_i означает (вразрез с прежней практикой) не i-е значение некоей переменной, а самое i-ю переменную, которая сама по себе принимает различные значения.

то, как можно доказать, для «расстояний» $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ и $\overline{MM''}$ выполняется неравенство

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \tag{2}$$

напоминающее известную теорему геометрии: «сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон».

Действительно, для любого набора вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место неравенство*)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Если положить здесь

$$a_i = x_i' - x_i, \quad b_i = x_i'' - x_i', \quad \text{так что} \quad a_i + b_i = x_i'' - x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2},$$

что равносильно (2). Таким образом, что существенное свойство расстояния оказывается налицо и в нашем «пространстве».

В n-мерном «пространстве» можно рассматривать и непрерывные «кривые».

Известно [106], что уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

---

*) Это неравенство есть не что иное как частный случай уже встретившегося нам неравенства Минковского [133 (7)] при $k = 2$. Если возвести обе части его в квадрат и опустить в обеих частях равные члены, то оно сведется к тоже известному неравенству Коши [133 (5а)]. Приведем совершенно элементарное доказательство этого последнего неравенства, а вместе с тем — и неравенства в тексте.

Квадратный трехчлен

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot x^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdot x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

очевидно, не принимает отрицательных значений. В таком случае он не может иметь двух различных вещественных корней, и выражение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right\}^2$$

должно быть неотрицательным, а это равносильно неравенству Коши.

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ суть функции от параметра t, непрерывные в некотором промежутке $[t', t'']$, — выражают на плоскости непрерывную кривую. Аналогично, но лишь с помощью трех непрерывных функций:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t) \quad (t'\leqslant t\leqslant t''),$$

выражается непрерывная кривая в (обыкновенном) пространстве. Подражая этому, рассмотрим теперь n непрерывных функций от t

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t), \ldots,\ x_n=\varphi_n(t) \quad (t'\leqslant t\leqslant t'').$$

Тогда множество «точек»

$$(\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

получаемых при различных значениях параметра t, и составляет непрерывную «кривую» в n-мерном «пространстве». Положив

$$x_1'=\varphi_1(t'), \ldots, x_n'=\varphi_n(t');\ x_1''=\varphi_1(t''), \ldots, x_n''=\varphi_n(t''),$$

можно сказать, что эта «кривая» соединяет «точки»

$$M'(x_1', \ldots, x_n') \text{ и } M''(x_1'', \ldots, x_n'').$$

В том случае, когда все функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ оказываются линейными, «кривая» переходит в «прямую»:

$$x_1=\alpha_1 t+\beta_1, \ldots, x_n=\alpha_n t+\beta_n;$$

здесь коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ предполагаются необращающимися зараз в 0, а t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Будем считать «точки» ее следующими одна за другой в порядке возрастания параметра; если $t'<t<t''$, то из соответствующих «точек» M', M, M'' именно «точка» M лежит между двумя другими, так как следует за M' и предшествует M''. При этих условиях, как легко показать, расстояния между ними удовлетворяют соотношению:

$$\overline{M'M''}=\overline{M'M}+\overline{MM''},$$

что является характерным для прямой в обычном пространстве.

Уравнения «прямой», проходящей через две заданные «точки»

$$M'(x_1', \ldots, x_n') \quad \text{и} \quad M''(x_1'', \ldots, x_n''),$$

очевидно, могут быть написаны в виде:

$$x_1=x_1'+t(x_1''-x_1'), \ldots, x_n=x_n'+t(x_n''-x_n')$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

причем сами «точки» M' и M'' получаются отсюда при $t=0$ и 1. Если же изменять t только от 0 до 1, то получится «прямолинейный отрезок», соединяющий эти «точки».

«Кривая», состоящая из конечного числа «прямолинейных отрезков», называется «ломаной».

162. Примеры областей в n-мерном пространстве. Обратимся теперь к рассмотрению некоторых примеров «тел» и «областей» в n-мерном «пространстве».

1) Множество «точек» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ координаты которых независимо одна от другой удовлетворяют неравенствам

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$

называется (n-мерным) «прямоугольным параллелепипедом» и обозначается так:

$$[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots;\ a_n, b_n].$$

При $n=2$ отсюда, в частности, получается тот «прямоугольник», о котором уже была речь в n° **160**; трехмерному «параллелепипеду» отвечает в пространстве обыкновенный прямоугольный параллелепипед.

Если в написанных соотношениях исключить равенство:

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \ldots, \quad a_n < x_n < b_n,$$

то этим определится открытый «прямоугольный параллелепипед»

$$(a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ldots;\ a_n, b_n),$$

в отличие от которого рассмотренный выше называется замкнутым *). Разности $b_1-a_1, b_2-a_2, \ldots, b_n-a_n$ называют измерениями обоих параллелепипедов, а точку

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$$

— их центром.

Окрестностью «точки» $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется любой открытый «параллелепипед»:

$$(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1;\ x_2^0-\delta_2, x_2^0+\delta_2;\ldots;\ x_n^0-\delta_n, x_n^0+\delta_n) \qquad (3)$$

$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0)$ с центром в точке M_0; чаще всего это будет «куб»:

$$(x_1^0-\delta, x_1^0+\delta;\ x_2^0-\delta, x_2^0+\delta;\ldots;\ x_n^0-\delta, x_n^0+\delta)$$

$\delta > 0$), все измерения которого равны (2δ)

2) Рассмотрим множество «точек» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ldots, \ x_n \geqslant 0, \ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant h \quad (h>0).$$

При $n=2$ соответствующим этому множеству геометрическим образом будет равнобедренный прямоугольный треугольник, а при

*) Можно рассматривать также и бесконечный «параллелепипед», для которого определяющие его промежутки (или некоторые из них) оказываются бесконечными.

Говоря об n-мерном «параллелепипеде», если не сделано оговорок, мы всегда будем иметь в виду конечный «параллелепипед».

$n=3$ — тетраэдр (рис. 95). В общем случае его называют симплексом*) (именно — замкнутым, в отличие от открытого, который получится, если в написанных соотношениях исключить равенство).

3) Наконец, множество «точек» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемое неравенством

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2 \leqslant r^2 \quad (\text{или } < r^2),$$

если $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ есть постоянная «точка», а r — постоянное положительное число, образует замкнутую (или открытую) n-мерную «сферу» радиуса r, с центром в «точке» M_0. Иными словами «сфера» есть множество «точек» M, «расстояние» которых от некоторой постоянной «точки» M_0 не превосходит (или меньше) r. Само собой ясно, что этой «сфере» при $n=2$ отвечает круг [ср. **150**], а при $n=3$ — обыкновенная сфера.

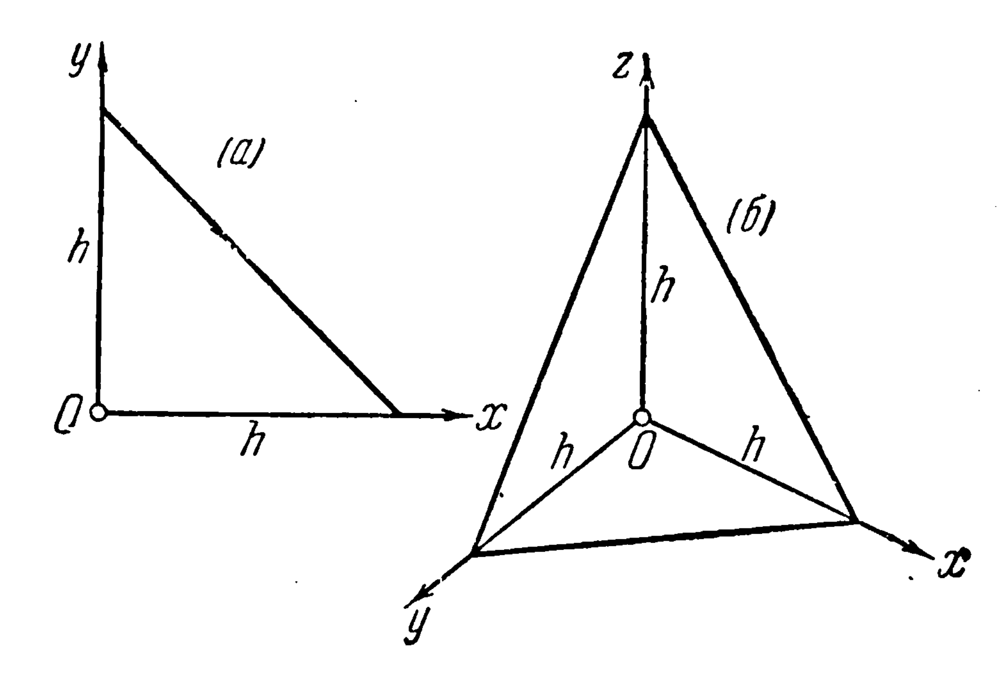


Рис. 95.

Открытую «сферу» любого радиуса $r>0$ с центром в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ можно также рассматривать как окрестность этой точки; в отличие от той («параллелепипедальной») окрестности, которую мы ввели раньше, эту окрестность будем называть «сферической». Полезно раз навсегда дать себе отчет в том, что если «точка» M_0 окружена окрестностью одного из указанных двух типов, то ее можно окружить и окрестностью второго типа так, чтобы эта окрестность содержалась в первой.

Пусть сначала задан «параллелепипед» (3) с центром в «точке» M_0. Достаточно взять открытую «сферу» с тем же центром и радиусом r, меньшим всех δ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, чтобы эта сфера уже содержалась в названном «параллелепипеде». Действительно, для любой «точки» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой «сферы» будем иметь (при каждом $i=1, 2, \ldots, n$):

$$|x_i-x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^0)^2}=\overline{MM_0}<r<\delta_i$$

или

$$x_i^0-\delta_i<x_i<x_i^0+\delta_i,$$

так что эта точка принадлежит заданному «параллелепипеду».

*) По-латыни simplex означает «простой»: симплекс представляет собой, действительно, простейшее многогранное «тело», с наименьшим возможным для данного пространства числом граней.

Обратно, если задана «сфера» радиуса r с центром в M_0, то «параллелепипед» (3) в ней содержится, например, при $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=\frac{r}{\sqrt{n}}$. Это следует из того, что любая «точка» $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$ этого «параллелепипеда» отстоит от «точки» M_0 на «расстояние»

$$\overline{MM_0}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^0)^2}<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2}=r$$

и, следовательно, принадлежит заданной «сфере».

163. Общее определение открытой и замкнутой области. Назовем «точку» $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ в н у т р е н н е й «точкой» множества $\mathcal{M}$ (в n-мерном «пространстве»), если она принадлежит множеству $\mathcal{M}$ вместе с некоторой достаточно малой ее окрестностью.

Из утверждения, доказанного в конце предыдущего n°, следует с очевидностью, что б е з р а з л и ч н о, какого типа окрестности здесь иметь в виду — «параллелепипедальные» или «сферические».

Для о т к р ы т о г о «прямоугольного параллелепипеда»

$$(a_1,\ b_1; \ldots;\ a_n,\ b_n) \tag{4}$$

каждая его «точка» является внутренней. Действительно, если

$$a_1<x_1'<b_1, \ldots, a_n<x_n'<b_n,$$

то легко найти такое $\delta>0$, чтобы было

$$a_1<x_1'-\delta<x_1'+\delta<b_1, \ldots, a_n<x_n'-\delta<x_n'+\delta<b_n.$$

Аналогично, в случае о т к р ы т о й «сферы» радиуса r с центром в «точке» M_0, каждая принадлежащая ей «точка» M' также является для нее внутренней. Если взять ρ так, что

$$0<\rho<r-\overline{M'M_0},$$

и описать вокруг M' «сферу» этим радиусом ρ, то она целиком будет содержаться в исходной «сфере»: лишь только $\overline{MM'}<\rho$, тотчас же **(160**, (2)]

$$\overline{MM_0}\leqslant\overline{MM'}+\overline{M'M_0}<\rho+\overline{M'M_0}<r,$$

так что «точка» M принадлежит исходной «сфере».

Такое же заключение можно сделать и об о т к р ы т о м симплексе:

$$x_1>0, \ldots, x_n>0,\ x_1+\ldots+x_n<h \quad (h>0).$$

Подобного рода *множество, целиком состоящее из в н у т р е н н и х «точек», будем называть о т к р ы т о й «областью».*

Таким образом, открытый «прямоугольный параллелепипед», открытая «сфера», открытый симплекс — служат примерами открытых «областей».

Обобщим теперь понятие точки сгущения [52] на случай множества $\mathscr{M}$ в n-мерном «пространстве». *«Точка» M_0 называется «точкой сгущения» множества $\mathscr{M}$, если в каждой ее окрестности* (и снова — безразлично, какого типа) *содержится хоть одна «точка» множества $\mathscr{M}$, отличная от M_0.*

«Точки сгущения» для открытой «области», не принадлежащей ей, называются пограничными «точками» этой «области». Пограничные «точки» в их совокупности образуют «границу области». *Открытая «область» вместе с «границей» ее называется замкнутой «областью».*

Нетрудно видеть, что для открытого «параллелепипеда» (4) пограничными будут «точки» $M(x_1, \ldots, x_n)$, для которых

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$

причем хоть в одном случае имеет место именно равенство.

Точно так же, для рассмотренной выше открытой «сферы» пограничными будут «точки» M, для которых в точности $\overline{MM_0} = r$.

Наконец, для открытого симплекса (5) пограничными являются «точки» $M(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \; x_1 + \ldots + x_n \leqslant h,$$

причем хоть однажды осуществляется равенство.

Таким образом, замкнутый «прямоугольный параллелепипед», замкнутая «сфера» и замкнутый симплекс дают примеры замкнутых «областей».

Впредь, говоря об «области», открытой или замкнутой, мы всегда будем иметь в виду «область» в указанном здесь специальном смысле.

Установим теперь, что *замкнутой «области» принадлежат уже все ее «точки» сгущения.*

Пусть даны замкнутая «область» $\overline{\mathscr{D}}$ и «точка» M_0 вне ее. Докажем, что тогда M_0 не будет «точкой» сгущения для $\overline{\mathscr{D}}$.

Замкнутая «область» $\overline{\mathscr{D}}$ получается из некоторой открытой «области» $\mathscr{D}$ путем присоединения к ней ее «границы» $\mathscr{E}$. Очевидно, M_0 не является «точкой» сгущения для $\mathscr{D}$; следовательно, M_0 можно окружить такой открытой «сферой», чтобы в ней вовсе не содержалось «точек» из $\mathscr{D}$. Но тогда в ней не может быть и «точек» из $\mathscr{E}$: ведь, если бы какая-нибудь «точка M' из $\mathscr{E}$ в нее попала, то в ней содержалась бы целиком и некоторая окрестность «точки» M', и в этой окрестности не было бы ни одной точки из $\mathscr{D}$, вопреки определению «точки сгущения» и множества $\mathscr{E}$ как «границы». Итак, в упомянутой «сфере» нет «точек» из $\overline{\mathscr{D}}$, что и доказывает наше утверждение.

Вообще «точечное» множество $\mathscr{M}$, содержащее все свои «точки» сгущения, называют замкнутым. Таким образом, замкнутая «область» есть частный случай замкнутого множества.

Введем еще ряд терминов. Множество «точек» $\mathscr{M}$ называется ограниченным, если оно целиком содержится в некотором «прямоугольном параллелепипеде».

«Область» называется связной, если любые ее две «точки» можно соединить «ломаной», лежащей всеми своими «точками» в «области». На рис. 96 представлено для иллюстрации несколько связных областей на плоскости.

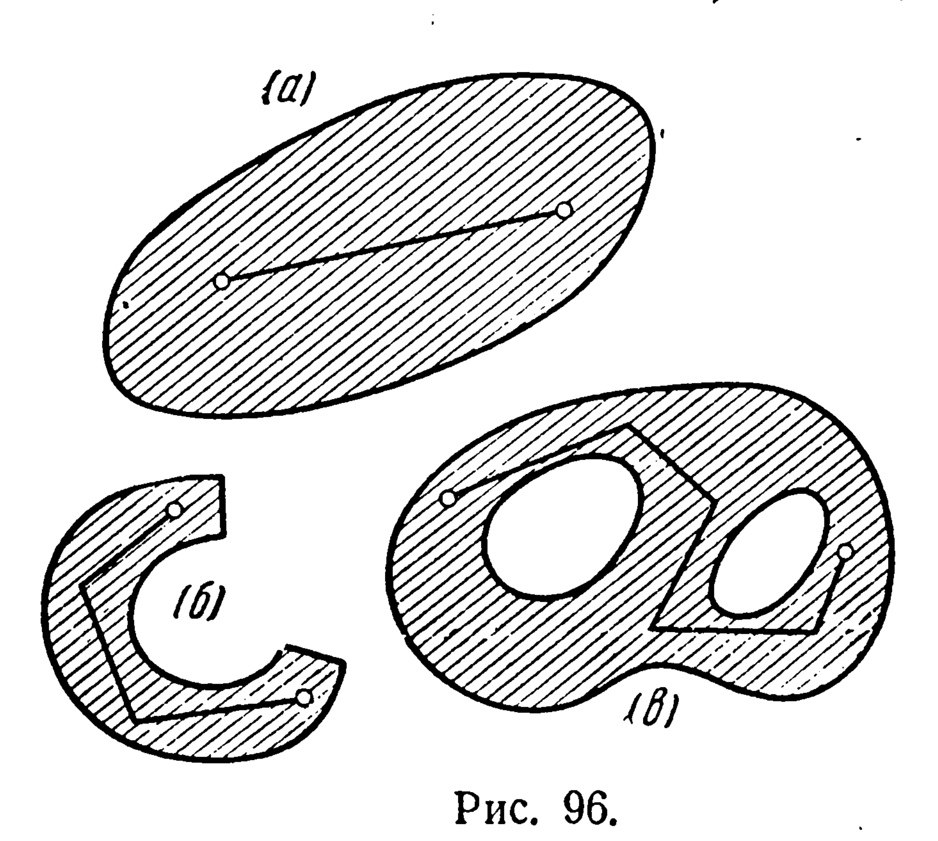


Рис. 96.

Ограниченная и связная «область» в n-мерном «пространстве» (открытая или замкнутая) есть, в некотором смысле, аналог конечного промежутка (соответственно, открытого или замкнутого). Читатель видит, однако, насколько усложняется картина при переходе к n-мерным (при $n \geqslant 2$) образам. Простым и однотипным промежуткам, границей которых служат всего лишь две точки, здесь противопоставляется огромное многообразие «областей» со сложными «границами».

Все изложенное в последних nn° можно рассматривать как установление лишь некоего геометрического языка; с этим не связано (при $n > 3$) никаких реальных геометрических представлений. Однако полезно подчеркнуть, что на деле n-мерное арифметическое пространство является лишь первым шагом к тем в высшей степени плодотворным обобщениям понятия пространства, которые лежат в основе многих более высоких частей современного анализа *).

164. Функции n переменных. Пусть имеем n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, совместные значения которых могут выбираться произвольно из некоторого множества $\mathscr{M}$ точек n-мерного пространства: эти переменные называются независимыми. Определение функции и все сказанное по поводу него для случая двух независимых переменных [**160**] непосредственно переносится и на рассматриваемый случай, так что нет надобности на этом останавливаться.

Если точку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначить через M, то функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от этих переменных иногда называют функцией точки M и обозначают тем же знаком: $u = f(M)$.

---

*) Мы помещали в кавычках все геометрические термины, которые употреблялись в смысле, отличном от обычного: «точка», «расстояние», «область», и т. п. Впредь мы этого делать уже не будем.

Предположим теперь, что в некотором множестве $\mathcal{P}$ точек m-мерного пространства (где m не связано с n) заданы n функций от m переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m) \tag{5}$$

или, короче,

$$x_1 = \varphi_1(P), \ldots, x_n = \varphi_n(P), \tag{5a}$$

где P означает точку $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ m-мерного пространства. Допустим, сверх того, что когда точка $P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ изменяется в пределах множества $\mathcal{P}$, соответствующая ей n-мерная точка M, с координатами (5) [или (5а)], не выходит за пределы n-мерного множества $\mathcal{M}$, где определена функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M)$.

Тогда переменную u можно рассматривать как сложную функцию от независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (в множестве $\mathcal{P}$) — через посредство переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m));$$

u является функцией от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. [Ср. **51**.]

Самый процесс определения сложной функции по функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и функции f называется (как в простейшем случае функций одной переменной) — суперпозицией.

Класс функций нескольких переменных, с которыми непосредственно приходится иметь дело на первых порах, очень невелик. По существу, он строится с помощью суперпозиций на элементарных функциях одной переменной [**48, 50**] и на следующих функциях двух переменных:

$$z = x \pm y, \quad z = xy, \quad z = \frac{x}{y} \quad \text{и} \quad z = x^y,$$

т. е. на четырех арифметических операциях и на так называемой степенно-показательной функции.

Арифметические операции, повторно примененные, исходя из независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и постоянных, приводят прежде всего к целым многочленам*):

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}$$

(целая рациональная функция) и к частным двух таких многочленов

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}}$$

(дробная рациональная функция).

*) Мы знаем, что знак $\sum$ означает сумму однотипных слагаемых. Здесь мы имеем более сложный случай, когда слагаемые зависят от нескольких значков.

Привлечение элементарных функций одной переменной приводит к таким, например, функциям:

$$f(x, y, z) = \frac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx,$$

и т. п.

Те замечания, которые были сделаны в **46** по поводу аналитического задания функций одной переменной, могут быть повторены и здесь.

165. Предел функции нескольких переменных. Предположим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некотором точечном множестве $\mathcal{M}$, допускающем точку сгущения $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Аналогично определению предела функции от одной переменной, говорят, что *функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет пределом число A при стремлении переменных $x_1, \ldots, x_n$, соответственно, к $a_1, \ldots, a_n$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что*

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon,$$

лишь только

$$|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_n - a_n| < \delta.$$

При этом точка $(x_1, \ldots, x_n)$ предполагается взятой из $\mathcal{M}$ и отличной от $(a_1, \ldots, a_n)$. Итак, неравенство для функции должно выполняться во всех точках множества $\mathcal{M}$, лежащих в достаточно малой окрестности

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \ldots; a_n - \delta, a_n + \delta)$$

точки M_0, но исключая саму эту точку (если она принадлежит $\mathcal{M}$).

Обозначают предел функции так:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n) \tag{6}$$

В геометрических терминах, вводя для точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(a_1, \ldots, a_n)$ обозначения M и M_0, можно было бы перефразировать приведенное определение так: *число A называется пределом функции $f(M)$ при стремлении точки M к M_0 (или — в точке M_0), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $r > 0$, что*

$$|f(M) - A| < \varepsilon,$$

лишь только расстояние $\overline{M_0M} < r$.

Как и выше, точка M предполагается взятой из $\mathcal{M}$, но отличной от M_0. Таким образом, неравенство для функции должно выполняться

во всех точках множества $\mathscr{M}$, лежащих в достаточно малой сферической окрестности точки M_0, за исключением самой этой точки.

Обозначение предела функции также можно приспособить к этому определению.

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M). \qquad (6^*)$$

Из замечания n° **161** об окрестностях разных типов непосредственно ясна тождественность обоих приведенных определений.

Аналогично устанавливается понятие о бесконечном пределе функции. В случае $A = +\infty$ или $-\infty$, неравенство

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$$

лишь заменяется, соответственно, неравенством вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) > \mathrm{E}$$

или

$$f(x_1, \ldots, x_n) < -\mathrm{E},$$

где Е есть произвольное наперед взятое положительное число.

Упомянем в заключение о случае, когда некоторые из независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ стремятся к бесконечным пределам.

Можно было бы распространить понятие точки сгущения $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ области $\mathscr{M}$ и на тот случай, когда все координаты этой точки (или некоторые из них) бесконечны *).

Например, *точка* $(+\infty, \ldots, +\infty)$ *является для* $\mathscr{M}$ *точкой сгущения, если в этой области найдутся точки со сколь угодно большими (положительными) координатами.*

В этом предположении, говорят, что *функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет пределом число* A *при стремлении всех переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *к* $+\infty$ *если, для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\Delta > 0$, *что*

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon,$$

лишь только

$$x_1 > \Delta, \; x_2 > \Delta, \ldots, x_n > \Delta.$$

В обозначениях:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_n \to +\infty}} f(x_1, \ldots, x_n).$$

В частности, возвращаясь к переменной $x_{m,n}$, о которой была речь в конце n° **160**, говорят, что *эта переменная при безграничном*

*) В этом случае точка M_0 называется несобственной.

возрастании обоих номеров m и n имеет пределом A, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что

$$|x_{m,n} - A| < \varepsilon \text{ при } m > N,\ n > N.$$

Записывают это так:

$$A = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} x_{m,n} \text{ или просто } A = \lim x_{m,n}.$$

Легко понять, как трактуется случай, когда $A = +\infty$ или $-\infty$.

166. Сведéние к случаю варианты. Рассмотрим в n-мерном пространстве последовательность точек

$$\{M_k(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Мы будем говорить, что эта последовательность сходится к предельной точке $M_0(a_1, \ldots, a_n)$, если, при $k \to +\infty$, расстояние

$$\overline{M_0 M_k} \to 0. \tag{7}$$

Вместо этого можно было бы потребовать, чтобы координаты точки M_k порознь стремились к соответствующим координатам точки M_0, т. е. чтобы было

$$x_1^{(k)} \to a_1, \ldots, x_n^{(k)} \to a_n. \tag{8}$$

Равносильность обоих определений, собственно, вытекает из доказанного в **161** утверждения об окрестностях двух типов. Действительно, условие (7) означает, что, каково бы ни было число $r > 0$, точка M_k при достаточно большом k удовлетворяет неравенству

$$\overline{M_0 M_k} < r,$$

т. е. попадает в (открытую) сферу радиуса r с центром в точке M_0; требование же (8) имеет тот смысл, что, каково бы ни было число $\delta > 0$, названная точка — снова при достаточно большом k — удовлетворяет неравенствам

$$|x_1^{(k)} - a_1| < \delta, \ldots, |x_n^{(k)} - a_n| < \delta,$$

т. е. содержится в (открытом) параллелепипеде

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \ldots, a_n - \delta, a_n + \delta)$$

с центром в той же точке.

Пусть теперь точка $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ является точкой сгущения некоторого множества $\mathcal{M}$ в n-мерном пространстве. Тогда из $\mathcal{M}$ всегда можно извлечь такую последовательность отличных от M_0 точек: $\{M_k\}$, которая сходилась бы к M_0, как к предельной точке.

Для доказательства зададимся положительной вариантой $r_k \to 0$. По определению точки сгущения [**162**], в каждой сферической окрестности точки M_0, радиуса r_k, найдется (отличная от M_0) точка M_k множества $\mathcal{M}$. Последовательность $\{M_k\}$, очевидно, и будет искомой.

Теперь можно сформулировать такое *условие, необходимое и достаточное для существования предельного равенства* (6) [*или* (6*)]: *если извлечь из* $\mathcal{M}$ *последовательность* $\{M_k\}$ *отличных от* M_0 *точек, сходящуюся к* M_0, *то числовая последовательность* $\{f(M_k)\}$, *состоящая из соответствующих значений функции, всегда сходится к* A.

Необходимость. Пусть имеет место (6*), и по заданному $\varepsilon > 0$ найдено соответствующее ему $r > 0$, в согласии с определением предыдущего n°. Если последовательность точек $\{M_k\}$ сходится к M_0, то — для достаточно больших k — будет

$$\overline{M_0M_k} < r,$$

а это влечет за собой неравенство

$$|f(M_k) - A| < \varepsilon,$$

которое и показывает, что $f(M_k) \to A$.

Достаточность. Предположим теперь, что выполняется высказанное выше условие. Для того чтобы доказать наличие равенства (6*) в соответствии с определением предыдущего n°, допустим противное тому, что содержится в этом определении. Тогда для некоторого числа $\varepsilon > 0$ уже не существует соответствующего r, т. е., какое бы число $r > 0$ ни взять, всегда в $\mathcal{M}$ найдется такая (отличная от M_0) точка M', что одновременно

$$\overline{M_0M'} < r, \quad \text{но} \quad |f(M') - A| \geqslant \varepsilon.$$

Взяв положительную варианту $r_k \to 0$, станем за r поочередно брать числа r_k; для каждого r_k найдется по сказанному, своя (отличная от M_0) точка M_k, для которой

$$\overline{M_0M_k} < r_k, \quad \text{но} \quad |f(M_k) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Построенная таким образом последовательность точек $\{M_k\}$ сходится к M_0, и в то же время числовая последовательность $\{f(M_k)\}$ не может иметь пределом A, вопреки условию. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

Читателю ясно, что высказанное условие дает другую форму (на «языке последовательностей») определения предела функции.

Таким образом, и для функции нескольких переменных удается вопрос о пределе функции свести к вопросу о пределе варианты [ср. **53**]. Этот результат легко распространить и на случай, когда числа A, a_1, ... , a_n, или некоторые из них, бесконечны.

Указанное обстоятельство позволяет распространить на новый тип предела все основные понятия и предложения развитой в главе I теории пределов — наподобие того, как это было сделано в **55** для предела функции от одной независимой переменной.

167. Примеры. 1) Пользуясь теоремой о пределе произведения, прежде всего, легко показать, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} Cx_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} = Ca_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n},$$

где C, $a_1, \dots, a_n$ — любые вещественные, а $\nu_1 \dots, \nu_n$ — неотрицательные целые числа. Отсюда, если через $P(x_1, \dots, x_n)$ обозначить целую рациональную функцию [**163**]:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n} C_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n},$$

по теореме о сумме, получается также

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} P(x_1, \dots, x_n) = P(a_1, \dots, a_n).$$

Аналогично для дробной рациональной функции [**163**]

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \dots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \dots, \mu_n} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}},$$

по теореме о пределе частного,

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} Q(x_1, \dots, x_n) = Q(a_1, \dots, a_n),$$

конечно, лишь при условии, что знаменатель в точке $(a_1, \dots, a_n)$ в 0 не обращается.

2) Рассмотрим степенно-показательную функцию x^y при $x > 0$ и произвольном y. Тогда, если $a > 0$ и b — любое вещественное число, будем иметь

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} x^y = a^b.$$

Действительно, если взять любые варианты $x_n \to a$ и $y_n \to b$, то [ср. **78**]

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \cdot \ln x_n} \to e^{b \cdot \ln a} = a^b,$$

а это — на «языке последовательностей» — и устанавливает требуемый результат.

3) Пусть о вариантах x_n и y_n известно, что они имеют пределы, соответственно, a и b, и ставится вопрос о пределе составленного из них выражения

$$x_n \pm y_n, \quad x_n \cdot y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \quad \text{или} \quad x_n^{y_n}.$$

Для случая так называемых неопределенных выражений, условно характеризуемых символами:

$$\infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ \frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 1^\infty, \ 0^0, \ \infty^0,$$

как мы знаем [**31**, **78**], предел может вовсе не существовать, а если существует, то может — при тех же a и b — иметь различные значения, в зависимости от частного закона изменения вариант x_n и y_n.

Если вспомнить определение предела функции двух независимых переменных на «языке последовательностей», то станет ясно, что упомянутые типы «неопределенностей» связаны с фактом несуществования следующих пределов:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x - y), \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to \pm\infty}} x \cdot y, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{y}, \quad \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty}} \frac{x}{y},$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to \pm\infty}} x^y, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x^y, \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} x^y.$$

4) Поставим вопрос о пределе:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

(Функция здесь определена на всей плоскости за исключением именно точки $x = 0$, $y = 0$.)

Если взять две частичные последовательности точек

$$\left\{ M_k \left(\frac{1}{k}, \ \frac{1}{k} \right) \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \left(M'_k \left(\frac{2}{k}, \ \frac{1}{k} \right) \right\} \right.,$$

очевидно, сходящиеся к точке $(0, 0)$, то окажется, что при всех k

$$f(M_k) = f\left(\frac{1}{k}, \ \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad f(M'_k) = f\left(\frac{2}{k}, \ \frac{1}{k} \right) = \frac{2}{5}.$$

Отсюда уже следует, что упомянутого предела не существует.

Предлагается аналогично убедиться в том, что не существует предела

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

5) Наоборот, существует предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Это сразу вытекает из неравенства

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} |x|.$$

Точно так же доказывается, что и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

168. Повторные пределы. Кроме рассмотренного выше предела функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при *одновременном* стремлении всех аргументов к их пределам, приходится иметь дело и с пределами другого рода, получаемыми в результате ряда *последовательных* предельных переходов по каждому аргументу в отдельности, в том или ином порядке. Первый предел называется n-*кратным* (или *двойным*, *тройным* и т. д. — при $n=2, 3, \dots$), а последний — *повторным*.

Ограничимся для простоты случаем функции двух переменных $f(x, y)$. Допустим к тому же, что область $\mathcal{M}$ изменения переменных x, y такова, что x (*независимо* от y) может принимать любое значение в некотором множестве $\mathcal{X}$, для которого a служит точкой сгущения, но ему не принадлежит, и аналогично y (*независимо* от x) изменяется в множестве $\mathcal{Y}$ с не принадлежащей ему точкой сгущения b. Такую область $\mathcal{M}$ можно было бы символически обозначить, как $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Например,

$$(a,\ a+H;\ b,\ b+K)=(a,\ a+H)\times(b,\ b+K).$$

Если при любом *фиксированном* y из $\mathcal{Y}$ существует для функции $f(x, y)$ (которая оказывается функцией лишь от x) предел при $x\to a$, то этот предел, вообще говоря, будет зависеть от наперед фиксированного y:

$$\lim_{x\to a} f(x, y)=\varphi(y).$$

Затем можно поставить вопрос о пределе функции $\varphi(y)$ при $y\to b$

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

— это и будет один из двух повторных пределов. Другой получится, если предельные переходы произвести в обратном порядке:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y).$$

Не следует думать, что повторные пределы эти необходимо равны. Если, например, в области $\mathcal{M}$ $(0, +\infty;\ 0,\ +\infty)$ положить

1) $$f(x, y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

и взять $a=b=0$, то получим:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0} f(x, y)=y-1,\quad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y)=-1,$$

в то время как

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0} f(x, y)=x+1,\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y)=1.$$

Может случиться также, что один из повторных пределов существует, а другой — нет. Так будет, например, для функций:

$$2)\quad f(x, y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} \quad \text{или} \quad 3)\ f(x, y)=x\cdot\sin\frac{1}{y};$$

в обоих случаях здесь существует повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f$, но нет повторного предела $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f$ (а в последнем примере — нет даже простого предела $\lim\limits_{y\to 0} f$).

Эти простые примеры показывают, насколько осторожным нужно быть при **перестановке двух предельных переходов по разным переменным**: не раз ошибочные умозаключения проистекали именно от такой незаконной перестановки. В то же время многие важные вопросы анализа связаны именно с перестановкой предельных переходов, но, разумеется, всякий раз дозволительность перестановки должна быть особо обоснована.

Один из путей к такому обоснованию открывает следующая теорема, которая в то же время устанавливает связь между двойными и повторными пределами:

Теорема. *Если* 1) *существует (конечный или нет) двойной предел*

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$$

и 2) *при любом y из $\mathcal{Y}$ существует (конечный) простой предел по x*

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x, y),$$

то существует повторный предел

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

и равен двойному.

Докажем это для случая конечных A, a и b. Согласно определению n° **163**, по заданному $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon, \tag{9}$$

лишь только $|x-a|<\delta$ и $|y-b|<\delta$ (причем x берется из $\mathcal{X}$, а y из $\mathcal{Y}$). Фиксируем теперь y так, чтобы выполнялось неравенство $|y-b|<\delta$, и перейдем в (9) к пределу, устремив x к a. Так как, ввиду 2), $f(x, y)$ при этом стремится к пределу $\varphi(y)$, то получим

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon.$$

Вспоминая, что y здесь есть любое число из $\mathcal{Y}$, подчиненное лишь условию $|y-b|<\delta$, приходим к заключению, что

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x, y),$$

ч. и тр. д.

Если, наряду с условиями 1) и 2), при любом x из $\mathcal{X}$ существует (конечный) простой предел по y

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x, y),$$

то, как следует из уже доказанного, если x и y обменять ролями, — существует также и второй повторный предел

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x, y)$$

и равен тому же числу A: в этом случае оба повторных предела равны.

Из доказанной теоремы сразу ясно, что в примерах 1) и 2) двойной предел не существует (почему?). В этом легко убедиться и непосредственно.

В примере 3), наоборот, двойной предел существует: из неравенства

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|$$

усматриваем, что он равен 0. Этот пример показывает, что условие 1) теоремы не влечет за собой условия 2).

Не следует думать, однако, что существование двойного предела необходимо для равенства повторных: в примере 4) предыдущего n° оба повторных предела существуют и равны 0, хотя двойного предела нет.

§ 2. Непрерывные функции

169. Непрерывность и разрывы функций нескольких переменных. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некотором множестве $\mathcal{M}$ точек n-мерного пространства, и $M'(x_1', \ldots, x_n')$ есть точка сгущения этого множества, принадлежащая самому множеству.

Говорят, что *функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $M'(x_1', \ldots, x_n')$, если имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1'\\ \cdots\\ x_n\to x_n'}}f(x_1, \ldots, x_n)=f(x_1', \ldots, x_n'); \tag{1}$$

в противном же случае — функция терпит разрыв в точке M'.

На «языке ε-δ» непрерывность функции в точке M' выразится так [**165**]: *по любому заданному* $\varepsilon > 0$ *должно найтись такое* $\delta > 0$, *что*

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1', \ldots, x_n')| < \varepsilon, \tag{2}$$

лишь только

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \ \ldots, \ |x_n - x_n'| < \delta; \tag{3}$$

или иначе: *по* $\varepsilon > 0$ *должно найтись такое* $r > 0$, *что*

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon,$$

лишь только расстояние

$$\overline{MM'} < r.$$

При этом точка $M(x_1, \ldots, x_n)$ предполагается принадлежащей множеству $\mathcal{M}$, в частности же, может совпасть и с точкой M'. Именно ввиду того, что предел функции в точке M' равен значению функции в этой точке, обычное требование, чтобы M была отлична от M', здесь становится ненужным.

Рассматривая разности $x_1 - x_1', \ldots, x_n - x_n'$ как приращения $\Delta x_1', \ldots, \Delta x_n'$ независимых переменных, а разность

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1', \ldots, x_n')$$

— как приращение функции, можно сказать (как в случае функций одной переменной), что *функция непрерывна, если бесконечно малым приращениям независимых переменных отвечает бесконечно малое же приращение функции.*

Определенная выше непрерывность функции в точке M' есть, так сказать, непрерывность по всей совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если она имеет место, то одновременно и

$$\lim_{x_1 \to x_1'} f(x_1, x_2', \ldots, x_n') = f(x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ x_2 \to x_2'}} f(x_1, x_2, x_3', \ldots, x_n') = f(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'),$$

и т. п., ибо здесь мы осуществляем лишь частные законы приближения M к M'. Иными словами, функция оказывается непрерывной в отдельности по каждой переменной x_i, по каждой паре переменных x_i, x_j, и т. д.

С примерами непрерывных функций мы уже сталкивались. Так, в **166**, 1) была установлена непрерывность целой и дробной рациональной функций от n аргументов во всех точках n-мерного пространства (для дробной функции — за исключением тех точек, которые обращают ее знаменатель в 0). Там же, в 2), была доказана непрерывность степенно-показательной функции x^y для всех точек правой полуплоскости ($x > 0$).

Если вновь рассмотреть функцию

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \quad (\text{для } x^2+y^2>0),$$

определенную этой формулой во всей плоскости, кроме начальной точки, и положить дополнительно: $f(0, 0)=0$, то получим пример разрыва. Он имеет место именно в начальной точке, так как [167, 4)] при $x \to 0$, $y \to 0$ для функции предела не существует.

Здесь мы сталкиваемся с таким интересным обстоятельством. Рассмотренная функция $f(x, y)$, хотя и не является непрерывной в точке (0, 0) по обеим переменным зараз, тем не менее будет непрерывна в этой точке как по x, так и по y в отдельности; это следует из того, что $f(x, 0)= =f(0, y)=0$. Впрочем, сказанное перестает быть удивительным, если сообразить, что, говоря о непрерывности по x и по y в отдельности, мы учитываем лишь приближение к точке (0, 0) вдоль по оси x или по оси y, оставляя в стороне бесчисленное множество других законов приближения.

Если для функции $f(M)$ при стремлении M к M' вовсе не существует определенного конечного предела

$$\lim_{M \to M'} f(M),$$

то говорят, что в точке M' функция имеет разрыв, даже в том случае, когда в самой точке M' функция не определена [ср. замечание в **66**].

Точки разрыва функции могут быть не только изолированными, как в предыдущем примере, но и заполнять собою линии, поверхности и т. п. Так, функции двух переменных

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

имеют разрывы: первая — вдоль прямых $y=\pm x$, а вторая — вдоль окружности $x^2+y^2=1$. Для функций трех переменных

$$\frac{x+y+z}{xy-z}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$$

разрывы заполняют в первом случае гиперболический параболоид $z=xy$, а во втором — конус $z^2=x^2+y^2$.

170. Операции над непрерывными функциями. Легко сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы, разности, произведения, частного двух непрерывных функций [ср. **67**]; предоставляем это читателю.

Мы остановимся лишь на теореме о суперпозиции непрерывных функций. Как и в n° **164**, мы предположим, что кроме функции $u=f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной в множестве $\mathcal{M}$ n-мерных точек $M(x_1, \ldots, x_n)$, нам даны еще n функций

$$x_1=\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ \ldots, \ x_n=\varphi_n(t_1, \ldots, t_m) \tag{4}$$

в некотором множестве $\mathcal{P}$ m-мерных точек $P(t_1, \ldots, t_m)$, причем точка M с координатами (4) не выходит за пределы упомянутого множества $\mathcal{M}$.

Теорема. *Если функции $\varphi_i(P)$ $(i=1, \ldots, n)$ все непрерывны в точке $P'(t'_1, \ldots, t'_m)$ из $\mathcal{P}$, а функция $f(M)$ непрерывна в соответствующей точке $M'(x'_1, \ldots, x'_n)$ с координатами*

$$x'_1=\varphi_1(t'_1, \ldots, t'_m), \ldots, x'_n=\varphi_n(t'_1, \ldots, t'_m),$$

то и сложная функция

$$u=f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_m))=f(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P))$$

будет непрерывна в точке P'.

Действительно, сначала по $\varepsilon>0$ определится число $\delta>0$, такое, что из (3) следует (2) (ввиду непрерывности функции f). Затем по числу δ (ввиду непрерывности функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) найдется число $\eta>0$ такое, что неравенства

$$|t_1-t'_1|<\eta, \ldots, |t_m-t'_m|<\eta \tag{5}$$

влекут за собой неравенства

$$|x_1-x'_1|=|\varphi_1(t_1, \ldots, t_m)-\varphi_1(t'_1, \ldots, t'_m)|<\delta, \ldots,$$
$$|x_n-x'_n|=|\varphi_n(t_1, \ldots, t_m)-\varphi_n(t'_1, \ldots, t'_m)|<\delta.$$

Но тогда, при наличии (5), будет также

$$|f(x_1, \ldots, x_n)-f(x'_1, \ldots, x'_n)|=$$
$$=|f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_m))-$$
$$-f(\varphi_1(t'_1, \ldots, t'_m), \ldots, \varphi_n(t'_1, \ldots, t'_m))|<\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

171. Функции, непрерывные в области. Теоремы Больцано — Коши. Мы будем говорить, что *функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в некотором множестве $\mathcal{M}$ точек n-мерного пространства, если она непрерывна в каждой точке этого множества, которая является для него точкой сгущения.* Впредь, как правило, мы ограничимся случаем, когда множество $\mathcal{M}$ представляет собой открытую или замкнутую область [**163**], наподобие того, как непрерывные функции одной переменной мы рассматривали в промежутке.

Обращаемся теперь к изучению свойств функции нескольких переменных, непрерывной в некоторой области n-мерного пространства. Они вполне аналогичны свойствам функции одной переменной, непрерывной в промежутке (гл. II, § 5).

При изложении мы лишь для краткости ограничимся случаем двух независимых переменных. Перенесение на общий случай производится непосредственно и не представляет труда. Впрочем, некоторые замечания по этому поводу будут сделаны попутно.

Сформулируем теперь теорему, аналогичную 1-й теореме Больцано — Коши для функции одной переменной [**180**].

Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой* ***связной*** *области $\mathcal{D}$. Если в двух точках $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ этой области функция принимает значения разных знаков:*

$$f(x_0, y_0) < 0, \quad f(x_1, y_1) > 0,$$

то в этой области найдется и точка $M'(x', y')$, в которой функция обращается в нуль: $f(x', y') = 0$.

Рис. 97.

Доказательство мы построим на сведении к случаю функции одной независимой переменной.

Ввиду связности области $\mathcal{D}$, точки M_0 и M_1 можно соединить ломаной, всеми точками лежащей в $\mathcal{D}$ (рис. 97). Если последовательно перебирать вершины ломаной, то либо окажется, что в какой-либо из них функция обращается в 0 — и тогда теорема доказана, либо этого не будет. В последнем случае найдется такая сторона ломаной, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Изменив обозначения точек, будем считать, что M_0 и M_1 как раз и являются концами этой стороны. Ее уравнения имеют вид [**161**]:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0). \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Если точка $M(x, y)$ передвигается именно вдоль этой стороны, то наша первоначальная функция $f(x, y)$ превращается в сложную функцию одной переменной t:

$$F(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0), \; y_0 + t(y_1 - y_0)) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

очевидно, непрерывную (по теореме предшествующего n°), ввиду непрерывности как функции $f(x, y)$, так и линейных функций от t, подставленных вместо ее аргументов. Но для $F(t)$ имеем:

$$F(0) = f(x_0, y_0) < 0, \qquad F(1) = f(x_1, y_1) > 0.$$

Применяя к функции $F(t)$ одной переменной уже доказанную в n° **80** теорему, заключаем, что $F(t') = 0$ при некотором значении t' между 0 и 1. Вспоминая определение функции $F(t)$, имеем таким образом

$$f(x_0 + t'(x_1 - x_0), \; y_0 + t'(y_1 - y_0)) = 0.$$

Точка $M'(x', y')$, где $x' = x_0 + t'(x_1 - x_0)$, $y' = y_0 + t'(y_1 - y_0)$ и является искомой.

Отсюда вытекает, как и в **82**, 2-я теорема Больцано — Коши, которая, впрочем, могла бы быть получена и сразу.

Читатель видит, что переход к пространству n измерений (при $n>2$) не создает никаких затруднений, ибо в n-мерной связной области точки также могут быть соединены «ломаной» и вопрос сведется к рассмотрению ее стороны, вдоль которой функция будет зависеть от одного параметра, и т. д.

172. Лемма Больцано—Вейерштрасса. Для дальнейшего изложения нам понадобится обобщение леммы Больцано-Вейерштрасса [41] на случай последовательности точек в пространстве любого числа измерений; как всегда, мы ограничимся «плоским» случаем.

Лемма. *Из любой ограниченной последовательности точек*

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \ \ldots, \ M_n(x_n, y_n), \ \ldots$$

всегда можно извлечь такую частичную последовательность

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), \ M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \ \ldots, \ M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \ \ldots$$
$$(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots, \ n_k \to +\infty),$$

которая сходилась бы к предельной точке.

1-е доказательство, мы проведем, перенеся на рассматриваемый случай рассуждение, которым мы пользовались в «линейном» случае [41].

Ввиду ограниченности данной последовательности точек, найдется такой (конечный) прямоугольник $[a, b; c, d]$, в котором она целиком содержится. Разделим как промежуток $[a, b]$ значений x, так и промежуток $[c, d]$ значений y пополам:

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \ \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$
и
$$\left[c, \frac{c+d}{2}\right], \ \left[\frac{c+d}{2}, d\right].$$

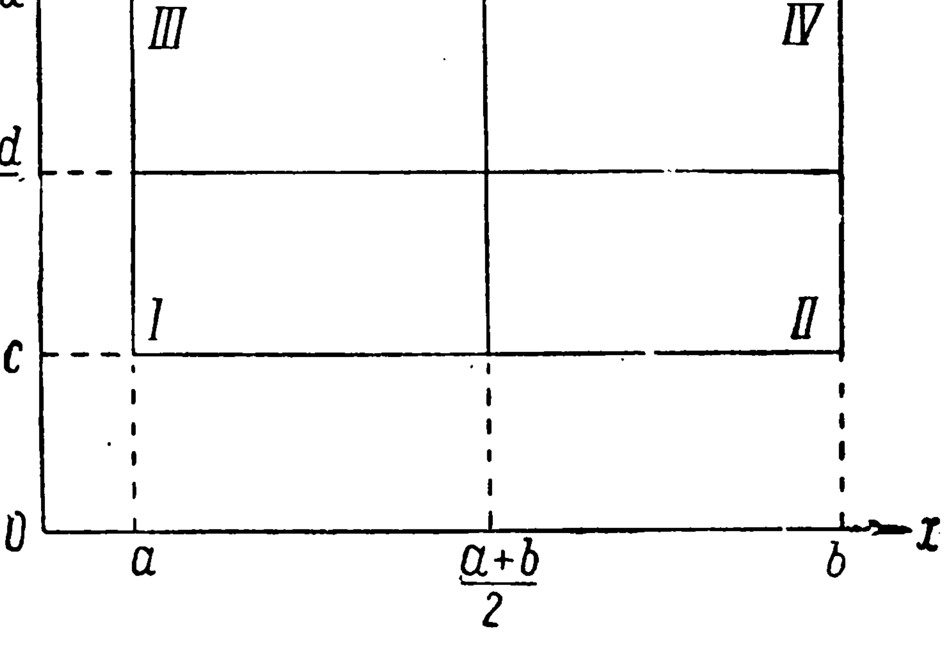


Рис. 98.

Комбинируя каждую из половин первого промежутка с каждой из половин второго, мы получим четыре прямоугольника:

$$\text{(I)} \left[a, \frac{a+b}{2}; \ c, \frac{c+d}{2}\right], \qquad \text{(II)} \left[\frac{a+b}{2}, b; \ c, \frac{c+d}{2}\right],$$
$$\text{(III)} \left[a, \frac{a+b}{2}; \ \frac{c+d}{2}, d\right], \qquad \text{(IV)} \left[\frac{a+b}{2}, b; \ \frac{c+d}{2}, d\right],$$

на которые разлагается основной прямоугольник $[a, b; c, d]$ (рис. 98).

Хоть в одной из этих частей будет содержаться бесконечное множество точек данной последовательности, ибо, в противном

случае, и во всем прямоугольнике их содержалось бы лишь конечное число, что невозможно. Пусть $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ будет тот из прямоугольников (I), (II), (III), (IV), в котором содержится бесконечное множество точек нашей последовательности (или один из таких прямоугольников, если их несколько).

Полученный прямоугольник снова разложим на четыре меньших прямоугольника и возьмем тот из них, в котором содержится бесконечное множество точек данной последовательности; обозначим его через $[a_2, b_2; c_2, d_2]$.

Этот процесс последовательного дробления прямоугольников мы представляем себе продолжающимся до бесконечности. На k-й стадии его мы выберем прямоугольник $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ под условием, что в нем содержится бесконечное множество точек M_n. Измерения этого прямоугольника

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k}$$

стремятся к 0 при $k \to +\infty$.

Применим теперь в отдельности к последовательности промежутков $\{[a_k, b_k]\}$ значений x и к последовательности промежутков $\{[c_k, d_k]\}$ значений y лемму о вложенных промежутках [**38**]. Из нее следует, что концы промежутков a_k и b_k, а также c_k и d_k, стремятся, соответственно, к общим пределам:

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x} \quad \text{и} \quad \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}. \tag{6}$$

Можно сказать, что последовательность прямоугольников $[\{a_k, b_k; c_k, d_k]\}$ «стягивается» в точку $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$.

Теперь, взяв в качестве M_{n_1} любую точку нашей последовательности, попадающую в прямоугольник $[a_1, b_1; c_1, d_1]$, мы станем затем поочередно выделять точки $M_{n_2}, M_{n_3}, \ldots$, выбирая — в общем случае — в качестве $M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k})$ любую точку последовательности, следующую за ранее выбранными и содержащуюся в k-м прямоугольнике $[a_k, b_k; c_k, d_k]$. Это сделать можно именно потому, что каждый из прямоугольников содержит бесконечное множество точек M_n.

Так как

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{и} \quad c_k \leqslant y_{n_k} \leqslant d_k,$$

то, ввиду (6),

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}, \quad \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = \bar{y},$$

так что выделенная частичная последовательность $\{M_{n_k}\}$ сходится к точке $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$, как к предельной [**166**].

II-е доказательство. Проще, однако, поступить иначе, использовав теорему, уже доказанную в **41** для случая линейной

последовательности. Если точки нашей последовательности содержатся в конечном прямоугольнике $[a, b; c, d]$, то

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \quad c \leqslant y_n \leqslant d \qquad (\text{для } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Применив теорему n° **41** сначала к последовательности $\{x_n\}$, выделим частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому пределу $\bar{x}$. Таким образом, для частичной последовательности точек

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), \quad (x_{n_2}, y_{n_2}), \ldots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots$$

первые координаты уже имеют предел. Вторично применим упомянутую теорему к последовательности вторых координат $\{y_{n_k}\}$ и выделим такую частичную последовательность $\{y_{n_{k_m}}\}$, которая тоже стремится к некоторому пределу y. Тогда, очевидно, частичная последовательность точек

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}), \quad (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}), \ldots, (x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}), \ldots$$

будет стремиться к предельной точке $(\bar{x}, \bar{y})$.

Заметим и здесь, что оба рассуждения легко переносятся на случай пространства $n > 2$ измерений. В первом из них, например, изменяется только число частей, на которые распадается заданная прямоугольная область, если разделить пополам каждый из определяющих ее промежутков; в общем случае этих промежутков будет n, а частей — всего 2^n.

173. Теоремы Вейерштрасса. С помощью доказанной теоремы прежде всего может быть установлена для функций двух переменных 1-я теорема Вейерштрасса:

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\mathscr{D}$ *), то функция ограничена, т. е. все ее значения содержатся между двумя конечными границами:*

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Доказательство (от противного) вполне аналогично рассуждению n° **84**. Пусть функция $f(x, y)$ при изменении (x, y) в $\mathscr{D}$ оказывается неограниченной. Тогда для любого n найдется в $\mathscr{D}$ такая точка $M_n(x_n, y_n)$, что

$$|f(x_n, y_n)| > n. \qquad (7)$$

По теореме n° **172**, из ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{M_{n_k}\}$, сходящуюся к предельной точке $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$.

---

*) Которая, на этот раз, может быть и несвязной.

Отметим, что эта точка $\bar{M}$ необходимо принадлежит области $\mathcal{D}$. Действительно, в противном случае точки M_{n_k} все были бы от нее отличны, и точка $\bar{M}$ была бы точкой сгущения области $\mathcal{D}$, ей не принадлежащей, что невозможно ввиду замкнутости области $\mathcal{D}$ [см. **163**].

Вследствие непрерывности функции в точке $\bar{M}$ должно быть

$$f(M_{n_k})=f(x_{n_k}, y_{n_k})\to f(\bar{M})=f(\bar{x}, \bar{y}),$$

а это находится в противоречии с (7).

2-я теорема Вейерштрасса формулируется и доказывается (с ссылкой на предыдущую теорему) совершенно так же, как и в **85.**

Заметим, что без существенных изменений в рассуждениях — обе теоремы Вейерштрасса переносятся и на случай, когда функция непрерывна в любом ограниченном замкнутом множестве $\mathcal{M}$ (хотя бы и не представляющем собою области).

Как и в случае функции одной переменной, для функции $f(x, y)$, определенной и ограниченной в множестве $\mathcal{M}$, разность между точными верхней и нижней границами значений функции в $\mathcal{M}$ называется ее колебанием в этом множестве. Если $\mathcal{M}$ ограничено и замкнуто (в частности, если $\mathcal{M}$ есть ограниченная замкнутая область), и функция f в нем непрерывна, то колебание есть попросту разность между наибольшим и наименьшим ее значениями.

174. Равномерная непрерывность. Мы знаем, что непрерывность функции $f(x, y)$ в определенной точке (x_0, y_0) множества $\mathcal{M}$, где функция задана, на «языке ε-δ» выражается так: по любому $\varepsilon>0$ должно найтись такое $\delta>0$, что неравенство

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$$

выполняется для всякой точки (x, y) из $\mathcal{M}$, лишь только

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta.$$

Пусть теперь функция $f(x, y)$ непрерывна во всем множестве $\mathcal{M}$; тогда возникает вопрос, можно ли по данному $\varepsilon>0$, найти такое $\delta>0$, которое годилось бы — в указанном смысле — для всех точек (x_0, y_0) из $\mathcal{M}$ одновременно. Если это возможно (при любом ε), то говорят, что функция в $\mathcal{M}$ равномерно непрерывна.

Теорема Кантора. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$, то она будет и равномерно непрерывна в $\mathcal{D}$.*

Доказательство поведем от противного. Допустим, что для некоторого числа $\varepsilon>0$ не существует числа $\delta>0$, которое годилось бы одновременно для всех точек (x_0, y_0) области $\mathcal{D}$.

Возьмем последовательность стремящихся к 0 положительных чисел

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n > \ldots > 0, \quad \delta_n \to 0.$$

Так как ни одно из чисел δ_n не может годиться — в указанном смысле — одновременно для всех точек (x_0, y_0) области $\mathcal{D}$, то для каждого δ_n найдется в $\mathcal{D}$ такая конкретная точка (x_n, y_n), для которой δ_n не годится. Это значит, что существует в $\mathcal{D}$ точка (x_n', y_n'), для которой

$$|x_n' - x_n| < \delta_n, \quad |y_n' - y_n| < \delta_n,$$

и тем не менее

$$|f(x_n', y_n') - f(x_n, y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Из ограниченной последовательности точек $\{(x_n, y_n)\}$, по теореме Больцано — Вейерштрасса, извлечем такую частичную последовательность $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, что $x_{n_k} \to \bar{x}$, $y_{n_k} \to \bar{y}$, причем предельная точка $(\bar{x}, \bar{y})$ необходимо принадлежит области $\mathcal{D}$ (ввиду ее замкнутости).

Так как, далее,

$$|x_{n_k}' - x_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad |y_{n_k}' - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$$

и, при возрастании k, $n_k \to +\infty$ и $\delta_{n_k} \to 0$, то

$$x_{n_k}' - x_{n_k} \to 0, \quad y_{n_k}' - y_{n_k} \to 0,$$

так что и

$$x_{n_k}' \to \bar{x}, \quad y_{n_k}' \to \bar{y}.$$

Ввиду непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, принадлежащей области $\mathcal{D}$, мы должны иметь как

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

так и

$$f(x_{n_k}', y_{n_k}') \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

откуда

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x_{n_k}', y_{n_k}') \to 0,$$

что оказывается в противоречии с неравенством (8). Теорема доказана.

Для формулировки вытекающего отсюда следствия нам понадобится понятие диаметра точечного множества: так называется точная верхняя граница расстояний между любыми двумя точками множества.

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$, то по данному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, на какие бы частичные замкнутые же области*

$\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ *с диаметрами, меньшими* δ, *ни разбить эту область* *), *колебание функции в каждой части в отдельности будет меньше* ε.

Достаточно за δ взять то число, о котором говорится в определении равномерной непрерывности. Если диаметр частичной области $\mathscr{D}_i$ меньше δ, то расстояние любых двух ее точек (x, y) и (x_0, y_0) меньше δ: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$. Отсюда и подавно $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$, так что $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$. Если эти точки выбрать так, чтобы $f(x, y)$ и $f(x_0, y_0)$ были соответственно, наибольшим и наименьшим из значений функции в области $\mathscr{D}_i$, то и получим требуемое утверждение.

Легко видеть, что доказанная теорема без изменений переносится (подобно теоремам Вейерштрасса) на случай функции, непрерывной в любом ограниченном замкнутом множестве $\mathscr{M}$.

175. Лемма Бореля. Полезное предложение, доказанное в **88** может быть обобщено на многомерный случай.

Пусть имеем систему $\sum$ открытых областей σ на плоскости; если каждая точка множества $\mathscr{M}$ содержится хоть в одной из этих областей σ, то будем говорить, что система $\sum$ покрывает множество $\mathscr{M}$.

Лемма Бореля. *Если ограниченное замкнутое множество* $\mathscr{M}$ *точек плоскости покрывается бесконечной системой* $\sum=\{\sigma\}$ *открытых областей, то из нее всегда можно выделить конечную подсистему*

$$\sum^*=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\},$$

которая также покрывает все множество $\mathscr{M}$.

Доказательство (от противного). Допустим, что множество $\mathscr{M}$ не может быть покрыто конечным числом областей σ из $\sum$.

Ввиду ограниченности множества $\mathscr{M}$, оно содержится в некотором прямоугольнике $[a, b; c, d]$. Разделив каждый из двух промежутков $[a, b]$ и $[c, d]$ пополам, мы разложим этот прямоугольник, как и при доказательстве леммы Больцано — Вейерштрасса [**172**], на четыре прямоугольника. Вместе с тем и множество $\mathscr{M}$ разложится на части, содержащиеся соответственно в этих частичных прямоугольниках; частей, впрочем, может оказаться и меньше четырех, если какой-либо прямоугольник не содержит вовсе точек множества $\mathscr{M}$. Хоть одна из этих частей (скажем, $\mathscr{M}_1$), в свою очередь, не может быть покрыта конечным числом областей σ (ибо в противном случае все множество $\mathscr{M}$, вопреки предположению, было бы покрыто конечным числом областей σ). Тот из частичных прямоугольников, который содержит именно часть $\mathscr{M}_1$ множества $\mathscr{M}$, обозначим через $[a_1, b_1; c_1, d_1]$.

---

*) Эти частичные области могут иметь общими лишь пограничные точки.

Этот прямоугольник снова разложим на четыре прямоугольника. Хотя бы один из них — обозначим его через $[a_2, b_2; c_2, d_2]$ — содержит часть $\mathcal{M}_2$ множества $\mathcal{M}$, которая не может быть покрыта конечным числом областей σ.

Продолжая этот процесс до бесконечности, на k-й стадии его мы придем к прямоугольнику $[a_k, b_k; c_k, d_k]$, содержащему такую часть $\mathcal{M}_k$ множества $\mathcal{M}$, которая не может быть покрыта конечным числом областей σ.

Как и в **172**, мы заключим отсюда, что прямоугольники $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ «стягиваются» в точку $(\bar{x}, \bar{y})$, так что

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x}, \quad \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}.$$

Эта точка $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$. Действительно, какую бы окрестность $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta; \bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ точки $\overline{M}$ ни взять, для достаточно больших k будет

$$\bar{x} - \delta < a_k < b_k < \bar{x} + \delta, \quad \bar{y} - \delta < c_k < d_k < \bar{y} + \delta,$$

так что в упомянутую окрестность попадает часть $\mathcal{M}_k$ множества $\mathcal{M}$ (по самому выбору ее, наверное содержащая бесконечное множество точек). Следовательно, точка $\overline{M}$ является точкой сгущения для множества $\mathcal{M}$ и должна ему принадлежать, ввиду его замкнутости.

В таком случае, точка $\overline{M}$ содержится в одной из областей σ, скажем, в σ_0.

Так как σ_0 есть открытая область, то в нее входит и некоторая окрестность

$$(\bar{x} - \delta, \ \bar{x} + \delta, \ \bar{y} - \delta, \ \bar{y} + \delta)$$

этой точки. Как и только что, легко показать, что в эту окрестность целиком попадет, при достаточно большом k, прямоугольник $[a_k, b_k; c_k, d_k]$, а с ним — и содержащаяся в нем часть $\mathcal{M}_k$ множества $\mathcal{M}$. Таким образом, все множество $\mathcal{M}_k$ покрывается одной областью σ_0, между тем как выбирали его мы так, чтобы оно не могло быть покрыто никаким конечным числом областей σ. Полученное противоречие и доказывает лемму.

В тех применениях леммы Бореля, которые читатель найдет в следующем n° и в других частях курса, в качестве множества $\mathcal{M}$ будет фигурировать обыкновенно замкнутая область. Но иной раз придется применять ее и к другим замкнутым множествам, например, к непрерывной кривой.

176. Новые доказательства основных теорем. 1° 1-я теорема Вейерштрасса. Функция $f(x, y)$ предположена непрерывной в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$. Следовательно, каждую точку

(x', y') этой области можно окружить такой окрестностью σ', что в ее пределах (если через ε обозначено наперед взятое число)

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

или

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon.$$

Таким образом, в области σ' функция оказывается ограниченной.

Применяя лемму Бореля к системе $\Sigma = \{\sigma'\}$ этих окрестностей, можно выделить из Σ конечное число окрестностей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, которые в совокупности покрывают всю область $\mathscr{D}$. Если

$$m_i \leqslant f(x, y) \leqslant M_i \quad \text{в} \quad \sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то, взяв в качестве m наименьшее из m_i, а в качестве M — наибольшее из M_i, будем иметь в $\mathscr{D}$

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

ч. и тр. д.

2° Теорема Кантора. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, каждую точку (x', y') окружим такой окрестностью

$$\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta'; y' - \delta', y' + \delta'),$$

что для любой принадлежащей ей точки (x, y) (из $\mathscr{D}$) будет

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если (x_0, y_0) есть другая подобная же точка, так что и

$$|f(x', y') - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то в результате

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Заменим каждый прямоугольник σ' вчетверо меньшим прямоугольником, с тем же центром,

$$\bar{\sigma}' = \left(x' - \frac{\delta'}{2}, x' + \frac{\delta'}{2}; y' - \frac{\delta'}{2}, y' + \frac{\delta'}{2}\right).$$

Система $\bar{\Sigma} = \{\bar{\sigma}'\}$ этих открытых прямоугольников покрывает область $\mathscr{D}$. По лемме Бореля, из нее выделяем конечную систему прямоугольников

$$\bar{\sigma}_i = \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}; y_i - \frac{\delta_i}{2}, y_i + \frac{\delta_i}{2}\right)$$

с тем же свойством. Наконец, обозначим через δ наименьшее из всех чисел $\frac{\delta_i}{2}$.

Пусть (x, y) и (x_0, y_0) — любые две точки области $\mathscr{D}$, для которых

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta. \tag{10}$$

Точка (x_0, y_0) принадлежит одной из окрестностей $\bar{\sigma}_i$, например, окрестности

$$\bar{\sigma}_{i_0} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2};\ y_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ y_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right),$$

так что

$$|x_0 - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}, \quad |y_0 - y_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}.$$

Из (10), так как $\delta \leqslant \frac{\delta_{i_0}}{2}$, следует, что $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$ и $|y - y_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$. Отсюда

$$|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}, \quad |y - y_{i_0}| < \delta_{i_0},$$

и точки (x, y), (x_0, y_0) обе оказываются лежащими в одной из первоначально определенных окрестностей

$$(x_{i_0} - \delta_{i_0},\ x_{i_0} + \delta_{i_0};\ y_{i_0} - \delta_{i_0},\ y_{i_0} + \delta_{i_0}),$$

а тогда, по доказанному, для них выполняется (9).

Итак, удалось по $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta > 0$ независимо от положения точки (x_0, y_0), чем и доказано, что функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна.

§ 3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

177. Частные производные и частные дифференциалы. Для упрощения записи и изложения мы ограничимся случаем функций от трех переменных; все дальнейшее, однако, справедливо и для функций любого числа переменных.

Итак, пусть в некоторой (открытой) области $\mathcal{D}$ имеем функцию $u = f(x, y, z)$; возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в этой области. Если мы припишем y и z постоянные значения y_0 и z_0 и будем изменять x, то и u будет функцией от одной переменной x (в окрестности x_0); можно поставить вопрос о вычислении ее производной в точке $x = x_0$. Придадим этому значению x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

которое можно было бы назвать ее частным приращением (по x), поскольку оно вызвано изменением значения лишь одной переменной. По самому определению производной, она представляет собою предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется *частной производной функции $f(x, y, z)$ по x в точке (x_0, y_0, z_0)*.

Как видим, в этом определении не все координаты равноправны, так как y_0 и z_0 наперед фиксированы, а x меняется, стремясь к x_0. Частную производную обозначают одним из символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\text{*)};\quad u'_x,\ f'_x(x_0, y_0, z_0);\quad D_x u,\ D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

Заметим, что буква x внизу в этих обозначениях лишь указывает, по какой из переменных берется производная, и не связана с тем, в какой точке (x_0, y_0, z_0) мы производную вычисляем **).

Аналогично, считая x и z постоянными, а y переменным, можно рассматривать предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$

Предел этот называется *частной производной функции* $f(x, y, z)$ *по* y *в точке* (x_0, y_0, z_0) и обозначается символами, аналогичными предыдущим:

$$\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y};\quad u'_y,\quad f'_y(x_0, y_0, z_0);\quad D_y u,\quad D_y f(x_0, y_0, z_0).$$

Точно так же определяется и *частная производная функции* $f(x, y, z)$ *по* z *в точке* (x_0, y_0, z_0).

Самое вычисление частной производной по существу не представляет ничего нового по сравнению с вычислением обыкновенной производной.

Примеры. 1) Пусть $u = x^y$ $(x > 0)$; частные производные этой функции будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

Первая из них вычисляется как производная степенной функции от x (при $y = \text{const}$), а вторая — как производная показательной функции от y (при $x = \text{const}$).

2) Если $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

---

*) Якоби (C. G. Jacobi) предложил пользоваться круглым ∂ (вместо прямого d) в обозначении именно частной производной.

**) И здесь цельные символы

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad f'_x,\quad D_x f$$

можно рассматривать как функциональные обозначения для частной производной по x. Подобных примечаний впредь мы повторять уже не станем.

3) Для $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

4) Пусть $z=y\cdot f(x^2-y^2)$, где $f(u)$—произвольная функция (имеющая производную). Показать, что для z всегда выполняется соотношение:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2},$$

какова бы ни была функция f.

По правилу дифференцирования сложной функции (означая штрихом производную по u) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f'(x^2-y^2)\cdot 2x=2xy\cdot f'(x^2-y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2\cdot f'(x^2-y^2),$$

и отсюда

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=2y\cdot f'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}\cdot f(x^2-y^2)-2y\cdot f'(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}.$$

5) Сторона a треугольника определяется по двум другим сторонам b, c и заключенному между ними углу α так:

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}.$$

Тогда

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}}=\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{a},\quad \frac{\partial a}{\partial\alpha}=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{a}.$$

6) Известная из физики формула Клапейрона $pV=RT$ (где $R=\text{const}$) выражает связь между объемом V, давлением p и абсолютной температурой T одного моля идеального газа и определяет одну из величин p, V, T как функцию двух других. Если p, V — независимые переменные, а T — функция от них: $T=\frac{pV}{R}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}.$$

Если роль независимых играют переменные p и T, а V — функция от них: $V=\frac{RT}{p}$, то

$$\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}.$$

Пусть, наконец, V и T — независимые переменные p — функция от них: $p=\frac{RT}{V}$; тогда

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\quad \frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}.$$

Отсюда, между прочим, получается важное в термодинамике соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

Заметим, что обозначения Якоби частных производных (с круглыми ∂) следует рассматривать только как цельные символы, а не как частные или дроби. Полученное только что соотношение с особенной ясностью подчеркивает это существенное различие в характере обозначений обыкновенных и частных производных: если бы выписанные в левой части производные были обыкновенными, то можно было бы их рассматривать как частные одних и тех же дифференциалов, и по сокращении мы получили бы 1, вместо -1; здесь же, как мы видим, этого делать нельзя.

Произведение частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ на произвольное приращение Δx называется *частным дифференциалом по x функции u*; его обозначают символом

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x.$$

Если и здесь *под дифференциалом dx независимой переменной x разуметь приращение* Δx, то предыдущая формула напишется так:

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx.$$

Аналогично,

$$d_y u=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy,\quad d_z u=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz.$$

Таким образом, мы видим, что можно было бы и частные производные представить в виде дробей

$$\frac{d_x u}{dx},\quad \frac{d_y u}{dy},\quad \frac{d_z u}{dz},$$

но при непременном условии указывать, по какой переменной берется дифференциал.

178. Полное приращение функции. Если, исходя из значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ независимых переменных, придать всем трем некоторые приращения Δx, Δy, Δz, то функция $u=f(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=$$
$$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0),$$

которое называется *полным приращением* функции.

В случае функции $y=f(x)$ от одной переменной, в предположении существования в точке x_0 (конечной) производной $f'(x_0)$, для приращения функции имеет место формула [96 (2)]

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

где α зависит от Δx и $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Мы имеем в виду установить аналогичную формулу для приращения функции $u=f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=\\=f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y+\\+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y+\gamma\cdot\Delta z,\end{aligned}\qquad(1)$$

где α, β, γ зависят от Δx, Δy, Δz и вместе с ними стремятся к нулю. Однако, на этот раз придется наложить на функцию более тяжелые ограничения.

Теорема. *Если частные производные $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ существуют не только в точке (x_0, y_0, z_0), но и в некоторой ее окрестности, и кроме того непрерывны (как функции от x, y, z) в этой точке, то имеет место формула* (1).

Для доказательства представим полное приращение функции Δu в виде:

$$\begin{aligned}\Delta u=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)]+\\+[f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)]+\\+[f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)].\end{aligned}$$

Каждая из этих разностей представляет частное приращение функции лишь по одной переменной. Так как мы предположили существование частных производных в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то — при достаточной малости Δx, Δy, Δz — к этим разностям по отдельности можно применить формулу конечных приращений [112]*); мы получим

$$\begin{aligned}\Delta u=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z+\Delta z)\cdot\Delta x+\\+f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z)\cdot\Delta y+f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z)\cdot\Delta z.\end{aligned}$$

Если положить здесь:

$$\begin{aligned}f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)=f'_x(x_0, y_0, z_0)+\alpha,\\f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z)=f'_y(x_0, y_0, z_0)+\beta,\\f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z)=f'_z(x_0, y_0, z_0)+\gamma,\end{aligned}$$

то придем к выражению (1) для Δu. При $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ аргументы производных в левых частях этих равенств стремятся к x_0, y_0, z_0 (ибо θ, θ_1, θ_2 — правильные дроби), следовательно, сами производные, ввиду предположенной непрерывности их для этих значений переменных, стремятся к производным

---

*) Если взять, например, первую разность, то ее можно рассматривать как приращение функции $f(x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ от одной переменной x, отвечающее переходу от $x=x_0$, к $x=x_0=\Delta x$. Производная по x от этой функции, т. е. $f'_x(x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$, по предположению, существует для всех значений x в промежутке $[x_0, x_0+\Delta x]$, так что формула конечных приращений применима, и т. д.

в правых частях, а величины α, β, γ — к нулю. Этим и завершается доказательство.

Доказанная теорема дает возможность, между прочим, установить, что *из существования и непрерывности в данной точке частных производных вытекает непрерывность в этой точке самой функции;* действительно, если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, то, очевидно, и $\Delta u \to 0$.

Для того чтобы формулу (1) можно было написать в более компактной форме, введем в рассмотрение выражение:

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

— расстояние между точками

$$(x_0, y_0, z_0) \text{ и } (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z).$$

Пользуясь им, можем написать:

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\rho}\right) \cdot \rho.$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через ε, будем иметь

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \varepsilon \cdot \rho,$$

где ε зависит от Δx, Δy, Δz и стремится к нулю, если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ или, короче, если $\rho \to 0$. Итак, формулу (1) можно теперь переписать в виде:

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \rho, \quad (2)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Величина $\varepsilon \cdot \rho$, очевидно, может быть записана, как $o(\rho)$ (если распространить введенное в **60** обозначение и на случай функций нескольких переменных).

Заметим, что в нашем рассуждении не был формально исключен случай, когда приращения Δx, Δy, Δz порознь или даже все сразу равны 0. Таким образом, говоря о предельных соотношениях

$$\alpha \to 0, \ \beta \to 0, \ \gamma \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, мы понимаем их в широком смысле и не исключаем для этих приращений возможности в процессе их изменения обращаться в нуль. (Ср. аналогичное замечание в **96**).

При доказательстве предыдущей теоремы мы потребовали от функции нескольких переменных больше, чем в случае функции одной переменной. Для того чтобы показать, что без соблюдения этих требований формула (1) или (2) здесь могла бы оказаться и неприложимой, рассмотрим, в заключение, следующий пример (где для простоты мы имеем дело всего лишь с двумя независимыми переменными).

Определим функцию $f(x, y)$ равенствами:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{если } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Эта функция непрерывна на всей плоскости; для точки (0, 0) это следует из **167**, (5). Далее, существуют частные производные по x и по y также на всей плоскости. При $x^2+y^2>0$, очевидно,

$$f'_x(x, y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x, y)=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

В начальной же точке имеем: $f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0$; это непосредственно вытекает, по самому определению частных производных, из того, что $f(x, 0)=f(0, y)=0$. Легко показать, что в точке (0, 0) непрерывность производных нарушается (для первой из них достаточно, например, положить $y=x=\frac{1}{n}\to 0\Big)$.

Формула вида (1) или (2) для нашей функции в точке (0, 0) не имеет места. В самом деле, если допустить противное, то было бы

$$\Delta f(0, 0)=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

где $\varepsilon\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Положив, в частности, $\Delta y=\Delta x>0$, имели бы

$$\frac{1}{2}\Delta x=\varepsilon\cdot\sqrt{2}\cdot\Delta x, \quad \text{откуда} \quad \varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

и ε не стремилось бы к нулю при $\Delta x\to 0$, что противоречит допущению.

Аналогичную особенность в точке (0, 0) проявляет и функция

$$f(x, y)=\sqrt{|xy|}.$$

Предоставляем читателю разобраться в этом.

179. Полный дифференциал. В случае функции $y=f(x)$ одной переменной, мы рассматривали в **103** вопрос о представимости ее приращения $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ в виде

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \quad (A=\text{const}). \tag{3}$$

Оказалось [**104**], что для возможности такого представления *необходимо и достаточно*, чтобы существовала в точке $x=x_0$ конечная производная $f'(x_0)$, причем написанное равенство осуществляется именно при $A=f'(x_0)$. Линейную часть

$$A\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x=y'_x\cdot\Delta x$$

приращения функции мы и называли ее дифференциалом, dy.

Переходя к функции нескольких, например, трех переменных: $f(x, y, z)$, определенной в некоторой (скажем, открытой) области $\mathcal{D}$, естественно поставить аналогичный вопрос о представимости приращения

$$\Delta u=\Delta f(x_0, y_0, z_0)=$$
$$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)$$

в виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+C\cdot\Delta z+o(\rho), \tag{4}$$

где A, B и C — постоянные, а $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Как и в **103**, легко показать, что если имеет место разложение (4), то в точке (x_0, y_0, z_0) существуют частные производные по каждой из переменных, причем

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = B, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = C.$$

Действительно, например, полагая в (4) $\Delta y = \Delta z = 0$ и $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x},$$

откуда и следует, что существует

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A.$$

Таким образом, соотношение (4) всегда осуществляется только в виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + o(\rho) \quad (5)$$

или — в более короткой записи —

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + o(\rho). \quad (5^*)$$

Однако, в то время как в случае функции одной переменной существования производной $y'_x = f'(x_0)$ в рассматриваемой точке было уже и достаточно для наличия соотношения (3), в нашем случае существование частных производных

$$u'_x = f'_x(x_0, y_0, z_0), \quad u'_y = f'_y(x_0, y_0, z_0), \quad u'_z = f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

еще не обеспечивает разложения (4). Для случая функции двух переменных мы это видели на примере в предыдущем n°. Там же, в теореме, были указаны достаточные условия для выполнения соотношения (4): это — существование частных производных в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и их непрерывность в этой точке. Впрочем, легко показать, что эти условия отнюдь не необходимы для формулы (5) или (5*). Это, собственно говоря, следует уже из того, что для функции одной переменной (которую, если угодно, можно рассматривать и как функцию от любого числа переменных) подобные условия не необходимы.

При наличии формулы (5) *функция* $f(x, y, z)$ *называется дифференцируемой в точке* (x_0, y_0, z_0) *и* (только в этом случае!) *выражение*

$$u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u_z \cdot \Delta z = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z,$$

т. е. линейная часть приращения функции называется ее (полным) дифференциалом и обозначается символом du или $df(x_0, y_0, z_0)$.

В случае функции нескольких переменных утверждение: «функция дифференцируема» в данной точке, как видим, уже не равнозначаще с утверждением «функция имеет частные производные по всем переменным» в этой точке, но означает нечто б о л ь ш е е. Впрочем, мы обычно будем предполагать существование и н е п р е р ы в н о с т ь частных производных, а это уже п е р е к р ы в а е т дифференцируемость.

Под дифференциалами независимых переменных dx, dy, dz уславливаются разуметь п р о и з в о л ь н ы е приращения Δx, Δy, Δz *); поэтому можно написать:

$$df(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)\,dz$$

или

$$du = u'_x\cdot dx + u'_y\cdot dy + u'_z\cdot dz.$$

П о л н ы й дифференциал оказывается равным сумме ч а с т н ы х дифференциалов [177].

180. Геометрическая интерпретация для случая функции двух переменных. Желая дать геометрическое истолкование сказанному выше, аналогичное геометрическому истолкованию производной и дифференциала функции одной переменной [91, 104], вернемся к понятию касательной к кривой $\mathscr{K}$ в данной на ней точке M_0.

Мы определили касательную M_0T (рис. 99) как предельное положение секущей M_0M при стремлении $\overline{M_0M}$ к нулю [91].

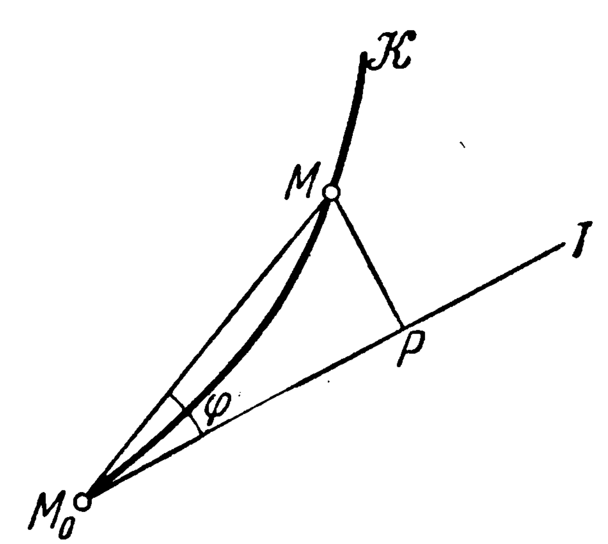


Рис. 99.

Очевидно, можно дать и такое, равносильное этому, определение:

Прямая M_0T называется к а с а т е л ь н о й к кривой $\mathscr{K}$ в точке M_0 на ней, если расстояние $\overline{MP}$ переменной точки M кривой $\mathscr{K}$ от прямой M_0T, при стремлении расстояния $\overline{M_0M}$ к нулю, является бесконечно малой в ы с ш е г о порядка, чем $\overline{M_0M}$ (т. е. если отношение $\overline{MP}/\overline{M_0M}$ при этом стремится к нулю **).

---

*) Е с л и отождествить дифференциал н е з а в и с и м о й п е р е м е н н о й x с дифференциалом x, как ф у н к ц и и от независимых переменных x, y, z, то, по общей формуле, можно написать

$$dx = x'_x\cdot\Delta x + x'_y\cdot\Delta y + x'_z\cdot\Delta z = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + 0\cdot\Delta z = \Delta x,$$

тогда равенство $dx = \Delta x$ оказывается д о к а з а н н ы м.

**) А это значит, что стремится к нулю $\sin\varphi$, а с ним и угол φ между секущей M_0M и прямой M_0T (см. рис.).

Рассмотрим теперь некоторую поверхность $\mathscr{S}$ и на ней точку M_0 (рис. 100).

Аналогично определению касательной прямой, дадим определение касательной плоскости:

Плоскость M_0K называется ***касательной плоскостью*** *к поверхности $\mathscr{S}$ в точке M_0 на ней, если расстояние $\overline{MP}$ переменной точки M поверхности $\mathscr{S}$ от этой плоскости, при стремлении расстояния $\overline{M_0M}$ к нулю, является бесконечно малой* ***высшего порядка,*** *чем $\overline{M_0M}$* (т. е. если отношение $\overline{MP}/\overline{M_0M}$ при этом стремится к нулю).

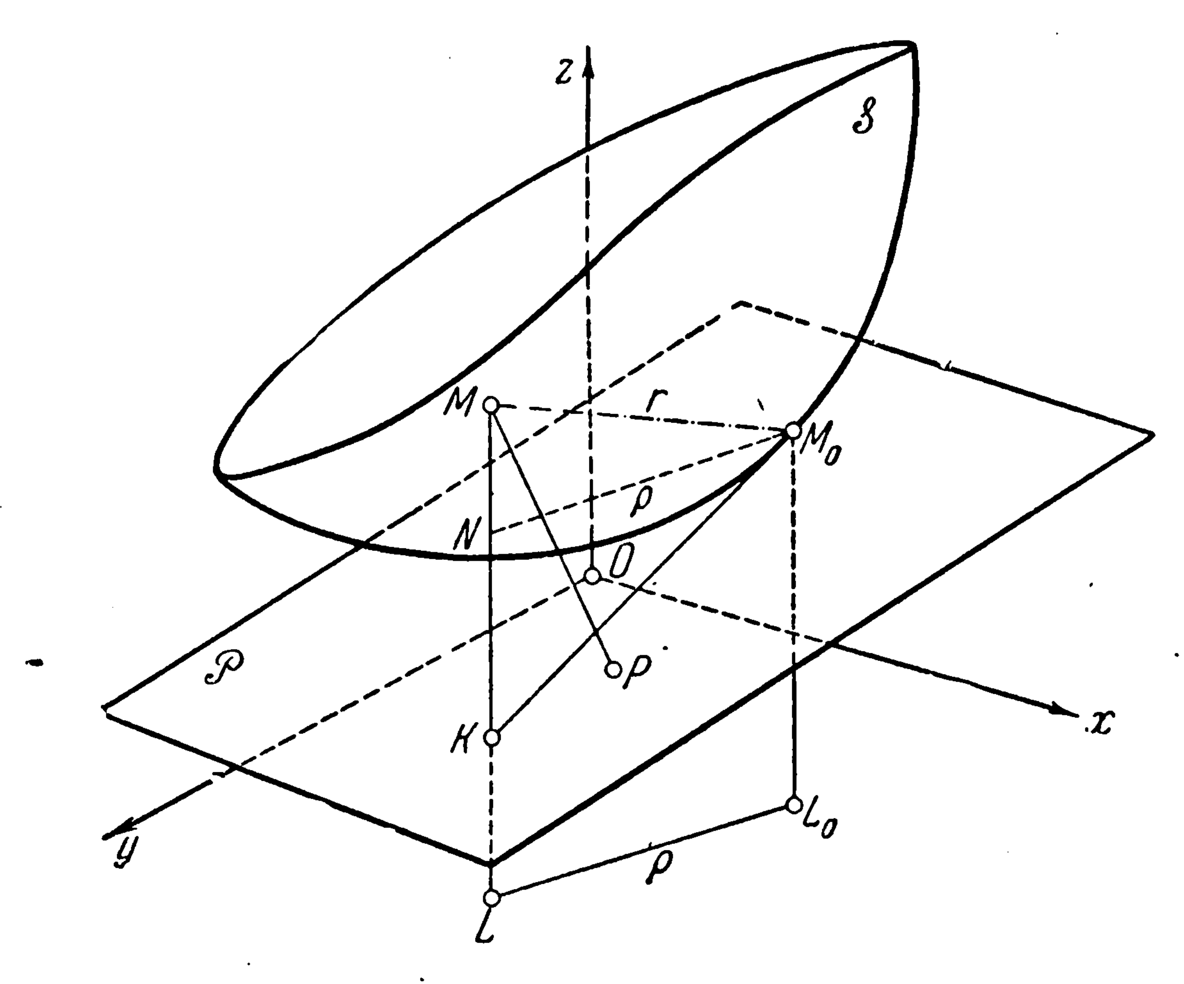


Рис. 100.

Пусть [159] поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$ в прямоугольных координатах.

Возьмем на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ [где $z_0=f(x_0, y_0)$] и исследуем, при каких условиях плоскость $\mathscr{P}$, проходящая через точку M_0 и имеющая уравнение

$$Z-z_0=A(X-x_0)+B(Y-y_0), \tag{6}$$

удовлетворяет этому определению.

Проведем ML параллельно оси z (см. рис. 100) и из M_0 опустим на ML перпендикуляр M_0N. Так как отрезок $\overline{MK}$ отличается от $\overline{MP}$ постоянным множителем (не равным нулю), то вместо отношения $\overline{MP}/\overline{MM_0}$, можно рассматривать отношение $\overline{MK}/\overline{MM_0}$. Покажем теперь, что, не меняя по существу определения касательной плоскости, можно, наконец, заменить здесь расстояние $r=\overline{MM_0}$ отрезком $\rho=\overline{M_0N}$.

Если при $M \to M_0$ стремится к нулю отношение $\overline{MK}/\rho$, то это тем более верно для отношения $\overline{MK}/r$, ибо $r > \rho$. Предположим теперь, что $\overline{MK}/r$ стремится к нулю, и установим, что тогда стремится к нулю и $\overline{MK}/\rho$. Для этого достаточно доказать, что при $M \to M_0$ отношение $\frac{r}{\rho}$ остается ограниченным.

Отрезок $\overline{MK}$, с точностью до знака, равен выражению

$$z - Z = z - z_0 - A(x - x_0) - B(y - y_0)$$

или, если ввести обозначения

$$x - x_0 = \Delta x, \quad y - y_0 = \Delta y, \quad z - z_0 = \Delta z = \Delta f(x_0, y_0),$$

— выражению

$$\Delta z - (A\,\Delta x + B\,\Delta y).$$

Ввиду сделанного предположения, по крайней мере для точек M, достаточно близких к M_0, будем иметь

$$|\Delta z - (A\,\Delta x + B\,\Delta y)| < \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

так что

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} < |A| \cdot \frac{|\Delta x|}{\rho} + |B| \cdot \frac{|\Delta y|}{\rho} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2}$$

или (усиливая неравенство)

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} < |A| + |B| + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\Delta z|}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} < 2(|A| + |B|) + 1,$$

а следовательно,

$$\frac{r}{\rho} = \sqrt{1 + \left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2} < 2(|A| + |B| + 1),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, плоскость (6) будет касательной к поверхности в том и только в том случае, если отношение

$$\frac{\Delta z - (A\,\Delta x + B\,\Delta y)}{\rho}$$

стремится к нулю вместе с ρ, т. е. если имеет место разложение

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

[ср. (4)].

Мы приходим к окончательному заключению: *для того, чтобы поверхность $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имела касательную плоскость*), необходимо и достаточно, чтобы при $x = x_0$, $y = y_0$ функция $f(x, y)$ была дифференцируема.*

*) Имеется в виду плоскость, не параллельная оси z.

Так как при выполнении этого условия коэффициенты A и B необходимо равны частным производным $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$, то касательная плоскость выразится уравнением

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(Y - y_0).$$

Обычно значков при x, y, z не пишут; тогда уравнение касательной плоскости принимает вид

$$Z - z = f'_x(x, y)\cdot(X - x) + f'_y(x, y)\cdot(Y - y). \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что если пересечь поверхность и касательную к ней плоскость любой плоскостью, параллельной оси z и проходящей через точку M_0, то в сечении с первой получается некоторая кривая, а в сечении со второй — касательная к ней прямая *).

В частности, в сечении поверхности плоскостями $Y = y_0$ и $X = x_0$ получатся кривые, угловые коэффициенты которых **) соответственно равны:

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ и } f'_y(x_0, y_0).$$

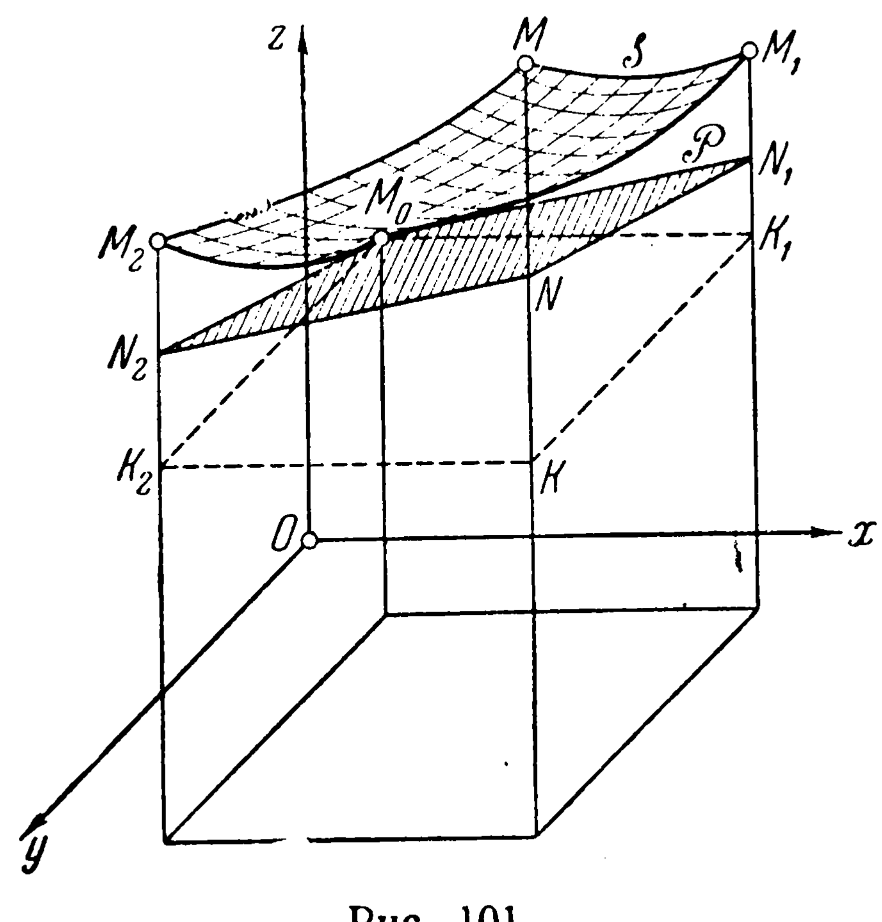


Рис. 101.

На рис. 101 отрезки K_1M_1, K_2M_2 и KM представляют частные и полное приращение функции, а отрезки K_1N_1, K_2N_2 и KN — частные и полный ее дифференциалы [ср. n° **104** и рис. 44].

181. Производные от сложных функций. Пусть имеем функцию

$$u = f(x, y, z),$$

определенную в (открытой) области $\mathscr{D}$, причем каждая из переменных x, y, z в свою очередь, является функцией от переменной t в некотором промежутке:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Пусть, кроме того, при изменении t точки (x, y, z) не выходят за пределы области $\mathscr{D}$.

Подставив значения x, y и z в функцию f, получим сложную функцию:

$$u = f(\varphi(t), \ \psi(t), \ \chi(t)).$$

---

*) Ниже [234], будет рассмотрен более общий вопрос о касательных к любым кривым, проведенным по поверхности через данную точку.

**) Легко сообразить, по отношению к каким координатным системам вычисляются эти угловые коэффициенты.

Предположим, что u имеет по x, y и z непрерывные частные производные u'_x, u'_y, u'_z *) и что x'_t, y'_t и z'_t существуют. Тогда можно доказать существование производной сложной функции и вместе с тем вычислить ее.

Действительно, придадим переменной t некоторое приращение Δt, тогда x, y и z получат соответственные приращения Δx, Δy и Δz, функция же u получит приращение Δu.

Представив приращение функции u в форме (1) (это мы можем сделать, так как предположили существование непрерывных частных производных u'_x, u'_y, u'_z), получим

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

где α, β, $\gamma \to 0$ при Δx, Δy, $\Delta z \to 0$. Разделив обе части равенства на Δt, будем иметь

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Устремим теперь приращение Δt к нулю; тогда Δx, Δy, Δz будут стремиться к нулю, так как функции x, y и z от t непрерывны (мы предположили существование производных x'_t, y'_t и z'_t), а потому α, β, γ также будут стремиться к нулю. В пределе получим:

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t. \tag{8}$$

Видим, что при сделанных предположениях производная сложной функции действительно существует. Если воспользоваться дифференциальным обозначением, то формулу (8) можно записать так:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{9}$$

Теперь рассмотрим тот случай, когда x, y и z зависят не от одной переменной t, а от нескольких переменных; например,

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v).$$

Кроме существования и непрерывности частных производных функции $f(x, y, z)$ *), мы предполагаем здесь существование производных от функций x, y, z по t и v.

После подстановки функций φ, ψ и χ в функцию f мы будем иметь некоторую функцию от двух переменных t и v, и возникает вопрос о существовании и вычислении частных производных u'_t и u'_v. Но этот случай не отличается существенно от уже изученного, ибо при вычислении частной производной функции от двух переменных мы одну из переменных фиксируем, и у нас остается функция только

---

*) Собственно говоря, достаточно предположить дифференцируемость функции $u = f(x, y, z)$.

от одной переменной. Следовательно, для этого случая формула (8) остается без изменения, а формулу (9) нужно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{9*}$$

182. Примеры. 1) Рассмотрим степенно-показательную функцию

$$u=x^y.$$

Положив $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и продифференцировав по только что выведенному правилу дифференцирования сложной функции, получим известную уже нам формулу Г. В. Лейбница и И. Бернулли:

$$u'_t=y\cdot x^{y-1}\cdot x'_t+x^y\cdot\ln x\cdot y'_t.$$

Раньше мы установили ее (в других обозначениях) с помощью искусственного приема [**99**, 23)].

2) Пусть $u=f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные, и вместо x, y и z подставлено:

$$x=\eta-\zeta,\ y=\zeta-\xi,\ z=\xi-\eta.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial \zeta}=-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.$$

3) Если (при тех же предположениях относительно функции f), сохраняя x независимой переменной, положить

$$y=y(x) \text{ и } z=z(x),$$

где функции $y(x)$, $z(x)$ дифференцируемы по x, то u, как сложная функция от x, будет иметь производную:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

или

$$\frac{du}{dx}=f'_x(x, y(x), z(x))+f'_y(x, y(x), z(x))\cdot y'(x)+ \\ +f'_z(x, y(x), z(x))\cdot z'(x).$$

Здесь само x играет роль переменной t в формуле (8).

4) Если же обе переменные x, y оставить независимыми, а вместо z подставить функцию

$$z=z(x, y),$$

имеющую частные производные по x и по y, то для сложной функции $u=f(x, y, z(x, y))$ будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x, y, z(x, y))+f'_z(x, y, z(x, y))\cdot z'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x, y, z(x, y))+f'_z(x, y, z(x, y))\cdot z'_y(x, y).$$

5) В качестве дальнейшего примера применения формулы (9) рассмотрим вопрос о дифференцировании определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}$$

в предположении, что элементы его a_{ik} (i, $k=1, 2, \ldots, n$) суть функции от некоторого параметра t, для которых существуют производные по t: $\frac{da_{ik}}{dt}$.

Вспоминая разложение определителя по элементам k-го столбца

$$\Delta = A_{1k}\cdot a_{1k} + A_{2k}\cdot a_{2k} + \ldots + A_{ik}\cdot a_{ik} + \ldots + A_{nk}\cdot a_{nk},$$

где алгебраические дополнения $A_{1k}, \ldots, A_{nk}$ элемента a_{ik} не содержат, приходим к заключению, что

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}} = A_{ik}.$$

В таком случае, по формуле (9),

$$\frac{d\Delta}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}\cdot\frac{da_{ik}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}.$$

Заметим, что сумма $\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}$ дает разложение определителя, отличающегося от данного лишь тем, что элементы его k-го столбца заменены их производными по t. Отсюда правило: *производная определителя* Δ *равна сумме* n *определителей, получающихся из* Δ *заменой, поочередно, элементов его* 1*-го,* 2*-го,* $\ldots$*,* n*-го столбца производными.*

Формула (8) сходна с формулой $u'_t = u'_x\cdot x'_t$ для случая функции u от одной переменной x. Подчеркнем, однако, снова разницу в условиях, при которых были выведены эти формулы. Если u зависит от одной переменной, то достаточно было предположить существование производной u'_x; в случае же нескольких переменных — мы вынуждены были предположить еще и непрерывность производных u'_x, u'_y, ... Следующие примеры показывают, что одного существования этих производных для действительности формулы (8) вообще недостаточно.

6) Определим функцию $u=f(x, y)$, полагая:

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad (\text{при } x^2+y^2>0), \quad f(0, 0)=0.$$

Эта функция, как мы видели, имеет частные производные во всех точках, не исключая и начальной (0, 0), причем

$$f'_x(0, 0)=0, \quad f'_y(0, 0)=0;$$

заметим, что именно в этой точке производные терпят разрыв.

Если ввести новую переменную t, положив $x=t$ и $y=t$, то получим сложную функцию от t. По формуле (8) производная этой функции при $t=0$ была бы равна

$$u'_t = u'_x\cdot x'_t + u'_y\cdot y'_t = 0.$$

Но, с другой стороны, если на деле подставить значения x и y в данную функцию $u=f(x, y)$, получим

$$u = \frac{t^2\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}t.$$

Продифференцировав теперь непосредственно по t, будем иметь $u'_t = \frac{1}{2}$ при любом значении t, значит и при $t=0$.

Оказывается, что формула (8) в данном случае неприменима.

7) Поведение функции $u=f(x, y)$ определяемой равенствами

$$f(x, y)=\frac{x^{\frac{5}{3}}\cdot y}{x^2+y^2} \quad (\text{при } x^2+y^2>0),\ f(0, 0)=0,$$

в точке (0, 0) вполне аналогично. Взяв здесь $x=y=t$, получим сложную функцию $u=\frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}}$, которая при $t=0$ имеет бесконечные односторонние производные. Если же положить: $x=t$, а

$$y=t^{\frac{4}{3}}\sin\frac{1}{t} \text{ при } t\neq 0 \text{ и } y=0 \text{ при } t=0,$$

то сложная функция, определяемая равенствами:

$$u=\frac{t\cdot\sin\frac{1}{t}}{1+t^{\frac{2}{3}}\cdot\sin^2\frac{1}{t}} \text{ при } t\neq 0,\ u=0 \text{ при } t=0,$$

при $t=0$ никакой производной иметь не будет.

183. Формула конечных приращений. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\mathscr{D}$ и имеет непрерывные частные производные f'_x, f'_y, f'_z внутри этой области (т. е. во всякой внутренней ее точке). Рассмотрим две точки из $\mathscr{D}$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \text{ и } M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z),$$

которое можно соединить прямолинейным отрезком M_0M_1, целиком лежащим в области $\mathscr{D}$.

Тогда имеет место формула:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0, z_0)&=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)=\\&=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z)\cdot\Delta x+\\&\qquad+f'_y(\ldots)\cdot\Delta y+f'_z(\ldots)\cdot\Delta z\\&\qquad(0<\theta<1),\end{aligned} \tag{10}$$

вполне аналогичная известной формуле конечных приращений для функции одной переменной [112, (2)].

Для доказательства ее положим в функции $f(x, y, z)$

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\ y=y_0+t\cdot\Delta y,\ z=z_0+t\cdot\Delta z \tag{11}$$

(при $0\leqslant t\leqslant 1$), т. е. рассмотрим нашу функцию именно в точках прямолинейного отрезка M_0M_1. Сложная функция от t

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+t\cdot\Delta y, z_0+t\cdot\Delta z)$$

непрерывна во всем промежутке [0, 1] [170], а внутри него имеет производную, которая, по формуле (8), равна

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t \cdot \Delta x,\ y_0 + t \cdot \Delta y,\ z_0 + t \cdot \Delta z) \cdot \Delta x + \\ + f'_y(\ldots) \cdot \Delta y + f'_z(\ldots) \cdot \Delta z,$$

ибо из (11)

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x, \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y, \quad \frac{dz}{dt} = \Delta z.$$

Применим к функции $F(t)$ в промежутке [0, 1] формулу (2) n° **112**:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad (0 < \theta < 1).$$

Если заметить, что, по определению функции $F(t)$,

$$F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) - f(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

и подставить вместо производной $F'(\theta)$ только что найденное выражение (при $t = \theta$), то и придем к формуле (10).

В качестве простого примера приложения доказанной формулы упомянем следующее предложение:

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывная в замкнутой и связной области $\mathscr{D}$, внутри области имеет частные производные равные 0:

$$f'_x = f'_y = f'_z = 0,$$

то эта функция во всей области $\mathscr{D}$ сводится к постоянной:

$$f = \text{const}.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$ будут любые две точки области $\mathscr{D}$. Ввиду предположенной связности $\mathscr{D}$, эти точки можно соединить ломаной, не выходящей за пределы $\mathscr{D}$. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ есть следующая за M_0 вершина ломаной, то, положив в (11) $x_0 + \Delta x = x_1$, $y_0 + \Delta y = y_1$, $z_0 + \Delta z = z_1$, сразу получим

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_0, y_0, z_0);$$

переходя так последовательно от вершины к вершине, окончательно найдем:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0),$$

ч. и тр. д.

184. Производная по заданному направлению. Частные производные функции $f(M) = f(x, y, z)$ по x, по y, по z выражают «скорость изменения» функции по направлению координатных осей. Например, f'_x есть «скорость изменения» функции по x: точка предполагается перемещающейся лишь по параллели оси x. Между тем,

во многих физических вопросах может представить интерес также «скорость изменения» функции $f(M)$ и по другим направлениям. Так будет, например, в случае, если дано поле температуры, т. е. если задана температура $f(M)$ в каждой точке M рассматриваемого тела. Законы распределения и перемещения тепла существенно зависят от скорости падения (или роста) температуры по всем направлениям. Уточним понятие «скорости изменения» или производной функции по любому заданному направлению. Здесь мы также будем иметь случай применить формулу (9).

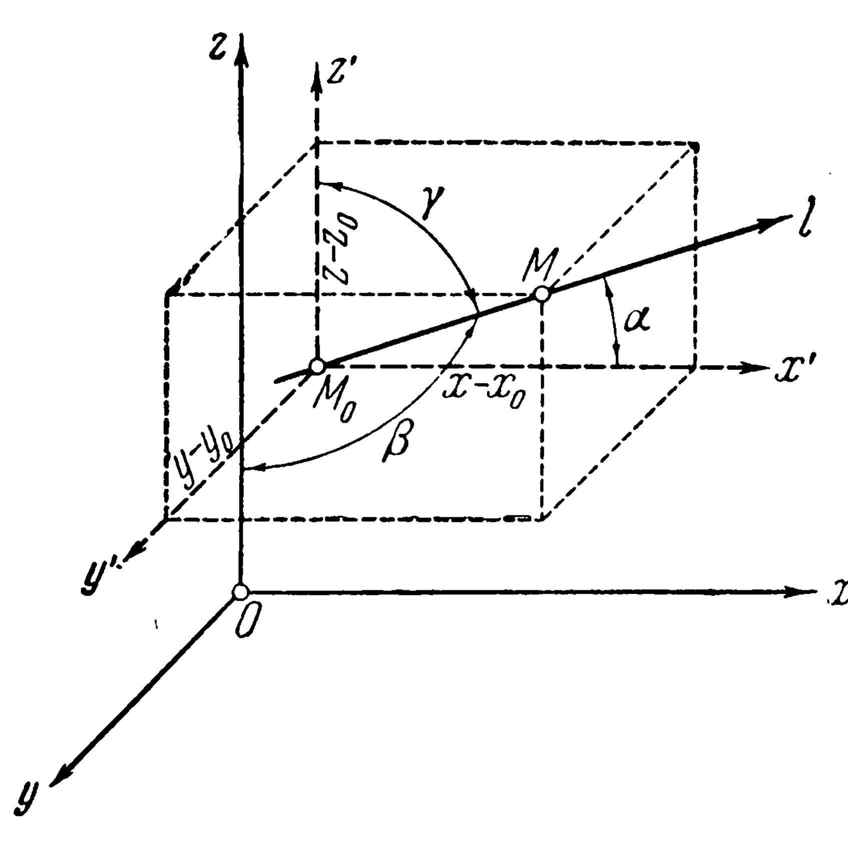


Рис. 102.

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой (открытой) области. Рассмотрим любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой области и любую направленную прямую (ось) l, проходящую через эту точку (рис. 102).

Пусть $M(x, y, z)$ — какая-нибудь другая точка этой оси, M_0M — длина отрезка между M_0 и M, взятая с надлежащим знаком, именно со знаком плюс, если направление M_0M совпадает с направлением оси l, и со знаком минус — в противном случае.

Пусть M неограниченно приближается к M_0. *Предел*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M},$$

называется производной от функции $f(M)$ *по направлению* l (или вдоль оси l) и обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}.$$

Эта производная характеризует «скорость изменения» функции в точке M_0 по направлению l.

В частности, как упоминалось, и обычные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ тоже можно рассматривать как производные «по направлению».

Предположим теперь, что функция $f(x, y, z)$ имеет в рассматриваемой области непрерывные частные производные *). Пусть ось l образует с осями координат углы α, β, γ. Докажем, что при сде-

*) См. сноску на стр. 387.

ланных предположениях производная по направлению l существует и выражается формулой

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\gamma. \tag{12}$$

Для доказательства заметим, что если положить $M_0M = t$, то будем иметь

$$x - x_0 = t \cdot \cos\alpha, \quad y - y_0 = t \cdot \cos\beta, \quad z - z_0 = t \cdot \cos\gamma.$$

Таким образом, вдоль оси l координаты x, y, z можно рассматривать, как функции t:

$$x = x_0 + t \cdot \cos\alpha, \quad y = y_0 + t \cdot \cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma, \tag{13}$$

а функцию $f(M) = f(x, y, z)$ — как сложную функцию $\varphi(t)$ от t. При этом точке M_0 соответствует значение t, равное нулю.

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

если только существует производная $\varphi'(0)$. Но производная $\varphi'(t)$ при сделанных предположениях существует и выражается по формуле (9) следующим образом:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Используя формулы (13), получаем

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos\gamma,$$

откуда и следует наше утверждение.

Зададимся теперь вопросом: *по какому направлению функция в данной точке будет всего быстрее возрастать?* Конечно, этот вопрос имеет смысл лишь в том случае, если производные

$$a = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \tag{14}$$

не равны одновременно нулю (ибо иначе — производная по любому направлению была бы нулем).

В этом предположении прибегнем к преобразованию выражения (12):

$$a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{\dots}} \cdot \cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{\dots}} \cdot \cos\beta + \frac{c}{\sqrt{\dots}} \cdot \cos\gamma\right).$$

Дроби в скобках можно рассматривать, как направляющие косинусы некоторого направления g:

$$\frac{a}{\sqrt{\ldots}} = \cos\lambda, \quad \frac{b}{\sqrt{\ldots}} = \cos\mu, \quad \frac{c}{\sqrt{\ldots}} = \cos\nu,$$

и тогда мы получим

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot(\cos\lambda\cdot\cos\alpha+\cos\mu\cdot\cos\beta+\cos\nu\cdot\cos\gamma).$$

Если, наконец, через (g, l) обозначить угол между направлениями g и l, то по известной формуле аналитической геометрии получим:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos(g, l). \tag{15}$$

Теперь ясно, что, если l отождествляется с g, эта производная достигнет наибольшего значения:

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Вектор $\vec{g}$, имеющий проекции (14) на оси координат, указывает направление наиболее быстрого возрастания функции, а его длина $|\vec{g}|$ дает величину соответствующей производной. Этот вектор называют *градиентом функции* $f(M)=f(x, y, z)$.

Переписав формулу (15) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\vec{g}|\cdot\cos(g, l),$$

легко усмотреть, что вектор, который получится если на направлении l отложить отрезок $\frac{\partial f}{\partial l}$, представляет собой попросту проекцию градиента на это направление.

185. Инвариантность формы (первого) дифференциала. Пусть функция $u=f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные u'_x, u'_y, u'_z, причем x, y, z, в свою очередь, являются функциями от новых переменных t и v:

$$x=\varphi(t, v), \quad y=\psi(t, v), \quad z=\chi(t, v),$$

также имеющими непрерывные же частные производные x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v. Тогда [181] не только существуют производные от сложной функции u по t и v, но эти производные также непрерывны по t и v, как это легко усмотреть из (8).

Если бы x, y и z были независимыми переменными, то, как мы знаем, (полный) дифференциал функции u был бы равен

$$du = u'_x\cdot dx + u'_y\cdot dy + u'_z\cdot dz.$$

В данном же случае u зависит — через посредство x, y, z — от переменных t и v. Следовательно, по отношению к этим переменным, дифференциал напишется так:

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv.$$

Но, в силу (8),

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t$$

и, аналогично,

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

Подставив эти значения в выражение для du, будем иметь:

$$du = (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t) \cdot dt + (u'_x \cdot x'_v + u'_y y'_v + u'_z \cdot z'_v) \cdot dv.$$

Перегруппируем члены следующим образом:

$$du = u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv).$$

Нетрудно видеть, что выражения, стоящие в скобках, суть не что иное, как дифференциалы функций x, y, z (от u и v), так что мы можем написать:

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

Мы пришли к той же самой форме дифференциала, что и в случае, когда x, y, z были независимыми переменными (но смысл символов dx, dy, dz здесь, конечно, уже другой).

Итак, *для функций нескольких переменных имеет место инвариантность формы (первого) дифференциала,* как и для функций одной переменной *).

Может случиться, что x, y и z будут зависеть от различных переменных, например,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t, w), \quad z = \chi(v, w).$$

В таком случае мы всегда можем считать, что

$$x = \varphi_1(t, v, w), \quad y = \psi_1(t, v, w), \quad z = \chi_1(t, v, w),$$

и все предыдущие рассуждения будут применимы и к этому случаю.

Следствия. Для случая, когда x и y были функциями одной переменной, мы имели следующие формулы:

$$d(cx) = c \cdot dx, \quad d(x \pm y) = dx \pm dy, \quad d(xy) = y \cdot dx + x \cdot dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$$

---

*) Отметим, что то же заключение справедливо и при одном предположении дифференцируемости всех рассматриваемых функций. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что результатом суперпозиции дифференцируемых функций будет также дифференцируемая функция.

Эти формулы верны и в том случае, когда x и y являются функциями любого числа переменных, т. е. когда

$$x=\varphi(t,\ v,\ \ldots),\quad y=\psi(t,\ v,\ \ldots).$$

Докажем, например, последнюю формулу.

Для этого примем сначала x и y за независимые переменные; тогда

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot dx-\frac{x}{y^2}\cdot dy=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}.$$

Видим, что при этом предположении дифференциал имеет тот же вид, что и для функций x и y одной переменной. На основании же инвариантности формы дифференциала можно утверждать, что эта формула справедлива и в том случае, когда x и y являются функциями любого числа переменных.

Доказанное свойство полного дифференциала и следствия из него позволяют упрощать вычисление дифференциалов, например:

1) $$d\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2+y^2},$$

2) $$d\,\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)\,dx-x\cdot d\,(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$
$$=\frac{(y^2+z^2-x^2)\,dx-2xy\cdot dy-2xz\cdot dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Так как коэффициентами при дифференциалах независимых переменных являются соответствующие частные производные, то отсюда сразу же получаются и значения этих последних. Например, для $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ имеем непосредственно

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

а для $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ получим сразу

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

[ср. 2) и 3) **177**].

186. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Аналогично дифференциалу функции от одной переменной [**108**] и полный дифференциал функции от нескольких переменных с успехом применяется в приближенных вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, например, мы имеем функцию $u=f(x,y)$, причем, определяя значения x и y, мы допускаем погрешности, скажем, Δx и Δy. Тогда и значение u, вычисленное по неточным значениям аргументов, также получится с погрешностью

$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$. Речь идет об оценке этой погрешности, если известны оценки погрешностей Δx и Δy.

Заменяя (приближенно) приращение функции ее дифференциалом (что оправдано лишь при достаточно малых значениях Δx и Δy), получим

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y. \tag{16}$$

Здесь и погрешности Δx, Δy, и коэффициенты при них могут быть как положительными, так и отрицательными; заменяя те и другие их абсолютными величинами, придем к неравенству

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|.$$

Если через δu, δx, δy обозначить максимальные абсолютные погрешности (или границы для абсолютных погрешностей), то, можно, очевидно, принять

$$\delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\delta y. \tag{17}$$

Приведем примеры.

1) Прежде всего, с помощью выведенных формул легко установить обычные в практике приближенных вычислений правила. Пусть $u = xy$ (где $x > 0$, $y > 0$), так что $du = y\,dx + x\,dy$; заменяя дифференциалы приращениями, получим $\Delta u = y\cdot\Delta x + x\cdot\Delta y$ [см. (16)] или, переходя к границам погрешностей [см. (17)]:

$$\delta u = y\cdot\delta x + x\cdot\delta y.$$

Деля обе части этого равенства на $u = xy$, придем к окончательной формуле

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}, \tag{18}$$

выражающей такое правило: (*максимальная*) *относительная погрешность произведения равна сумме* (*максимальных*) *относительных погрешностей сомножителей.*

Можно было бы поступить проще — сначала прологарифмировать формулу $u = x\cdot y$, а затем продифференцировать:

$$\ln u = \ln x + \ln y,\quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\,^{*)}\ \text{и т. д.}$$

Если $u = \dfrac{x}{y}$, то по этому методу найдем

$$\ln u = \ln x - \ln y,\quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y};$$

переходя к абсолютным величинам и к максимальным погрешностям, мы получим снова формулу (18). Таким образом (*максимальная*) *относительная погрешность частного равна сумме* (*максимальных*) *относительных погрешностей делимого и делителя.*

2) Частое применение находит исчисление погрешностей в топографии, главным образом при вычислении не измеренных непосредственно элементов треугольника — по измеренным его элементам. Приведем примеры из этой области.

---

*) Обращаем внимание читателя на то, что дифференциал $\ln u$ мы вычисляем так, как если бы u была независимой переменной, хотя на деле она является функцией от x и y [175]. Это замечание следует иметь в виду и ниже.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 103) катет $AB = b$ и прилежащий угол $\sphericalangle BAC = \alpha$ измерены; второй же катет a вычисляется по

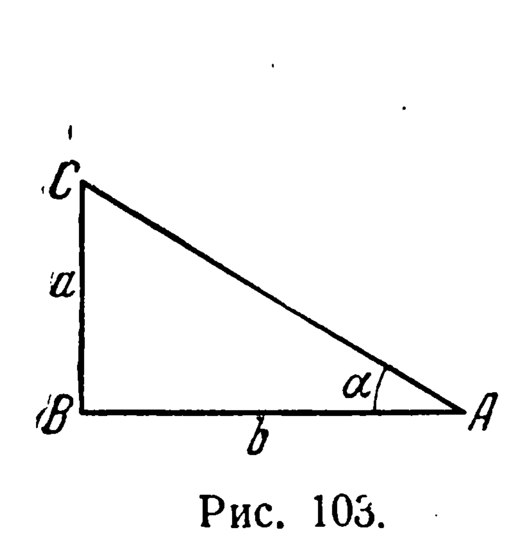


Рис. 103.

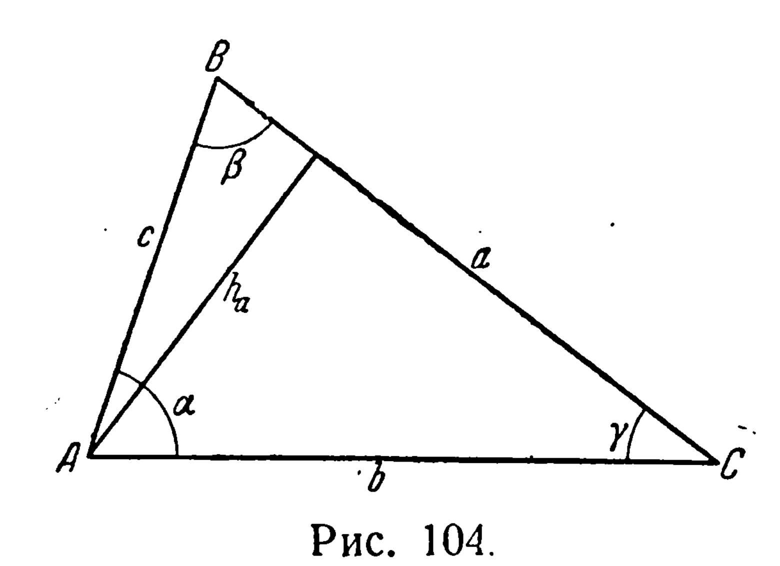


Рис. 104.

формуле: $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Как отражаются на значении a погрешности при измерении b и α?

Дифференцируя, получим

$$da = \operatorname{tg} \alpha \cdot db + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha,$$

так что и

$$\delta a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot \delta\alpha.$$

Пусть, например, измерения привели к результатам:

$$b = 121{,}56\ м \pm 0{,}05\ м, \quad \sphericalangle \alpha = 25°21'40'' \pm 12'',$$

так что

$$a = 57{,}62\ м.$$

Определяя по нашей формуле δa, положим в ней $\delta b = 0{,}05$, а $\delta\alpha = \frac{12''}{206265''}$ (ведь $\delta\alpha$ нужно выразить в радианах, а один радиан равен именно $\frac{60'' \cdot 60 \cdot 360}{2\pi} = 206265''$). Мы получим

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b = 0{,}0237, \quad \frac{b}{\cos^2 \alpha}\,\delta\alpha = 0{,}0087,$$

так что, округляя, можно считать $\delta a = 0{,}04$. Итак, $a = 57{,}62\ м \pm 0{,}04\ м$.

3) Найдем погрешность при определении стороны a косоугольного треугольника ABC (рис. 104) по формуле

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}\,.$$

Пользуясь результатами примера 5) n° **177**, можно по формуле (17) сразу написать:

$$\delta a = \frac{b - c \cdot \cos \alpha}{a} \cdot \delta b + \frac{c - b \cdot \cos \alpha}{a} \cdot \delta c + \frac{bc \cdot \sin \alpha}{a} \cdot \delta\alpha.$$

Из чертежа же имеем непосредственно:

$$b - c \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \gamma, \quad c - b \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \beta, \quad bc \cdot \sin \alpha = a \cdot h_a,$$

где h_a есть высота треугольника, опущенная из вершины A. Таким образом оказывается, что

$$\delta a = \cos \gamma \cdot \delta b + \cos \beta \cdot \delta c + h_a \cdot \delta\alpha;$$

по этой формуле легко судить о влиянии на δa отдельных погрешностей δb, δc, $\delta\alpha$,

187. Однородные функции. Как известно, однородными многочленами называются многочлены, состоящие из членов одного и того же измерения. Например, выражение

$$3x^2 - 2xy + 5y^2$$

есть однородный многочлен второй степени. Если умножить здесь x и y на некоторый множитель t, то весь многочлен приобретет множитель t во второй степени. Подобное обстоятельство имеет место для любого однородного многочлена.

Однако и функции более сложной природы могут обладать таким же свойством; если взять, например, выражение

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln \frac{x}{y},$$

то и оно приобретает множитель t^2 при умножении обоих аргументов x и y на t, уподобляясь в этом отношении однородному многочлену второй степени. Подобную функцию естественно также назвать однородной функцией второй степени.

Дадим общее определение:

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n аргументов, определенная в области $\mathscr{D}$, называется однородной функцией m-й степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель t функция приобретает этот же множитель в m-й степени, т. е. если тождественно выполняется равенство

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (19)$$

Для простоты мы ограничимся предположением, что $x_1, \ldots, x_n$ и t здесь принимают лишь положительные значения. Область $\mathscr{D}$, в которой мы рассматриваем функцию f, вместе с любой своей точкой $M(x_1, \ldots, x_n)$ предполагается содержащей и все точки вида $M_t(tx_1, \ldots, tx_n)$ при $t > 0$, т. е. весь луч, исходящий из начальной точки и проходящий через точку M.

Степень однородности m может быть любым вещественным числом; так, например, функция

$$x^\pi \cdot \sin \frac{x}{y} + y^\pi \cdot \cos \frac{x}{y}$$

является однородной функцией степени π от аргументов x и y.

Постараемся теперь получить общее выражение однородной функции степени m.

Пусть сперва $f(x_1, \ldots, x_n)$ есть однородная функция нулевой степени; тогда

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Положив $t = \frac{1}{x_1}$, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Если ввести функцию от $n-1$ аргументов:

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}) = f(1, u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

то окажется, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Итак, всякая однородная функция нулевой степени представляется в виде функции отношений всех аргументов к одному из них. Обратное, очевидно, также верно, так что предшествующее равенство дает общее выражение однородной функции нулевой степени.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть однородная функция m-й степени (и только в этом случае), отношение ее к x_1^m будет однородной функцией нулевой степени, так что

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Таким образом, мы получаем общий вид однородной функции степени m:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^m \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Пример:

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln\frac{x}{y} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x} - 1} \cdot \ln\frac{y}{x}.$$

188. Формула Эйлера. Предположим теперь, что однородная (степени m) функция $f(x, y, z)$ *) имеет в (открытой) области $\mathscr{D}$ непрерывные частные производные по всем аргументам. Фиксируя по произволу точку (x_0, y_0, z_0) из $\mathscr{D}$, в силу основного тождества (19), будем иметь для любого $t > 0$:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Продифференцируем теперь это равенство по t: левую часть равенства — по правилу дифференцирования сложной функции **), правую — просто как степенну́ю функцию. Получим

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 + \\ + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0 = mt^{m-1} \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

---

*) Лишь для упрощения письма мы ограничиваемся здесь случаем трех переменных.

**) Именно для того, чтобы иметь право применить это правило, мы и предположили непрерывность частных производных [181].

Если положить здесь $t=1$, то придем к следующей формуле:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot x_0+f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot y_0+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot z_0 = m\cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, для любой точки (x, y, z) имеет место равенство

$$f'_x(x, y, z)\cdot x+f'_y(x, y, z)\cdot y+f'_z(x, y, z)\cdot z = m\cdot f(x, y, z). \quad (20)$$

Это равенство носит название *формулы Эйлера* (L. Euler).

Мы видели, что этому равенству удовлетворяет любая однородная функция степени m, имеющая непрерывные частные производные. Покажем теперь, что и обратно — каждая функция, непрерывная вместе со своими частными производными и удовлетворяющая равенству Эйлера (20), необходимо является однородной функцией степени m.

Действительно, пусть $f(x, y, z)$ будет такой функцией. Фиксируя по произволу значения x_0, y_0, z_0, рассмотрим следующую функцию от t (при $t>0$):

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m}.$$

Она определена и непрерывна при всех $t>0$. Вычислив ее производную $\varphi'(t)$ по правилу дифференцирования дроби, получим также дробь, числитель которой равен

$$[f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0+ f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0]\cdot t - m\cdot f(tx_0, ty_0, tz_0).$$

Заменив в формуле Эйлера (20) x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0, видим, что этот числитель обращается в нуль, так что $\varphi'(t)=0$ и $\varphi(t)= c=\text{const}$ (при $t>0$). Чтобы определить постоянную c, положим $t=1$ в равенстве, определяющем $\varphi(t)$. Получим, что

$$c=f(x_0, y_0, z_0).$$

Итак,

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m}=f(x_0, y_0, z_0)$$

или

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^m\cdot f(x_0, y_0, z_0),$$

ч. и тр. д.

Можно сказать, что формула Эйлера в такой же мере характеризует однородную функцию степени m, как и основное равенство (19).

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

189. Производные высших порядков. Если функция $u = f(x, y, z)$*) имеет в некоторой (открытой) области $\mathcal{D}$ частную производную по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от x, y, z, может в свою очередь в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) иметь частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции $u = f(x, y, z)$ эти последние производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

Если первая производная была взята, например, по x, то ее производные по x, y, z обозначаются так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\, \partial z}$$

или

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)^{**}).$$

Аналогичным образом определяются производные 3-го, 4-го и т. д. порядков (третьи, четвертые, ... производные). Общее определение частной производной n-го порядка может быть дано индуктивно.

Заметим, что частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z^2}, \quad \ldots,$$

называется смешанной частной производной.

Примеры. 1) Пусть $u = x^4 y^3 z^2$; тогда:

$$\begin{aligned}
u'_x &= 4x^3y^3z^2, & u''_{xy} &= 12x^3y^2z^2,\\
u'_y &= 3x^4y^2z^2, & u''_{yx} &= 12x^3y^2z^2,\\
u'_z &= 2x^4y^3z, & u''_{zx} &= 8x^3y^3z,\\
u'''_{xyz} &= 24x^3y^2z, & u^{IV}_{xyzx} &= 72x^2y^2z,\\
u'''_{yxx} &= 36x^2y^2z^2, & u^{IV}_{yxxz} &= 72x^2y^2z,\\
u'''_{zxy} &= 24x^3y^2z, & u^{IV}_{zxyx} &= 72x^2y^2z.
\end{aligned}$$

---

*) Мы и здесь для простоты письма ограничиваемся случаем функции от трех переменных.

**) Разумеется, дифференциальные обозначения следует рассматривать как цельные символы. Квадрат ∂x^2 в знаменателе заменяет условно $\partial x\, \partial x$ и указывает на дифференцирование дважды по x; точно так же значок x^2 внизу заменяет xx. Это нужно иметь в виду и дальше.

2) Мы имели уже [177] частные производные для функции $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2};$$

вычислим теперь дальнейшие производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$$

и т. д.

3) Для функции $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ имеем последовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3x^2\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

аналогичные выражения получим и для $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Сложив их, убедимся, что функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

4) Пусть $y=f(x+at)+\varphi(x-at)$, где $a=\text{const}$, а $f(u)$, $\varphi(u)$ — две произвольные функции, имеющие первую и вторую производные. Показать, что y удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, каковы бы ни были функции f и φ.

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции находим *):

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x+at)+\varphi'(x-at),\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x+at)+\varphi''(x-at),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=f'(x+at)\cdot a+\varphi'(x-at)\cdot(-a),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=f''(x+at)\cdot a^2+\varphi''(x-at)\cdot(-a)^2=a^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\text{ ч. и тр. д.}$$

*) Штрихи в обозначениях f', φ', ... означают производные по аргументу u функций $f(u)$, $\varphi(u)$.

5) Доказать, что выражение

$$z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где φ и ψ означают произвольные функции (имеющие первую и вторую производные), удовлетворяет уравнению

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{y}{x^2} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right);$$

умножая последние три производные, соответственно, на x^2, $2xy$, y^2 и складывая, действительно получаем 0.

190. Теорема о смешанных производных. При рассмотрении примеров 1) и 2) бросается в глаза совпадение смешанных производных, взятых по одним и тем же переменным, но в разном порядке.

Нужно сразу же отметить, что это вовсе не вытекает с необходимостью из *определения* смешанных производных, так что существуют случаи, когда упомянутого совпадения нет.

Для примера рассмотрим функцию

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ (при } x^2 + y^2 > 0), \; f(0, 0) = 0.$$

Имеем

$$f'_x(x, y) = y \cdot \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] \text{ (при } x^2 + y^2 > 0),$$

$$f'_x(0, 0) = 0.$$

Придав x частное значение, равное нулю, будем иметь при любом y (в том числе и при $y = 0$): $f'_x(0, y) = -y$. Продифференцировав эту функцию по y, получим $f''_{xy}(0, y) = -1$. Отсюда следует, в частности, что в точке (0, 0) будем иметь

$$f''_{xy}(0, 0) = -1.$$

Вычислив таким же образом f''_{yx} в точке (0, 0), получим

$$f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

Итак, для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Тем не менее, подмеченное на примерах совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирований, не

случайно: оно имеет место в широком классе случаев — при соблюдении определенных условий. Начнем со следующей простой теоремы.

Теорема. *Предположим, что* 1) $f(x, y)$ *определена в (открытой) области* $\mathscr{D}$, 2) *в этой области существуют первые производные* f'_x *и* f'_y, *а также вторые смешанные производные* f''_{xy} *и* f''_{yx} *и, наконец,* 3) *эти последние производные* f''_{xy} *и* f''_{yx}, *как функции* x *и* y, *непрерывны в некоторой точке* (x_0, y_0) *области* $\mathscr{D}$. *Тогда в этой точке*

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение.

$$W=\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0+k)+f(x_0, y_0)}{hk},$$

где h, k отличны от нуля, например, положительны, и притом настолько малы, что в $\mathscr{D}$ содержится весь прямоугольник $[x_0, x_0+h; y_0, y_0+k]$; такими мы их фиксируем до конца рассуждения.

Введем теперь вспомогательную функцию от x:

$$\varphi(x)=\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k},$$

которая в промежутке $[x_0, x_0+h]$, в силу 2), имеет производную

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x, y_0+k)-f'_x(x, y_0)}{k}$$

и, следовательно, непрерывна. С помощью этой функции выражение W, которое равно

$$W=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k}-\right.$$
$$\left.-\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}\right], \tag{2}$$

можно переписать в виде:

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}.$$

Так как для функции $\varphi(x)$ в промежутке $[x_0, x_0+h]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа [112], то мы можем, по формуле конечных приращений, преобразовать выражение W так:

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k}$$
$$(0<\theta<1).$$

Пользуясь существованием второй производной $f''_{xy}(x, y)$, снова применим формулу конечных приращений, на этот раз — к функции от y: $f'_x(x_0+\theta h, y)$ в промежутке $[y_0, y_0+k]$. Окончательно, получим

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) \quad (0<\theta, \theta_1<1). \tag{3}$$

Но выражение W содержит x и y, с одной стороны, и h и k, с другой, одинаковым образом. Поэтому можно обменять их роли и, введя вспомогательную функцию

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h,\ y)-f(x_0,\ y)}{h},$$

путем аналогичных рассуждений получить результат:

$$W=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k),\quad (0<\theta_2,\ \theta_3<1). \tag{4}$$

Из сопоставления (3) и (4), находим:

$$f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k).$$

Устремив теперь h и k к нулю, перейдем в этом равенстве к пределу. Ввиду ограниченности множителей θ, θ_1, θ_2, θ_3, аргументы и справа и слева стремятся, соответственно, к x_0, y_0. А тогда в силу 3) окончательно и получим:

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=f''_{yx}(x_0,\ y_0),\ \text{ч. и тр. д.}$$

Таким образом, непрерывные смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} всегда равны.

В приведенном выше примере эти производные

$$f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}\ (x^2+y^2>0)$$

не имеют вовсе предела при $x\to 0$, $y\to 0$ и, следовательно, в точке (0, 0) терпят разрыв: к этому случаю наша теорема естественно неприложима.

Интересно поставить в связь вопрос о равенстве (1) с вопросом о повторных пределах, рассмотренным в n° **168**. Если предположить существование первых производных, то, написав выражение W в виде (2), легко усмотреть, что

$$\lim_{h\to 0} W=\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{h}\quad (h=\text{const}) \tag{5}$$

и, аналогично,

$$\lim_{k\to 0} W=\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k}\quad (k=\text{const}). \tag{5*}$$

Тогда, по самому определению производной,

$$f''_{yx}(x_0,\ y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} W, \tag{6}$$

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} W. \tag{6*}$$

Таким образом, вопрос о существовании и равенстве смешанных производных тождественен с вопросом о существовании и равенстве повторных пределов для выражения W (зависящего от h и k).

Это замечание позволяет следующим образом усилить доказанную теорему.

Предположим, помимо существования первых производных, существование лишь одной из смешанных производных, например, $f''_{xy}(x,y)$ *в окрестности точки* (x_0, y_0) *(исключая даже саму эту точку). Пусть, далее, существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f''_{xy}(x, y) = A.$$

Отсюда уже вытекает существование в точке (x_0, y_0) *обеих смешанных производных и равенство* (1)*).

Действительно, исходя из сделанных предположений, можно, как и выше, прийти к равенству (3), а затем, пользуясь существованием предела функции $f''_{xy}(x,y)$ в точке (x_0,y_0), установить существование двойного предела при одновременном стремлении h и k к нулю:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} W = A.$$

Но простые пределы (5) и (5*), по предположению, существуют: тогда по теореме n° **168**, существуют также повторные пределы (6) и (6*) и равны двойному. А это и значит, что существуют и равны между собой производные $f''_{xy}(x_0,y_0)$ и $f''_{yx}(x_0, y_0)$.

191. Обобщение. Обратимся, наконец, к доказательству общей теоремы о смешанных производных:

Теорема. *Пусть функция* $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от* n *переменных определена в (открытой)* n*-мерной области* $\mathcal{D}$ *и имеет в этой области всевозможные частные производные до* $(k-1)$*-го порядка включительно и смешанные производные* k*-го порядка, причем все эти производные непрерывны в* $\mathcal{D}$.

При этих условиях значение любой k*-й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.*

Доказательство. Для $k=2$ теорема уже доказана, так что, например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Действительно, чтобы свести этот случай к первой теореме, достаточно заметить, что при вычислении этих производных можно всем прочим переменным (кроме x_i и x_j) приписать постоянные значения, причем названные производные, непрерывные по всей совокупности переменных, будут непрерывны и по переменным x_i и x_j, при фиксировании остальных. Пусть теперь $k > 2$.

*) Это предложение принадлежит Шварцу (H. A. Schwarz).

Докажем сначала нашу теорему для того случая, когда при вычислении производной k-го порядка произведена перестановка только между двумя последовательными дифференцированиями, т. е. докажем справедливость равенства

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_h} \partial x_{i_{h+1}} \ldots \partial x_{i_k}} = \\ = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{h+1}} \partial x_{i_h} \ldots \partial x_{i_k}}. \qquad (7)$$

(Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_h, i_{h+1}, \ldots, i_k$ есть некоторое размещение из n значков $1, 2, \ldots, n$ по k, с возможными повторениями.)

Произведя последовательно необходимые для вычисления этих производных дифференцирования, видим, что производные $(h-1)$-го порядка в обоих случаях одинаковы. Применив к ним уже доказанную для $k=2$ теорему, получим, что и производные $(h+1)$-го порядка равны. Дальше же в обоих случаях нужно производить одинаковые операции, которые и приведут к одинаковым результатам.

Итак, равенство (7), действительно, справедливо, и теорема для этого случая доказана. Но так как всякая перестановка элементов может быть достигнута рядом перестановок двух последовательных элементов, то теорема доказана и в общем случае: при условии непрерывности соответствующих производных, всегда можно переставлять между собою дифференцирования по различным переменным.

Непрерывность производных мы впредь всегда будем предполагать, так что для нас порядок последовательных дифференцирований будет безразличен. Это дает нам право впредь при обозначении смешанной производной собирать вместе дифференцирования по одной и той же переменной. Если u есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то мы будем писать такую производную в виде

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k$; если же u есть функция от $x, y, \ldots, z$, то — в виде

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \ldots \partial z^{\gamma}},$$

где $\alpha+\beta+\ldots+\gamma=k$. Отдельные «показатели» $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ или $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ могут быть и нулями: наличие дифференциала с «показателем» 0 означает отсутствие на деле дифференцирования по соответствующей переменной.

192. Производные высших порядков от сложной функции. Пусть имеем функцию

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в свою очередь, суть функции от переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$:

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Относительно функций f и φ_i предположим, что они имеют непрерывные частные производные по всем переменным до k-го порядка включительно. Рассматривая u как сложную функцию от переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$:

$$u = F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

докажем, что *сложная функция имеет также все производные до k-го порядка включительно, и притом непрерывные.*

Точнее говоря, мы будем доказывать следующее предложение: каждая производная k-го порядка функции F существует и составляется из производных функции f (по ее аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_n$) и функций φ_i (по их аргументам $t_1, t_2, \ldots, t_m$), порядка не выше k-го, путем умножений и сложений.

Доказательство будем вести по методу математической индукции. Для $k = 1$ это утверждение справедливо; оно следует из выведенной ранее формулы для производной сложной функции [**181**].

Предположим, что теорема верна для производных всех порядков, низших, чем k; докажем, что она верна и для производных k-го порядка. Каждая k-я производная получается из некоторой $(k-1)$-й посредством дифференцирования по одному из t_j. Представим себе производную $(k-1)$-го порядка. Она по предположению получается из производных функций f и φ_i по переменным x и t порядков не выше $k-1$ путем умножений и сложений, т. е. представляет собой сумму произведений упомянутых производных. Дифференцируя по t_j любое из этих произведений, мы должны по очереди дифференцировать каждый из множителей. Если этот множитель есть производная порядка не выше $k-1$ от одной из функций φ, то в результате дифференцирования его мы получим производную той же функции порядка не выше k. Если же это будет производная порядка не выше $k-1$ функции f, то рассматривая эту производную как сложную функцию от переменных t и дифференцируя ее по t_j, мы заменим ее известной суммой произведений *).

В результате, для рассматриваемой производной k-го порядка получится, очевидно, выражение как раз указанного вида, что и доказывает наше утверждение.

Непрерывность производных сложной функции F вытекает из самого способа составления их из производных f и φ_i, поскольку последние предположены непрерывными.

---

*) Именно предположение о непрерывности всех производных функций f и обеспечивает право пользоваться известным нам правилом для вычисления производных от сложной функции [**181**].

193. Дифференциалы высших порядков. Пусть в области $\mathscr{D}$ задана некоторая функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда, как мы знаем, (полным) дифференциалом du называется следующее выражение:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n,$$

где $dx_1, \ldots, dx_n$ — произвольные приращения независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Мы видим, что du также является некоторой функцией от x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для u, то du будет иметь непрерывные частные производные первого порядка, и можно говорить о (полном) дифференциале от этого дифференциала du, $d(du)$, который называется дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от u; он обозначается символом d^2u.

Важно подчеркнуть, что *приращения $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ при этом рассматриваются как постоянные и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему.*

Таким образом, если воспользоваться правилами дифференцирования из n° **185**, будем иметь

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)=$$
$$=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\ldots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n$$

или, раскрывая,

$$d^2u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_1+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_2+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\,\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\,\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}dx_n\right)\cdot dx_n=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}dx_n^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_1\,dx_2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_3}dx_1\,dx_3+\ldots+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_3}dx_2\,dx_3+\ldots+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\,\partial x_n}dx_{n-1}\,dx_n.$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка, d^3u, и т. д Вообще, если дифференциал $(k-1)$-го порядка, $d^{k-1}u$, уже определен, то дифференциал k-го порядка d^ku

определяется как (полный) дифференциал от дифференциала ($k-1$)-го порядка*):

$$d^k u = d(d^{k-1}u).$$

Если для функции u существуют непрерывные частные производных всех порядков до k-го порядка включительно, то существование этого k-го дифференциала обеспечено. Но развернутые выражения последовательных дифференциалов становятся все более и более сложными. В целях упрощения их записи прибегают к следующему приему.

Прежде всего, в выражении первого дифференциала условно «вынесем букву u за скобки»; тогда его символически можно будет записать следующим образом:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot u.$$

Теперь замечаем, что если в выражении для второго дифференциала также «вынести u за скобки», то остающееся в скобках выражение формально представляет в раскрытом виде квадрат выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n;$$

поэтому второй дифференциал символически можно записать так:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2\cdot u.$$

Аналогично можно записать третий дифференциал и т. д. Это правило — общее: при всяком k будем иметь символическое равенство

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k\cdot u, \qquad (8)$$

которое можно понимать так: сначала многочлен, стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены «умножаются» на u (которое дописывается в числителях при ∂^k), и только после этого всем символам возвращается их значение как производных и дифференциалов.

Мы видели, что это правило верно при $k=1$, 2; поэтому достаточно показать, что если оно верно для $d^k u$, то оно будет также верно и для $d^{k+1}u$.

Допустив, что этот закон для $d^k u$ выполняется, будем иметь в развернутом виде:

$$d^k u = \sum C_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}\cdot\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1}\,dx_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n},$$

---

*) Легко установить понятие и о частных дифференциалах любого порядка; на этом останавливаться не будем.

где суммирование распространяется на всевозможные группы неотрицательных целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, удовлетворяющих условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k$, а

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_n!}$$

суть «полиномиальные» коэффициенты.

В предположении, что существуют непрерывные производные $(k+1)$-го порядка, продифференцируем предыдущую формулу; мы получим

$$d^{k+1}u = \sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \cdot \left\{ \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{\alpha_1+1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1+1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n} + \right.$$
$$+ \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2+1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2+1} \ldots dx_n^{\alpha_n} + \ldots$$
$$\left. \ldots + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n+1}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n+1} \right\}.$$

Очевидно, то же самое мы могли бы получить, *формально* перемножив символические выражения:

$$\sum C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)$$

и потом приписав u. Но это «произведение» есть не что иное, как

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{k+1},$$

так что

$$d^{k+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{k+1} \cdot u,$$

ч. и тр. д.

Из предыдущих рассуждений видим, что k-й дифференциал является *однородным целым многочленом степени* k, или, как говорят, является *формой* k-*й степени* относительно дифференциалов независимых переменных, коэффициентами при которых служат частные производные k-го порядка, умноженные на целочисленные постоянные («полиномиальные» коэффициенты).

Например, если $u = f(x, y)$, то

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2\, dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3,$$

$$d^4u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} dx^3\, dy + 6\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y^3} dx\, dy^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} dy^4,$$

и т. д. Положив конкретно $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, будем иметь

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}, \quad d^2u = \frac{2xy\,(dy^2 - dx^2) + 2\,(x^2 - y^2)\,dx\,dy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$d^3u = \frac{(6x^2y - 2y^3)\,dx^3 + (18xy^2 - 6x^3)\,dx^2\,dy}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{(6y^3 - 18x^2y)\,dx\,dy^2 + (2x^3 - 6xy^2)\,dy^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

и т. д.

Сложность выражения для дифференциала возрастает с увеличением числа переменных. Если $u = f(x, y, z)$, то, скажем, третий дифференциал d^3u в развернутом виде таков:

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} dz^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2\, dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial z} dx^2\, dz + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial z^2} dx\, dz^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial z} dy^2 dz + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z^2} dy\, dz^2 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} dx\, dy\, dz.$$

194. Дифференциалы сложных функций. Пусть мы теперь имеем сложную функцию:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где, в свою очередь,

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В этом случае первый дифференциал может быть сохранен в прежнем виде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

[на основании инвариантности формы первого дифференциала, **185**]. Но здесь уже $dx_1, \ldots, dx_n$ являются дифференциалами не независимых переменных, а функций и, следовательно, сами будут функциями, и могут не быть постоянными, как в предыдущем случае.

Вычислив теперь второй дифференциал нашей функции, будем иметь (если воспользоваться правилами дифференцирования n° **185**]:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d(dx_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d(dx_2) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d(dx_n) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2\cdot u + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n. \end{aligned}$$

Мы видим, что для дифференциала порядка выше первого инвариантность формы вообще не имеет места.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются линейными функциями от $t_1, t_2, \ldots, t_m$, т. е. когда

$$x_i = \alpha_i^{(1)}t_1 + \alpha_i^{(2)}t_2 + \ldots + \alpha_i^{(m)}t_m + \beta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\alpha_i^{(j)}$ и β_i — постоянные.

В этом случае будем иметь

$$dx_i = \alpha_i^{(1)}dt_1 + \ldots + \alpha_i^{(m)}dt_m = \alpha_i^{(1)}\Delta t_1 + \ldots + \alpha_i^{(m)}\Delta t_m = \Delta x_i.$$

Мы видим, что все первые дифференциалы функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этом случае постоянны, не зависят от $t_1, t_2, \ldots, t_m$; следовательно, применимы без изменений выкладки n° **193**. Отсюда вытекает, что *в случае замены независимых переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *линейными функциями от новых переменных* $t_1, t_2, \ldots, t_m$, *могут быть сохранены прежние выражения даже для дифференциалов высших порядков.* В них дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ совпадают с приращениями $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, но эти приращения не произвольны, а обусловливаются приращениями $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_m$.

Это простое и важное замечание (принадлежащее Коши) мы используем непосредственно в следующем n°.

195. Формула Тейлора. Мы уже знаем [**126** (13)], что функция $F(t)$, при условии существования ее $n+1$ первых производных, может быть следующим образом разложена по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + F'(t_0)\cdot(t-t_0) + \\ &+ \frac{1}{2!}F''(t_0)\cdot(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1) \end{aligned}$$

(дополнительный член взят в форме Лагранжа). Эту формулу, положив

$$t-t_0=\Delta t=dt, \quad F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0),$$

можно переписать так:

$$\Delta F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nF(t_0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\cdot\Delta t) \quad (0<\theta<1).$$

При этом важно подчеркнуть, что *величина dt, входящая в различных степенях в выражения дифференциалов справа, в точности равна тому приращению Δt, которое фигурирует в приращении функции слева.*

Именно в последней форме формула Тейлора распространяется и на случай функции от нескольких переменных.

Для упрощения письма ограничимся функцией $f(x, y)$ двух переменных.

Предположим, что в окрестности некоторой определенной точки (x_0, y_0) эта функция имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Придадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx и Δy так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, не вышел за пределы рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0).

Требуется доказать, что при сделанных предположениях относительно функции $f(x, y)$ справедливо следующее равенство:

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$
$$=df(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \quad (0<\theta<1), \tag{9}$$

причем *фигурирующие справа в различных степенях дифференциалы dx и dy равны именно тем приращениям Δx и Δy независимых переменных, которые породили приращение функции слева.*

Для доказательства [как и в n° **183**] введем в рассмотрение новую независимую переменную t, положив

$$x=x_0+t\cdot\Delta x, \quad y=y_0+t\cdot\Delta y \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{10}$$

Подставив эти значения x и y в функцию $f(x, y)$, получим сложную функцию от одной переменной t:

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x, \quad y_0+t\cdot\Delta y).$$

Мы уже знаем, что введенные нами в рассмотрение формулы (10) геометрически выражают прямолинейный отрезок, соединяющий точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Теперь мы видим, что вместо приращения

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, \quad y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0),$$

мы можем рассматривать приращение вспомогательной функции:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0),$$

так как оба приращения равны. Но $F(t)$ является функцией от одной переменной и имеет [**192**] $n+1$ непрерывных производных; следовательно, применив к ней уже выведенную ранее формулу Тейлора, получим

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!} d^2F(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!} d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(\theta) \quad (0 < \theta < 1); \quad (11)$$

при этом дифференциал dt, входящий в различных степенях справа, равен $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Теперь, пользуясь тем, что при линейной замене переменных свойство инвариантности формы имеет место и для высших дифференциалов, можем написать, что

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy = df(x_0, y_0),$$
$$d^2F(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx\, dy +$$
$$+ f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot dy^2 = d^2f(x_0, y_0),$$

и т. д. Наконец, для $(n+1)$-го дифференциала будем иметь

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y).$$

Важно отметить, что *здесь дифференциалы dx и dy ничем не отличаются от ранее взятых приращений* Δx и Δy. Действительно,

$$dx = \Delta x \cdot dt = \Delta x, \quad dy = \Delta y \cdot dt = \Delta y.$$

Подставив все это в разложение (11), мы и придем к требуемому разложению (9).

Читатель должен дать себе отчет в том, что, хотя в дифференциальной форме формула Тейлора для случая функции нескольких переменных имеет такой же простой вид, как и для случая функции одной переменной, — но в развернутом виде она гораздо сложнее. Вот как выглядят первые три ее члена даже для функции лишь двух переменных:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y] +$$
$$+ \frac{1}{2!} [f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot \Delta x \Delta y + f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot \Delta y^2] +$$
$$+ \frac{1}{3!} [f'''_{x^3}(x_0, y_0) \cdot \Delta x^3 + 3f'''_{x^2y}(x_0, y_0) \cdot \Delta x^2 \Delta y +$$
$$+ 3f'''_{xy^2}(x_0, y_0) \cdot \Delta x \Delta y^2 + f'''_{y^3}(x_0, y_0) \cdot \Delta y^3] + \ldots$$

Формула (9) имеет место и при $n = 0$; этот частный случай мы уже рассматривали в **183**.

§ 5. Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения

196. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия. Пусть функция

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

определена в области $\mathscr{D}$ и $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ будет внутренней точкой этой области.

Говорят, что *функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ имеет максимум (минимум), если ее можно окружить такой окрестностью*

$$(x_1^0 - \delta,\ x_1^0 + \delta;\ x_2^0 - \delta,\ x_2^0 + \delta;\ \dots;\ x_n^0 - \delta,\ x_n^0 + \delta),$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$
$$(\geqslant)$$

Если эту окрестность можно взять настолько малой, чтобы знак равенства был исключен, т. е. чтобы в каждой точке ее, кроме самой точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, выполнялось строгое неравенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$
$$(>)$$

то говорят, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ имеет место собственный максимум (минимум); в противном случае, максимум (минимум) называется несобственным.

Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин — экстремум.

Предположим, что наша функция в некоторой точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ имеет экстремум.

Покажем, что если в этой точке существуют (конечные) частные производные:

$$f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, f'_{x_n}(x_1^0, \dots, x_n^0),$$

то все эти частные производные равны нулю, так что *обращение в нуль частных производных первого порядка является необходимым условием существования экстремума.*

С этой целью положим $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$, сохраняя x_1 переменным; тогда у нас получится функция от одной переменной x_1:

$$u = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Так как мы предположили, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ существует экстремум (для определенности — пусть это будет максимум), то, в частности, отсюда следует, что в некоторой окрестности

$(x_1^0-\delta,\ x_1^0+\delta)$ точки $x_1=x_1^0$ необходимо должно выполняться неравенство

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

так что упомянутая выше функция одной переменной в точке $x_1=x_1^0$ будет иметь максимум, а отсюда по теореме Ферма [**109**] следует, что

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=0.$$

Таким же образом можно показать, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и остальные частные производные также равны нулю.

Итак, «подозрительными» по экстремуму являются те точки, в которых частные производные первого порядка все обращаются в нуль; их координаты можно найти, решив систему уравнений*)

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0,\\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0,\\ \cdots&\cdots\\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Как и в случае функции одной переменной, подобные точки называют *стационарными*.

Замечания. I. Необходимое условие существования экстремума в случае дифференцируемой функции кратко можно записать еще так:

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

так как, если $f'_{x_1}=f'_{x_2}=\ldots=f'_{x_n}=0$, то, каковы бы ни были $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, всегда

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f'_{x_1}\cdot dx_1+f'_{x_2}\cdot dx_2+\ldots+f'_{x_n}\cdot dx_n=0.$$

И обратно: если в данной точке тождественно выполняется это условие, то ввиду *произвольности* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ производные $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n}$ порознь равны нулю.

II. Обычно рассматриваемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет (конечные) частные производные во всей области, и тогда точки, доставляющие функции экстремумы, следует искать лишь среди *стационарных точек*. Однако встречаются случаи, когда в отдельных точках некоторые частные производные имеют бесконечные значения или вовсе не существуют (в то время как остальные

*) Для случая функции *двух* переменных $z=f(x, y)$ — в предположении ее дифференцируемости — условия

$$f'_x(x, y)=0, \quad f'_y(x, y)=0$$

допускают простое геометрическое толкование: *касательная плоскость* [см. 180 (6)] *к поверхности $z=f(x, y)$ в ее точке, отвечающей экстремуму, должна быть параллельна плоскости xy.*

равны 0). Подобные точки, собственно, тоже следует причислить к «подозрительным» по экстремуму, наряду со стационарными точками [см. ниже: **201**, 6)].

197. Достаточные условия (случай функции двух переменных). Как и в случае функции одной переменной, в стационарной точке вовсе не обеспечено наличие экстремума. Если для примера взять простую функцию $z = xy$, то для нее $z'_x = y$ и $z'_y = x$ обращаются одновременно в 0 в единственной — начальной точке (0, 0), в которой $z = 0$. В то же время непосредственно ясно, что в любой окрестности этой точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, и экстремума нет. На рис. 92 изображена поверхность (гиперболический параболоид), выражаемая уравнением $z = xy$; вблизи начальной точки она имеет *седлообразную* форму, изгибаясь в одной вертикальной плоскости вверх, а в другой — вниз.

Таким образом, встает вопрос об условиях, *достаточных* для существования (или отсутствия) экстремума в стационарной точке, то есть о том *исследовании*, которому эта точка должна быть дополнительно подвергнута.

Мы рассмотрим сначала случай функции двух переменных $f(x, y)$. Предположим, что эта функция определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), которая является стационарной, т. е. удовлетворяет условиям

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1a}$$

Чтобы установить, действительно ли наша функция имеет в точке (x_0, y_0) экстремум или нет, естественно обратиться к рассмотрению разности

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Разложим ее по формуле *Тейлора* [**195**], ограничиваясь двумя членами. Впрочем, так как точка (x_0, y_0) предположена стационарной, то первый член исчезает, и мы будем иметь просто

$$\Delta = \frac{1}{2!}\{f''_{x^2}\cdot\Delta x^2 + 2f''_{xy}\cdot\Delta x\Delta y + f''_{y^2}\cdot\Delta y^2\}. \tag{2}$$

При этом роль приращений Δx, Δy играют разности $x - x_0$, $y - y_0$ и производные все вычислены в некоторой точке

$$(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Введем в рассмотрение значения этих производных в самой испытуемой точке:

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \tag{3}$$

и положим

$$f''_{x^2}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) = a_{11} + \alpha_{11},$$
$$f''_{xy}(\ldots) = a_{12} + \alpha_{12}, \quad f''_{z^2}(\ldots) = a_{22} + \alpha_{22},$$

так что, ввиду непрерывности вторых производных,

$$\text{все } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0. \qquad (4)$$

Разность Δ напишется в виде:

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2 + \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\}.$$

Как мы установим, поведение разности Δ существенно зависит от знака выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

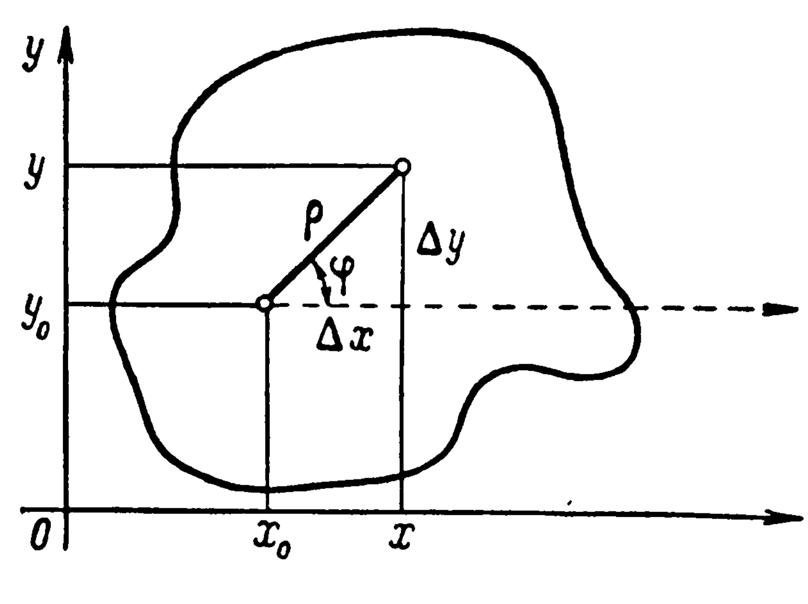


Рис. 105.

Для облегчения рассуждений введем «полярные координаты», взяв за полюс исходную точку (x_0, y_0) и проведя через нее полярную ось параллельно оси x (рис. 105). Пусть $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ есть расстояние между токами (x_0, y_0) и (x, y), а φ означает угол, составленный соединяющим их отрезком с полярной осью, так что

$$\Delta x = \rho \cos \varphi, \quad \Delta y = \rho \sin \varphi.$$

Тогда интересующая нас разность Δ напишется так:

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + \\ + \alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi\}.$$

1° **Пусть, сначала, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.**

В этом случае $a_{11}a_{22} > 0$, так что $a_{11} \neq 0$, и первый трехчлен в скобках $\{\ldots\}$ может быть представлен в виде:

$$\frac{1}{a_{11}} \cdot [(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\cdot\sin^2\varphi]. \qquad (5)$$

Отсюда ясно, что выражение в скобках $[\ldots]$ всегда положительно, так что упомянутый трехчлен при всех значениях φ, не обращаясь в нуль, сохраняет знак коэффициента a_{11}. Его абсолютная величина, как непрерывная в промежутке $[0, 2\pi]$ функция от φ, имеет (очевидно, положительное) наименьшее значение m [**85**]:

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geqslant m > 0.$$

С другой стороны, если обратиться ко второму трехчлену в скобках $\{\ldots\}$, то, ввиду (4),

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leqslant \\ \leqslant |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m$$

сразу для всех φ, если только ρ (а с ним и Δx, Δy) достаточно мало. Но тогда все выражение в скобках $\{\ldots\}$, а значит и разность Δ, будет сохранять тот же знак, что и первый из трехчленов, т. е. знак a_{11}.

Итак, если $a_{11} > 0$, то и $\Delta > 0$, т. е. функция в рассматриваемой точке (x_0, y_0) имеет минимум, а при $a_{11} < 0$ будет и $\Delta < 0$, т. е. налицо максимум.

2° Предположим теперь, что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

Остановимся на случае, когда $a_{11} \neq 0$, тогда можно и здесь использовать преобразование (5). При $\varphi = \varphi_1 = 0$ выражение в скобках $[\ldots]$ будет положительно, ибо сведется к a_{11}^2. Наоборот, если определить $\varphi = \varphi_2$ из условия

$$a_{11} \cos \varphi_2 + a_{12} \sin \varphi_2 = 0 \quad (\sin \varphi_2 \neq 0),$$

то это выражение сведется к $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \varphi_2$ и будет отрицательно. При достаточно малом ρ второй трехчлен в скобках $\{\ldots\}$ как при $\varphi = \varphi_1$, так и при $\varphi = \varphi_2$, будет сколь угодно мал, и знак Δ определится знаком первого трехчлена. Таким образом, в любой близости от рассматриваемой точки (x_0, y_0) — на лучах, определяемых углами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, разность Δ будет иметь значения противоположных знаков. Следовательно, в этой точке экстремума быть не может.

Если $a_{11} = 0$, и первый трехчлен в скобках $\{\ldots\}$ сведется к

$$2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = \sin \varphi \cdot (2a_{12} \cos \varphi + a_{22} \sin \varphi),$$

то, пользуясь тем, что наверное $a_{12} \neq 0$, можно определить угол $\varphi_1 \neq 0$ так, что

$$|a_{22}|\,|\sin \varphi_1| < 2\,|a_{12}| \cdot |\cos \varphi_1|.$$

Тогда при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2 = -\varphi_1$ упомянутый трехчлен будет иметь противоположные знаки, и рассуждение завершается, как и выше.

Итак, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в испытуемой стационарной точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, именно, собственный максимум при $a_{11} < 0$ и собственный минимум при $a_{11} > 0$. Если же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то экстремума нет.

В случае же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ для решения вопроса приходится привлекать высшие производные; этот «сомнительный» случай мы оставим в стороне.

Примеры. 1) Исследуем на максимум и минимум функцию

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0, \quad q > 0).$$

Вычислим частные производные:

$$z'_x = \frac{x}{p}, \quad z'_y = \frac{y}{q}.$$

Отсюда сразу видим, что единственной стационарной точкой является начало координат (0, 0).

Вычислив a_{11}, a_{12} и a_{22}, получим

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=\frac{1}{q};$$

отсюда $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$. Следовательно, в точке (0, 0) функции z имеет минимум; впрочем, это ясно и непосредственно.

Геометрическим образом нашей функции будет эллиптический параболоид с вершиной в начальной точке (ср. рис. 93).

2) $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$;

$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=-\frac{y}{q}.$$

И здесь видим, что стационарной точкой является (0, 0).

Вычисляем

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=-\frac{1}{q};$$

отсюда $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$. Следовательно, экстремума нет.

Геометрически мы здесь имеем дело с гиперболическим параболоидом, вершина которого — в начале координат.

3) $z=y^2+x^4$ или $z=y^2+x^3$;

в обоих случаях стационарной является точка (0, 0) и в ней $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$.

Наш критерий не дает ответа; при этом, в первом случае, как непосредственно видно, налицо минимум, а во втором — экстремума вовсе нет.

Замечание. Результаты настоящего n° впоследствии [236] окажутся тесно связанными с геометрическим вопросом о поведении кривой вблизи ее «особой» точки.

198. Достаточные условия (общий случай). Обратимся теперь к рассмотрению общего случая. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой стационарной точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Разлагая разность

$$\Delta=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

по формуле Тейлора, получим, как и выше,

$$\Delta=\frac{1}{2}\{f''_{x_1^2}\cdot\Delta x_1^2+f''_{x_2^2}\cdot\Delta x_2^2+\ldots+f''_{x_n^2}\cdot\Delta x_n^2+$$
$$+2f''_{x_1x_2}\cdot\Delta x_1\Delta x_2+2f''_{x_1x_3}\cdot\Delta x_1\Delta x_3+\ldots+2f''_{x_{n-1}x_n}\cdot\Delta x_{n-1}\Delta x_n\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}f''_{x_ix_k}\cdot\Delta x_i\Delta x_k,$$

где $\Delta x_i=x_i-x_i^0$; производные все вычислены в некоторой точке

$$(x_1^0+\theta\Delta x_1,\ x_2^0+\theta\Delta x_2, \ldots, x_n^0+\theta\Delta x_n)\quad (0<\theta<1).$$

Введем и здесь значения

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

так что

$$f''_{x_i x_k}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) = a_{ik} + \alpha_{ik} \text{ *)},$$

и

$$\alpha_{ik} \to 0 \text{ при } \Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0. \tag{7}$$

Теперь интересующее нас выражение Δ можно написать в виде

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k + \sum_{i,\,k=1}^{n} \alpha_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k\right\}. \tag{8}$$

На первом месте в скобках здесь стоит второй дифференциал функции f в рассматриваемой точке; он представляет собой однородный многочлен второй степени или, как говорят, *квадратичную форму* от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ **). От свойств этой квадратичной формы, как мы увидим, и зависит решение интересующего нас вопроса.

В высшей алгебре квадратичную форму

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{9}$$

от переменных $y_1, \ldots, y_n$ называют *определенной положительной* (*отрицательной*), если она имеет положительные (отрицательные) значения при всех значениях аргументов, не равных одновременно нулю. Так, например, форма

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

будет определенной положительной. Это становится ясным, если представить ее в виде

$$(2y_1 - 3y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2.$$

Мы не имеем возможности вдаваться здесь по этому поводу в подробности. Ограничимся упоминанием о принадлежащем Сильвестру (J. J. Sylvester) необходимом и достаточном условии для

*) Ясно, что $a_{ik} = a_{ki}$ (и $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$).

**) Вторая сумма имеет сходный вид, но в ней и коэффициенты сами суть функции от тех же переменных.

того, чтобы форма (9) была определенной и положительной. Оно выражается цепью неравенств:

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ \ldots$$

$$\ldots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0\ ^{*}).$$

Так как определенная отрицательная форма с изменением знака всех ее членов переходит в определенную положительную, и обратно, то отсюда легко найти и характеристику отрицательной формы: она дается цепью неравенств, которая получается из написанной выше изменением смысла неравенств через одно (начиная с первого).

Пользуясь этими понятиями, сформулируем достаточные для существования экстремума условия:

Если второй дифференциал, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k \tag{10}$$

со значениями (6) *коэффициентов оказывается определенной положительной* (*отрицательной*) *формой, то в испытуемой точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *будет собственный минимум* (*максимум*).

Для доказательства, введем расстояние

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}$$

между точками $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$. Вынося в (8) за скобку ρ^2 и полагая

$$\frac{\Delta x_i}{\rho}=\xi_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

перепишем выражение для Δ в виде

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left\{\sum_{i,\,k=2}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k+\sum_{i,\,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k\right\}. \tag{11}$$

---

*) Обращаем внимание на то, что член с $y_i y_k$ $(i \neq k)$ встречается в сумме (9) дважды, так что $a_{ik}=a_{ki}$ есть половина коэффициента при $y_i y_k$. Для нашего примера условие легко проверяется, если учесть, что

$$a_{11}=6,\quad a_{22}=5,\quad a_{33}=14,$$
$$a_{12}=a_{21}=2,\quad a_{13}=a_{31}=-4,\quad a_{23}=a_{32}=-1.$$

Числа ξ_i зараз не обращаются в нуль, поэтому, если форма (10) — положительная, первая сумма в скобках в формуле (11) имеет всегда положительный знак. Больше того, так как

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1, \tag{12}$$

то найдется такое постоянное положительное число m, что при всех возможных значениях ξ_i будет

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m.$$

Действительно, эта сумма представляет непрерывную функцию от аргументов ξ_i во всем пространстве, в частности же — и в множестве $\mathcal{M}$ тех точек $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, которые удовлетворяют соотношению (12) («сферическая поверхность»). Но множество это, как нетрудно видеть, замкнуто, т. е. содержит все свои точки сгущения; а тогда, по теореме Вейерштрасса [**173**, см. замечание после ее доказательства], названная сумма будет иметь в $\mathcal{M}$ и наименьшее значение m, необходимо положительное (как и все ее значения в $\mathcal{M}$).

С другой стороны, ввиду (7) вторая сумма в (11) для достаточно малых ρ, очевидно, будет по абсолютной величине уже меньше m, так что вся скобка окажется положительной. Итак, в достаточно малой сфере, с центром в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, разность Δ будет положительна, откуда и явствует, что в названной точке функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет собственный минимум.

Аналогично исчерпывается и случай, когда форма (10) будет определенной, но отрицательной.

199. Условия отсутствия экстремума. Квадратичная форма (9) называется *неопределенной*, если она способна принимать значения противоположных знаков. Такова, например, форма

$$6y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 8y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3.$$

Действительно, например, ее значение равно $+6$ при $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = 0$ и -1 при $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$.

Теперь мы можем дополнить доказанное в предыдущем n° предложение следующим образом:

Если квадратичная форма (10) *будет неопределенной, то в испытуемой точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *заведомо нет экстремума.*

Пусть при $\Delta x_i = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ форма (10) принимает положительное значение:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k > 0, \tag{13}$$

а при $\Delta x_i = \bar{h}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — отрицательное:

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}\bar{h}_i\bar{h}_k < 0.$$

Положим сначала

$$\Delta x_i = h_i t \quad \text{при} \quad t \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что отвечает передвижению вдоль по прямой, соединяющей точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n)$. Тогда, вынося в (8) за скобки t^2, получаем для этого случая

$$\Delta = \frac{t^2}{2}\left\{\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k + \sum_{i, k=1}^{n} \alpha_{ik}h_ih_k\right\}.$$

Первая сумма в скобках есть определенное положительное число, ввиду (13). Что же касается второй суммы, то ее коэффициенты стремятся к 0 при $t \to 0$, ибо при этом, очевидно, и все $\Delta x_i \to 0$. Значит, при достаточно малом t, выражение в фигурных скобках (а с ним и вся разность Δ) становится положительным, т. е. в точках упомянутой выше прямой, достаточно близких к $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, будет

$$f(x_1, \ldots, x_n) > f(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

С другой же стороны, если взять

$$\Delta x_i = \bar{h}_i t \text{ при } t \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. передвигаться вдоль другой прямой, соединяющей точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ с точкой $(x_1^0 + \bar{h}_i, \ldots, x_n^0 + \bar{h}_n)$, то в ее точках, достаточно близких к $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (т. е. отвечающих достаточно малому t), окажется

$$f(x_1, \ldots, x_n) < f(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Этим доказано, что в испытуемой точке не может быть ни максимума, ни минимума.

Может случиться, что форма (9), не будучи способна принимать значения разных знаков, все же не является определенной, ибо обращается в 0 не только при нулевых значениях аргументов: в этом случае форму называют *полуопределенной*. Это относится, например, к форме:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = (y_1 + y_2 + y_3)^2;$$

отрицательных значений она не принимает, но в 0 обращается всякий раз, когда

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

скажем, при $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$ и $y_3 = -1$.

Случай, когда форма (10) оказывается полуопределенной, есть «сомнительный» случай. В зависимости от поведения высших производных, в этом случае может быть экстремум, может его и не быть. В частности, высшие производные должны быть привлечены и тогда, когда все производные второго порядка в испытуемой точке обращаются в 0.

Исследованием «сомнительного» случая мы заниматься не будем.

Замечание. Для функции $f(x)$ одной переменной форма (10) сводится к одному члену

$$f''(x_0)\cdot\Delta x^2,$$

где x_0 — испытуемая точка. Эта «форма», очевидно, является определенной — положительной при $f''(x_0)>0$ и отрицательной при $f''(x_0)<0$. Таким образом, признак n° **137** есть частный случай изложенного в **198**.

Переходя к случаю функции $f(x, y)$ двух переменных, заметим, что и результат n° **197** также содержится в том, что было установлено в **198** и **199**. Легко усмотреть, что попутно в **197** было доказано, что форма

$$a_{11}\,\Delta x^2+2a_{12}\,\Delta x\,\Delta y+a_{22}\,\Delta y^2$$

в случае, если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, будет определенной (положительной при $a_{11}>0$ и отрицательной при $a_{11}<0$), в случае же, если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, — неопределенной.

200. Наибольшее и наименьшее значения функции. Примеры. Пусть функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$ и, за исключением, быть может, отдельных точек, имеет в этой области конечные частные производные. По теореме Вейерштрасса [**173**], в этой области найдется точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой функция получает наибольшее (наименьшее) из всех значений. Если точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ лежит внутри области $\mathcal{D}$, то в ней функция, очевидно, имеет максимум (минимум), так что в этом случае интересующая нас точка наверное содержится среди «подозрительных» по экстремуму точек. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция u может достигать и на границе области. Поэтому, *для того чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $u=f(x_1, \ldots, x_n)$ в области $\mathcal{D}$ нужно найти все внутренние точки, «подозрительные» по экстремуму, вычислить значения функции в них и сравнить со значениями функции в пограничных точках области: наибольшее (наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области.*

Поясним сказанное примерами.

1) Пусть требуется найти наибольшее значение функции

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

в треугольнике, ограниченном осью x, осью y и прямою $x+y=2\pi$ (рис. 106). Имеем

$$u'_x = \cos x - \cos(x+y), \quad u'_y = \cos y - \cos(x+y).$$

Внутри области производные обращаются в нуль в единственной точке $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, в которой $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Так как на границе области, т. е. на прямых $x=0$, $y=0$ и $x+y=2\pi$, наша функция равна 0, то, очевидно, найденная выше точка $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ и доставляет функции наибольшее значение.

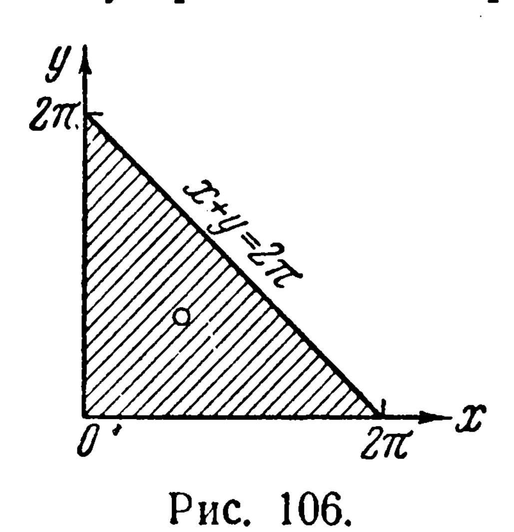


Рис. 106.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

при условии, что переменные x, y, z связаны зависимостью $x^2+y^2+z^2=1$ (и $a>b>c>0$). Определив отсюда z^2 и подставив его выражение в u, придем к функции

$$u = (a^2-c^2)x^2 + (b^2-c^2)y^2 + c^2 - [(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]^2$$

от двух независимых переменных x, y в круге $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Производные

$$u'_x = 2x(a-c)\{(a+c) - 2[(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]\}$$
$$u'_y = 2y(b-c)\{(b+c) - 2[(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c]\}$$

одновременно обращаются в нуль в точках

$$(1)\ x=y=0\ (u=0),\ (2)\ x=0,\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(u=\frac{1}{4}(b-c)^2\right)$$
$$(3)\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=0\quad \left(u=\frac{1}{4}(a-c)^2\right).$$

Теперь надлежит обратиться к границе области, т. е. к окружности $x^2+y^2=1$. Определяя отсюда y^2 и подставляя его выражение в u, получим функцию одной переменной x

$$u = (a^2-b^2)x^2 + b^2 - [(a-b)x^2 + b]^2$$

в промежутке $[-1, 1]$. Внутри этого промежутка производная

$$u'_x = 2(a-b)^2 x(1-2x^2)$$

обращается в нуль при

$$(4)\ x=0\ (u=0)\ \text{ и }\ (5)\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(u=\frac{1}{4}(a-b)^2\right).$$

Наконец, вспомним о концах рассматриваемого промежутка

$$(6)\ x=\pm 1\quad (u=0).$$

Итак, подлежат сравнению значения

$$u=0;\quad \frac{1}{4}(b-c)^2;\quad \frac{1}{4}(a-c)^2;\quad \frac{1}{4}(a-b)^2;$$

из них наименьшим будет 0, а наибольшим $\frac{1}{4}(a-c)^2$. Это и будут искомые наименьшее и наибольшее значения функции, которые достигаются, соответственно, в точках

$$(0,\ 0,\ \pm 1),\quad (0,\ \pm 1,\ 0),\quad (\pm 1,\ 0,\ 0)$$

и

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Вообще, в случае функции двух переменных $u=f(x, y)$, область обычно оказывается ограниченной кривою (или несколькими кривыми). Вдоль этой кривой (или каждой из кривых, если их несколько) переменные x, y либо зависят одна от другой, либо обе зависят от одного параметра, так что на границе наша функция $u=f(x, y)$ оказывается зависящей от одной переменной, и ее наибольшее (наименьшее) значение находится уже методами n° **139**. Если, скажем, кривая задана параметрическими уравнениями:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

где t изменяется в промежутке $[t_0, T]$, то на этой кривой наша функция будет (сложной) функцией от t:

$$u=f(\varphi(t),\quad \psi(t)),$$

для которой наибольшее (наименьшее) значение найти мы умеем.

3) Найти наибольшее значение для произведения

$$u=xyzt$$

неотрицательных чисел x, y, z, t, при условии, что сумма их сохраняет постоянную величину:

$$x+y+z+t=4c.$$

Покажем, что наибольшее для u значение получится, когда множители все равны: $x=y=z=t=c$ *).

Определив t из данного условия: $t=4c-x-y-z$, подставим в u это выражение:

$$u=xyz(4c-x-y-z).$$

Мы имеем здесь функцию от трех независимых переменных x, y, z, в трехмерной области, определяемой условиями

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z\leqslant 4c.$$

Геометрически эта область представляется в виде тетраедра, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4c$.

Вычисляем производные и приравниваем их нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz(4c-2x-y-z)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx(4c-x-2y-z)=0,$$

$$\frac{du}{dz}=xy(4c-x-y-2z)=0.$$

Внутри области уравнения эти удовлетворяются лишь в точке $x=y=z=c$, в которой $u=c^4$. Так как на границе области $u=0$, то в найденной точке, действительно, достигается для функции наибольшее значение.

---

*) Мы лишь для определенности взяли число сомножителей равным четырем; результат будет тот же для любого числа сомножителей.

Утверждение наше доказано (ибо при $x=y=z=c$ также и $t=c$) *).

Вообще, в случае функции трех переменных $u=f(x, y, z)$ область ограничивается поверхностью (или рядом поверхностей). Вдоль такой поверхности переменные x, y, z зависят уже от двух параметров (ими могут служить и две из этих переменных, как, например, только что: $z=4c-x-y$). Тогда и функция u будет зависеть только от двух параметров, так что определение наибольшего (наименьшего) значения ее на границе является уже более простой задачей, о которой шла речь выше. И т. д.

Если функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана лишь в открытой (или неограниченной) области $\mathcal{D}$, то уже нельзя заранее утверждать, что она достигает в области своего наибольшего (наименьшего) значения. Тем не менее такое значение в отдельных случаях может и существовать; мы поясним на примере, как в этом можно удостовериться.

4) Найти наименьшее значение для суммы

$$u=x+y+z+t$$

положительных чисел x, y, z, t, при условии, что произведение их сохраняет постоянную величину

$$xyzt=c^4.$$

Покажем, что наименьшее значение для u получится, когда слагаемые все равны: $x=y=z=t=c$ **).

Определим t: $t=\frac{c^4}{xyz}$, подставим это выражение в u:

$$u=x+y+z+\frac{c^4}{xyz}.$$

Нам нужно отыскать наименьшее значение для этой функции трех переменных x, y, z, в области, определяемой неравенствами $x>0$, $y>0$, $z>0$, т. е. в первом координатном октанте, открытом и безграничном.

Попробуем применить прежний метод: если в области есть точка, где наша функция достигает наименьшего значения, то эта точка, как и прежде, должна быть в числе стационарных. Имеем

$$u'_x=1-\frac{c^4}{x^2yz}=0,\quad u'_y=1-\frac{c^4}{xy^2z}=0,$$
$$u'_z=1-\frac{c^4}{xyz^2}=0;$$

отсюда $x=y=z=c$, чему отвечает $t=c$; при этом $u=4c$.

Как теперь проверить, что это значение, действительно, будет наименьшим?

Ясно, что при приближении к пограничным плоскостям $x=0, y=0, z=0$, равно как и при удалении в бесконечность, наша функция u бесконечно возрастает. Найденную точку можно окружить кубом $[\varepsilon, E;\ \varepsilon, E;\ \varepsilon, E]$, взяв $E>0$ настолько большим, а $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы вне этого куба

---

*) Из сказанного следует, что произведение положительных чисел $xyzt$, сумма которых равна $4c$, не превосходит c^4, так что

$$\sqrt[4]{xyzt}\leqslant c=\frac{x+y+z+t}{4},$$

т. е. среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. Этот результат, справедливый для любого количества рассматриваемых чисел, нам уже известен [133 (4а)].

**) И здесь число слагаемых может быть любым (ср. сноску на предыдущей странице).

и на его поверхности было $u > 4c$. Но в кубе, как в замкнутой и ограниченной области, функция u должна иметь наименьшее значение; теперь уже ясно, что это значение достигается именно в найденной выше точке и что оно будет наименьшим и для всей первоначальной области, ч. и тр. д.

Замечание. В примерах 1), 3), 4) внутри рассматриваемой области существовала одна лишь «подозрительная» точка. Можно было бы удостовериться, что в ней налицо максимум (или минимум). Однако — в отличие от того, что было отмечено для случая функции одной переменной [см. замечание в **139**] — *здесь из этого одного нельзя было бы сделать заключение, что мы имеем дело с наибольшим (наименьшим) значением функции в области.*

Следующий простой пример показывает, что подобное заключение в действительности может привести к неверному результату. Рассмотрим в прямоугольнике [— 5,5; — 1,1] функцию

$$u = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2.$$

Ее производные

$$u'_x = 3x^2 - 8x + 2y, \quad u'_y = 2x - 2y$$

в пределах области обращаются в нуль лишь в точке (0, 0). Как легко убедиться с помощью критерия n° **197**, в ней функция имеет максимум (равный 0). Однако, значение это не будет наибольшим в области, ибо, например, в точке (5, 0) функция $u = 25$.

Вследствие этого, в случае функции нескольких переменных, — при разыскании наибольшего или наименьшего значения функции в области — исследование на максимум и минимум оказывается практически ненужным.

201. Задачи. Многие задачи — как из области математики, так и из других областей науки и техники — приводят к вопросу о нахождении наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

Решение задач 1) — 4) связано с уже рассмотренными в предыдущем n° примерами.

1) Среди всех вписанных в данный круг радиуса R треугольников найти тот, площадь которого наибольшая (рис. 107).

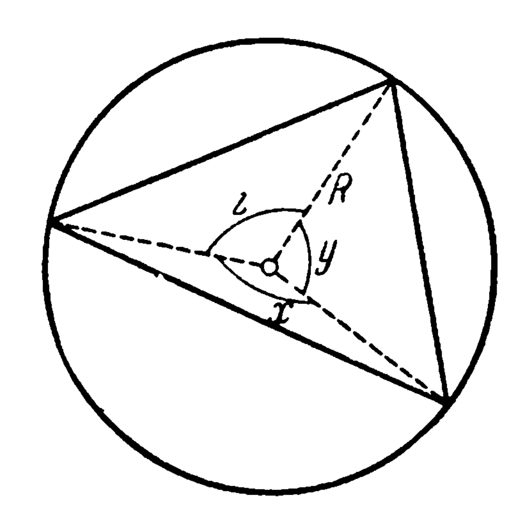


Рис. 107.

Если через x, y, z обозначить центральные углы, опирающиеся на стороны треугольника, то они связаны зависимостью

$$x + y + z = 2\pi,$$

откуда

$$z = 2\pi - x - y.$$

Площадь треугольника P через них выражается так:

$$P = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x + \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin z =$$
$$= \frac{1}{2} R^2 \cdot [\sin x + \sin y - \sin (x + y)].$$

Область изменения переменных x и y здесь определяется условиями: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2\pi$. Нужно найти те значения переменных, которые сообщают выражению в скобках наибольшую величину.

Мы уже знаем [**200**, пример 1)], что это будут $x = y = \frac{2\pi}{3}$, так что и $z = \frac{2\pi}{3}$: получается равносторонний треугольник.

2) Среди всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, площадь которого P наибольшая.

Пусть x, y, z означают стороны треугольника; тогда по формуле Герона

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Можно было бы, подставив сюда $z=2p-x-y$, преобразовать P к виду

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

и искать наибольшее значение этой функции в треугольной области, о которой уже была речь в **160**, 6).

Мы поступим иначе: задача сводится к нахождению наибольшего значения для произведения положительных чисел

$$u=(p-x)(p-y)(p-z)$$

— при условии, что их сумма постоянна:

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-2p=p.$$

А мы уже знаем [**200**, пример 3)], что для этого все множители должны быть равны, так что $x=y=z=\frac{2p}{3}$. Снова получается равносторонний треугольник.

3) Среди вписанных в данный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

прямоугольных параллелепипедов (с ребрами, параллельными осям его) найти тот, который имеет наибольший объем.

Если через x, y, z обозначить координаты той из вершин, которая лежит в первом координатном трехгранном угле, то объем $v=8xyz$. Вместо v можно рассмотреть величину

$$u=\frac{v^2}{64a^2b^2c^2}=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2},$$

ибо они, очевидно, достигают своих наибольших значений при одних и тех же x, y, z. По отношению же к u вопрос снова приводится к примеру 3) предыдущего n°.

Ответ:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}, \text{ так что } x=\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y=\frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

4) Предположим, что какой-нибудь газ (например, воздух) сжимается в поршневом компрессоре от атмосферного давления p_0 до давления $p>p_0$. Работа, затрачиваемая при этом на сжатие 1 моля газа, выразится так:

$$A=RT_0\cdot\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right];$$

здесь R есть «газовая постоянная», T_0 — абсолютная температура газа до сжатия, а γ есть некоторое число (>1), зависящее от конструкции компрессора. Работа A, очевидно, тем меньше, чем меньше начальная температура T_0. При больших степенях сжатия, когда экономия в затрачиваемой работе представляет важность, разбивают весь процесс сжатия на несколько ступеней, в промежутках подвергая сжатый (и нагревающийся вместе с тем) газ — охлаждению.

Пусть, например, мы имеем трехступенчатый компрессор с двумя промежуточными холодильниками, в которых температура доводится снова до T_0. Если обозначить через p_1 и p_2 давления в конце первой и второй ступеней, то общая работа сжатия теперь будет

$$A = RT_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}\left\{\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\right\}.$$

Тогда возникает вопрос, как при заданных p_0, p, T_0 выбрать промежуточные давления p_1 и p_2 с таким расчетом, чтобы величина затрачиваемой работы была наименьшей.

Если отбросить постоянный множитель и постоянные слагаемые, которые не влияют на искомые величины p_1 и p_2, то дело сведется к исследованию выражения

$$u = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Так как произведение

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

сохраняет постоянную величину, то, воспользовавшись примером 4), **200**, сразу видим, что сумма u достигает своего наименьшего значения тогда, когда все слагаемые равны:

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

или

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p}{p_2},$$

так что последовательные давления составляют геометрическую прогрессию. Отсюда

$$p_1 = \sqrt[3]{p_0^2 \cdot p}, \quad p_2 = \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}.$$

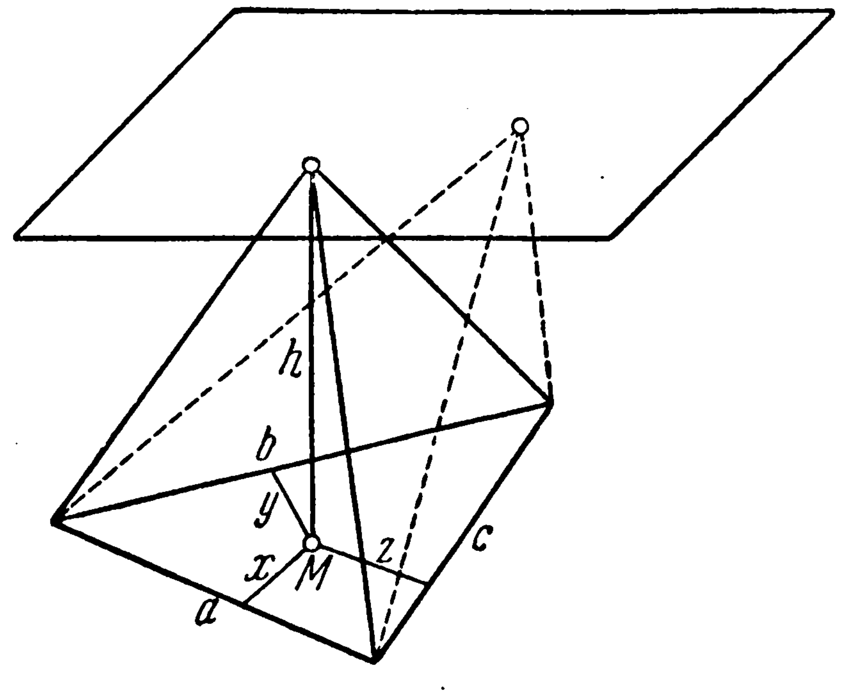


Рис. 108.

5) На плоскости дан треугольник со сторонами a, b, c (рис. 108); на нем можно построить бесчисленное множество пирамид с данной высотой h. Требуется из них найти ту, которая имеет наименьшую боковую поверхность S.

Вопрос сводится к нахождению проекции M вершины пирамиды. Положение ее определяется величинами трех перпендикуляров x, y, z, опущенных, соответственно, на стороны a, b, c. Каждому перпендикуляру мы приписываем знак плюс, если точка лежит с той же стороны, что и сам треугольник, и знак минус в противном случае. Величины x, y, z связаны соотношением (P означает площадь треугольника)

$$ax + by + cz = 2P, \text{ откуда } z = \frac{2P - ax - by}{c}.$$

Интересующая нас боковая поверхность S выразится теперь так:

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+\frac{c}{2}\sqrt{z^2+h^2},$$

где z должно быть заменено найденным выражением; областью изменения независимых переменных x, y является вся плоскость xy. Имеем

$$2S'_x=\frac{ax}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{a}{c}=0,$$

$$2S'_y=\frac{by}{\sqrt{y^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{b}{c}=0,$$

или

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}, \text{ откуда } x=y=z.$$

Соответствующая точка M есть центр вписанного в треугольник круга.

Что этим значениям x и y отвечает наименьшее значение для S, легко показать, как в примере 4) предыдущего n°, опираясь на то, что — при безграничном возрастании x или y — и S растет до бесконечности.

6) Пусть даны на плоскости три точки $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$, $M_3(a_3, b_3)$, не лежащие на одной прямой. Требуется найти в этой плоскости такую точку, чтобы сумма ее расстояний до данных точек была наименьшей.

Взяв любую точку $M(x, y)$, положим

$$\rho_i=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} \quad (i=1, 2, 3).$$

Тогда исследованию подлежит функция

$$u=\sum\rho_i=\sum\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}.$$

Для нее существуют — везде, кроме данных точек, — частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum\frac{x-a_i}{\rho_i}=\sum\cos\theta_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum\frac{y-b_i}{\rho_i}=\sum\sin\theta_i,$$

где θ_i означает угол прямой M_iM с осью x.

«Подозрительными» по экстремуму точками являются, таким образом, прежде всего точки M_1, M_2 и M_3, в которых производных нет, а затем та точка M_0 (мы увидим, что она не всегда существует), в которой производные зараз обращаются в 0. Так как при бесконечном возрастании x или y наша функция u, очевидно, также бесконечно растет, то наименьшего значения она достигает в одной из упомянутых точек.

Чтобы разыскать стационарную точку M_0, приравняем нулю обе частные производные; это даст нам условия:

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0, \quad \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0.$$

Умножим первое на $\sin\theta_2$, а второе на $\cos\theta_2$, и вычтем; мы получим

$$\sin(\theta_1-\theta_2)=\sin(\theta_2-\theta_3), \quad \text{откуда } \theta_1-\theta_2=\theta_2-\theta_3.$$

Аналогично найдем, что

$$\theta_2-\theta_3=\theta_3-\theta_1.$$

Таким образом, углы между прямыми M_1M_0, M_2M_0, M_3M_0, взятыми попарно, все должны быть равны $\frac{2\pi}{3}$, и точка M_0 получается в пересечении дуг, построенных на сторонах треугольника $M_1M_2M_3$ и вмещающих угол $\frac{2\pi}{3}$.

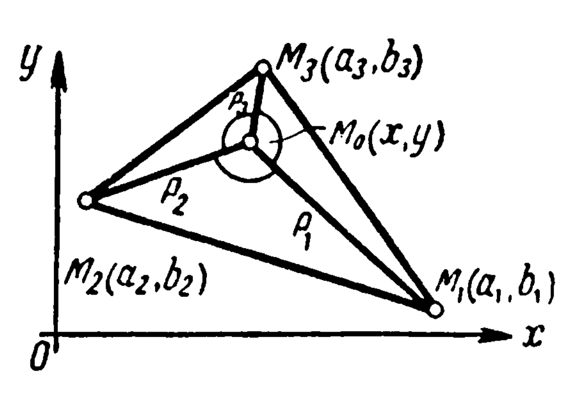


Рис. 109.

Если в этом треугольнике нет угла, бо́льшего или равного $\frac{2\pi}{3}$, то названные дуги, действительно, пересекаются внутри треугольника и определяют точку M_0, из которой стороны его видны под углами, равными $\frac{2\pi}{3}$ (рис. 109). В этом случае надлежит сравнить значения, которые u получает в названных четырех точках. Мы докажем, что значение u в стационарной точке M_0 будет меньше других (а значит, и вообще наименьшим). Действительно, по «теореме косинусов»

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_0M_1}^2 + \overline{M_0M_2}^2 + \overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2} > \left(\overline{M_0M_2} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}\right)^2,$$

так что

$$\overline{M_1M_2} > \overline{M_0M_2} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}.$$

Аналогично

$$\overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_3} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}.$$

Складывая, получим

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_1} + \overline{M_0M_2} + \overline{M_0M_3},$$

т. е.

$$u(M_1) > u(M_0).$$

Очевидно, точка M_1 здесь может быть заменена точкой M_2 или M_3, что и завершает доказательство.

Иначе обстоит дело, если один из углов треугольника $M_1M_2M_3$ равен или больше $\frac{2\pi}{3}$. Тогда стационарной точки вовсе не существует и наименьшее значение функции u доставляется одной из данных точек M_1, M_2, M_3 — именно той, которая служит вершиной тупого угла.

Любопытной особенностью этой задачи является именно то, что в ней приходится, кроме стационарной точки, считаться и с точками, в которых производных не существует [ср. 196, замечание II].

7) Обобщим задачу 1): станем искать вписанный в данный круг (радиуса R) $(n+1)$-угольник с наибольшей площадью P.

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ центральные углы, которые опираются на стороны многоугольника; тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = 2\pi,$$

откуда

$$x_{n+1} = 2\pi - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Площадь P равна

$$P = \frac{1}{2}R^2\cdot\sin x_1 + \frac{1}{2}R^2\cdot\sin x_2 + \ldots + \frac{1}{2}R^2\cdot\sin x_n + \frac{1}{2}R^2\cdot\sin x_{n+1};$$

если подставить вместо x_{n+1} его выражение, то вопрос сведется к разысканию наибольшего значения для функции

$$u = \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n + \sin [2\pi - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)],$$

причем область $\mathcal{D}$ изменения независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется неравенством

$$x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; x_n \geqslant 0, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 2\pi,$$

т. е. представляет собой n-мерный симплекс [162].

По общему правилу вычисляем производные и приравниваем их нулю:

$$\cos x_1 - \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos x_n - \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x) = 0;$$

единственной внутренней точкой области, в которой выполняются эти условия, будет точка

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{2\pi}{n+1} \quad \left(\text{тогда и } x_{n+1} = \frac{2\pi}{n+1}\right);$$

ей отвечает $u = (n+1)\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$.

Для того чтобы доказать, что это, действительно, будет наибольшим значением u, воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ наше утверждение уже установлено в примере 1) предыдущего n°. Допустим, что оно верно для случая n слагаемых синусов (так что для их суммы наибольшим значением будет $n \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n}$), и докажем верность его и для нашей суммы $n+1$ синусов.

Согласно общим указаниям, сделанным выше, надлежит сравнить значение $(n+1)\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$ со значениями, которые функция принимает на границе области $\mathcal{D}$. Возьмем, например, «грань симплекса» $x_n = 0$; на ней u будет функцией лишь от $n-1$ переменных:

$$u = \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_{n-1} + \sin [2\pi - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})]$$

и, по допущению, наибольшим значением здесь будет $n \cdot \sin\dfrac{2\pi}{n}$. То же можно установить и для других «граней». Но так как

$$n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} < (n+1) \cdot \sin\frac{2\pi}{n+1} \; {}^{*}),$$

то наше утверждение доказано. Наибольшую площадь будет иметь правильный многоугольник.

8) Рассмотрим электрическую питательную сеть с параллельным включением. На рис. 110 представлена схема сети причем A и B — зажимы источника тока и $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — приемники тока, потребляющие, соответственно, токи $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Требуется, при наперед заданном допустимом общем падении потенциала в цепи $2e$, определить сечения проводов так, чтобы на всю магистраль пошло наименьшее количество меди.

---

*) Это обстоятельство следует из того, что функция $\dfrac{\sin z}{z}$ монотонно убывает при возрастании z от 0 до π [см. 133, 1].

Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением одного из проводов, скажем AA_n, так как другой провод находится в совершенно аналогичных условиях. Обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_n$ длины частей $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ (в *м*), через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — площади их поперечных сечений (в *мм*²). Тогда выражение

$$u_1 = l_1q_1 + l_2q_2 + \ldots + l_nq_n$$

как раз и представит объем всей затраченной меди (в *см*³); для него нам нужно добиться наименьшей величины, принимая во внимание, что общее падение потенциала в проводе AA_n должно равняться e.

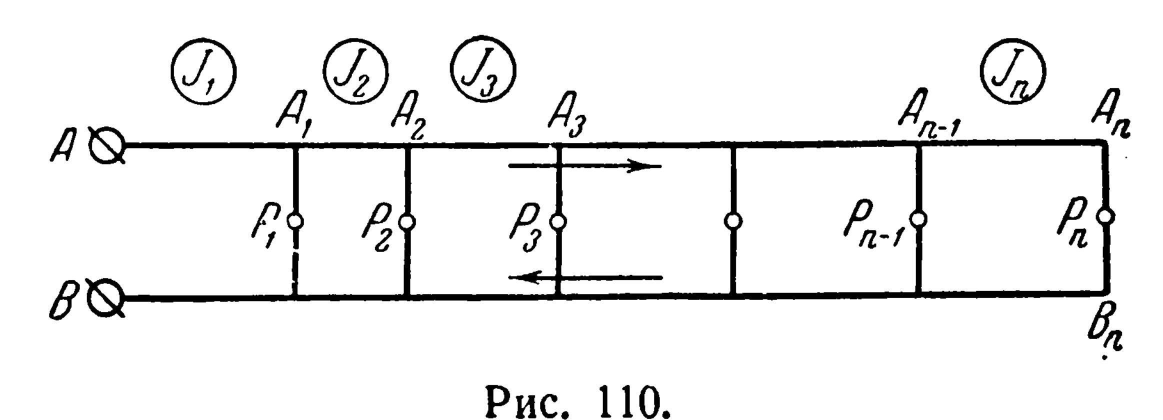


Рис. 110.

Легко подсчитать, какие токи $J_1, J_2, \ldots, J_n$ будут протекать в отрезках $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ цепи:

$$J_1 = i_1 + i_2 + \ldots + i_n,\ J_2 = i_2 + \ldots + i_n,\ \ldots,\ J_n = i_n.$$

Если обозначить через ρ сопротивление медной проволоки длиной в 1 *м* и с сечением в 1 *мм*², то сопротивления этих отрезков будут

$$r_1 = \frac{\rho l_1}{q_1},\quad r_2 = \frac{\rho l_2}{q^2},\ \ldots,\ r_n = \frac{\rho l_n}{q_n},$$

так что соответствующие падения потенциала в этих отрезках, согласно закону О м а, выразятся так:

$$e_1 = r_1J_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1},\quad e_2 = r_2J_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{q_2},\ \ldots,\ e_n = r_nJ_n = \frac{\rho l_n J_n}{q_n}.$$

Чтобы избежать сложных выкладок, мы, вместо переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, введем именно эти величины $e_1, e_2, \ldots, e_n$, связанные простым условием

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1} + e_n = e,\quad \text{откуда}\quad e_n = e - e_1 - e_2 - \ldots - e_{n-1}.$$

Тогда, в свою очередь,

$$q_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{e_1},\ q_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{e_2},\ \ldots,\ q_n = \frac{\rho l_n J_n}{e_n} = \frac{\rho l_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \ldots - e_{n-1}}$$

и

$$u = \rho\left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1} + \ldots + \frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{l_n^2 J_n}{e - e_1 - \ldots - e_{n-1}}\right],$$

причем область изменения н е з а в и с и м ы х переменных $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ определяется неравенствами

$$e_1 > 0,\ e_2 > 0,\ \ldots,\ e_{n-1} > 0,\ e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1} < e$$

(открытый с и м п л е к с).

Приравнивая нулю производные u по всем переменным, получим систему уравнений

$$-\frac{l_1^2J_1}{e_1^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\ldots-e_{n-1})^2}=0,$$
$$-\frac{l_2^2J_2}{e_2^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\ldots-e_{n-1})^2}=0, \ldots,$$
$$\ldots, -\frac{l_{n-1}^2J_{n-1}}{e_{n-1}^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\ldots-e_{n-1})^2}=0,$$

откуда (снова вводя e_n)

$$\frac{l_1^2J_1}{e_1^2}=\frac{l_2^2J_2}{e_2^2}=\ldots=\frac{l_n^2J_n}{e_n^2}.$$

Удобно обозначить общую величину всех этих отношений через $\frac{1}{\lambda^2}$ $(\lambda>0)$. Тогда

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1},\ e_2=\lambda l_2\sqrt{J_2},\ \ldots,\ e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n},$$

причем λ легко определяется из условия $e_1+e_2+\ldots+e_n=e$:

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\ldots+l_n\sqrt{J_n}}.$$

Так как, при приближении точки $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ к границе области, u растет до бесконечности, то найденные значения $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ (e_n) действительно доставляют функции u наименьшее значение.

Наконец, возвращаясь к нашим основным переменным $q_1, q_2, \ldots, q_n$, находим

$$q_1=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1},\ q_2=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2},\ \ldots,\ q_n=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n},$$

так что наивыгоднейшие сечения проводов оказываются пропорциональными корням квадратным из соответствующих сил тока.

9) Метод наименьших квадратов. Так называется очень распространенный метод обработки наблюдений, суть которого заключается в следующем.

Пусть требуется определить значения трех*) величин x, y, z, если для них установлено $n>3$ линейных уравнений

$$a_ix+b_iy+c_iz=d_i \quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

причем некоторые из коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i получены опытным путем и известны лишь по приближению. При этом мы предположим, что хоть какие-нибудь три из этих уравнений имеют определитель, отличный от нуля: например, пусть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (14)$$

---

*) Мы ограничиваемся тремя величинами лишь для простоты письма.

Однако вычисленные из первых трех уравнений значения x, y, z, вообще говоря, не будут точно удовлетворять остальным (либо ввиду неизбежных погрешностей в коэффициентах уравнений, либо вследствие того, что сами равенства оказываются лишь приближенными). Не имея оснований предпочесть одни уравнения другим и считаясь с неизбежностью погрешностей

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z - d_i,$$

какие бы ни брать значения x, y, z, стараются достичь лишь того, чтобы сумма квадратов этих погрешностей

$$W = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2$$

была наименьшей (отсюда и название метода). Иными словами, наилучше согласующимися с результатами опыта считаются те значения x, y, z, которые доставляют наименьшую величину функции $W = W(x, y, z)$.

По общему правилу, чтобы найти эти значения, приравниваем нулю производные от W по x, y, z:

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0,$$

$$2\sum_{i=1}^{n} b_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0.$$

$$2\sum_{i=1}^{n} c_i (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) = 0.$$

Гаусс (C. F. Gauss) ввел другие обозначения сумм однотипных слагаемых, разнящихся лишь указателями; именно он пишет

$$[aa] \text{ вместо } \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad [ab] \text{ вместо } \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \text{ и т. п.}$$

В обозначениях Гаусса полученные для определения значений x, y, z уравнения перепишутся так:

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z &= [ad], \\ [ba]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z &= [bd], \\ [ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z &= [cd]; \end{aligned}$$

их называют нормальными уравнениями.

Для того чтобы быть уверенными, что этими уравнениями однозначно определятся значения x, y, z, нужно установить, что определитель системы отличен от нуля. Но по известной теореме алгебры, квадрат этого определителя представляется в виде

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}^2 = \sum_{(i,j,k)} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}^2,$$

причем суммирование распространяется на всевозможные сочетания (i, j, k) из n значков $1, 2, \ldots, n$ по три. Так как из всех определителей справа, по нашему предположению, хоть один отличен от нуля, то отсюда и следует, что определитель слева также не нуль.

Остается еще убедиться в том, что определяемые из нормальных уравнений значения переменных действительно доставляют функции W наименьшее значение. Для этого достаточно, например, установить, что вне сферы достаточно большого радиуса W будет сколь угодно велико.

С этой целью рассмотрим значения первых трех скобок в выражении W

$$a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = u_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = u_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = u_3.$$

Ввиду (14) через эти значения, в свою очередь, линейно выражаются, с вполне определенными постоянными коэффициентами, и x, y, z, так что, пока все три величины u_1, u_2, u_3 остаются ограниченными, ограниченными необходимо будут сами x, y, z. Отсюда уже ясно, что при бесконечном возрастании $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ также растет до бесконечности и $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ (а следовательно, и W).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ; ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Формальные свойства функциональных определителей

202. Определение функциональных определителей (якобианов). В настоящей главе (равно как и в других частях курса) важным формальным орудием исследования для нас явятся особого рода определители, составленные из частных производных. Изучим предварительно основные их свойства.

Пусть даны n функций от n переменных

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которые определены в некоторой n-мерной области $\mathcal{D}$ и имеют в ней непрерывные частные производные по всем переменным. Составим из этих производных определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется обычно *функциональным определителем Якоби* или *якобианом* системы (1)—по имени немецкого

математика Якоби (С. G. J. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применения *). Обозначают его для краткости символом

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

сходным с обозначением производной. Якобиан имеет ряд свойств, подобных свойствам обыкновенной производной.

203. Умножение якобианов. Кроме системы функций (1), возьмем систему функций

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{array}\right\} \qquad (2)$$

определенных и имеющих непрерывные частные производные в области $\mathscr{P}$. Пусть при изменении точки $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ в $\mathscr{P}$ соответствующая точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не выходит из области $\mathscr{D}$, так что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно рассматривать как сложные функции от $t_1, t_2, \ldots, t_n$ через посредство $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Умножим теперь якобиан системы (1) на якобиан системы (2):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Из теории определителей нам известна теорема об умножении определителей, выражающаяся формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{n1} b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix},$$

*) В науку якобианы были введены одновременно с Якоби и М. В. Остроградским.

где общий элемент последнего определителя такой:

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}$$
$$(i,\ k=1,2,\ldots,n)$$

(умножение по правилу «строка на столбец»). Применяя эту формулу к функциональным определителям, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n}+\ldots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n}+\ldots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n}+\ldots+\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Замечая, что, по формуле для производной сложной функции, общий элемент этого определителя есть

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}=\frac{\partial y_i}{\partial t_k}$$
$$(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

мы можем последний определитель переписать в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Доказанное только что *первое свойство* якобиана в кратких обозначениях можно переписать так:

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)}=\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_n)}. \qquad (3)$$

Если бы имели одну функцию y от x, где x есть функция от t, то получили бы известную формулу для производной сложной функции: $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$; таким образом, выведенное свойство якобианов является обобщением формулы для производной сложной функции.

Отметим особо тот случай, когда переменные $t_1, t_2, \ldots, t_n$ тождественны с $y_1, y_2, \ldots, y_n$, так что система функций (2) есть результат обращения системы (1)*). Тогда полученное соотношение сведется к следующему:

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}=1$$

или

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{1}{\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}. \tag{4}$$

В этом виде оно напоминает формулу для производной обратной функции.

204. Умножение функциональных матриц (матриц Якоби). Пусть имеется m функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ от n ($n>m$) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

причем, в свою очередь, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются функциями от m переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$:

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ x_2=\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=\varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m). \end{cases}$$

Предполагая в обоих случаях существование непрерывных частных производных, постараемся найти выражение для якобиана $y_1, y_2, \ldots, y_m$ как функций от $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

---

*) Самую возможность такого обращения мы здесь допускаем. См. следующий параграф.

В теории определителей устанавливается общая теорема об умножении матриц (для которой использованная выше теорема об умножении определителей является частным случаем). Рассмотрим две матрицы (таблицы)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \quad (n > m).$$

Их произведением является квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по формулам

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$
$$(i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

Соответствующий этой матрице определитель равен сумме

$$\sum_{(i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_m)} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \dots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \dots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} & \dots & b_{i_1 m} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} & \dots & b_{i_2 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i_m 1} & b_{i_m 2} & \dots & b_{i_m m} \end{vmatrix},$$

распространяющейся на всевозможные сочетания $(i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_m)$ из n значков $1,\ 2,\ \dots,\ n$ по m.

Применив этот результат к функциональным матрицам (или матрицам Якоби)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{pmatrix},$$

мы получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_2}} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_m}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_2}} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

Если снова вспомнить формулу для производной сложной функции, то определитель в левой части этого равенства перепишется так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial t_1} & \frac{\partial y_m}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

В кратких обозначениях полученный результат имеет вид

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{D(t_1, t_2, \ldots t_m)} = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{D(x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_m})} \cdot \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)}, \quad (5)$$

где сумма распространяется на всевозможные **сочетания** из n значков $1, 2, \ldots, n$ по m.

При $m = 1$ доказанная формула переходит в известную формулу для дифференцирования сложной функции (через посредство нескольких промежуточных переменных):

$$\frac{dy}{dt} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

и, таким образом, является ее обобщением.

Отметим частный случай нашей формулы, который получается при $n=3$ и $m=2$:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)} + \\ + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \tag{6}$$

Эта формула находит себе особенно частое применение.

Мы установили ряд формальных свойств якобианов, аналогичных свойствам обыкновенных производных; к ним примыкает и формула, которую мы выведем в одном из ближайших n° [**210**, 8)]. Но более глубокая аналогия между производными и якобианами обнаруживается по той роли, которую они играют в теории неявных функций (см. следующий §) и, особенно, в вопросе о замене переменных в двойных, тройных и, вообще, кратных интегралах (в третьем томе).

§ 2. Неявные функции

205. Понятие неявной функции от одной переменной. Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением, которое, если все члены его перенести налево, в общем случае имеет вид

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Здесь $F(x, y)$ есть функция двух переменных, заданная в какой-либо области. Если для каждого значения x — в некотором промежутке — существует одно или несколько значений y, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (1), то этим определяется, однозначная или многозначная, функция $y=f(x)$, для которой равенство

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{2}$$

имеет место уже тождественно относительно x.

Возьмем, например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \tag{1a}$$

оно, очевидно, определяет y как двузначную функцию от x в промежутке $[-a, a]$, именно

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

И, если вместо y подставить в уравнение (1a) эту функцию, то получится тождество.

Здесь удалось найти для y очень простое аналитическое выражение через x, даже в элементарных функциях. Так обстоит дело далеко не всегда. Если взять уравнение

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

которое нам уже встречалось [при других лишь обозначениях переменных, **83**], то мы знаем, что этим уравнением y определяется как однозначная функция от x, хотя в конечном виде она через элементарные функции и не выражается.

Функция $y=f(x)$ называется *неявной*, если она задана при посредстве неразрешенного (относительно y) уравнения (1); она становится *явной*, если рассматривается непосредственная зависимость y от x. Читателю ясно, что эти термины характеризуют лишь способ задания функции $y=f(x)$ и не имеют отношения к ее природе. [Строго говоря, противопоставление неявного и явного задания функции с полной четкостью возможно лишь, если под явным заданием разуметь явное аналитическое задание; если же, в качестве явного, допускать задание с помощью любого правила [**45**], то задание функции y от x с помощью уравнения (1) ничем не хуже всякого другого.]

В простейшем случае, когда уравнение (1) — алгебраическое, т. е. когда функция $F(x, y)$ есть целый относительно x и y многочлен, определяемая им неявная функция y от x (вообще многозначная) называется алгебраической. Если степень уравнения (относительно y) не выше четырех, то алгебраическая функция допускает явное выражение в радикалах, при степени выше четырех такое выражение возможно лишь в виде исключения.

Сейчас нас будет интересовать лишь вопрос о существовании и однозначности «неявной» функции (равно как и о других ее свойствах), независимо от возможности представить ее в «явном» виде аналитической формулой. Впрочем, в этой постановке вопрос для нас не нов; с частным случаем его мы имели дело, когда речь шла о существовании и о свойствах обратной функции, и уравнением

$$y-f(x)=0$$

переменная x определялась как «неявная» функция от y.

Поучительна геометрическая трактовка указанного вопроса. Уравнение (1), при известных условиях, выражает кривую на плоскости [например, уравнение (1а), как известно, выражает эллипс (рис. 111)]; в этом случае оно называется неявным уравнением кривой. Вопрос заключается в том, может ли кривая (1) (или ее часть) быть выражена обычным уравнением вида $y=f(x)$, с однозначной функцией справа; геометрически это означает, что кривая (или ее часть) пересекается прямой, параллельной оси y, лишь в одной точке.

Если мы желаем иметь однозначную функцию, то как видно на примере того же эллипса, нужно ограничить не только область изменения x, но и область изменения y.

Мы будем говорить, для краткости, что *в прямоугольнике* $(a, b; c, d)$ *уравнение* (1) *определяет* y *как од-*

нозначную функцию от x, если при каждом значении x в промежутке (a, b) уравнение (1) имеет один, и только один, корень y в промежутке (c, d).

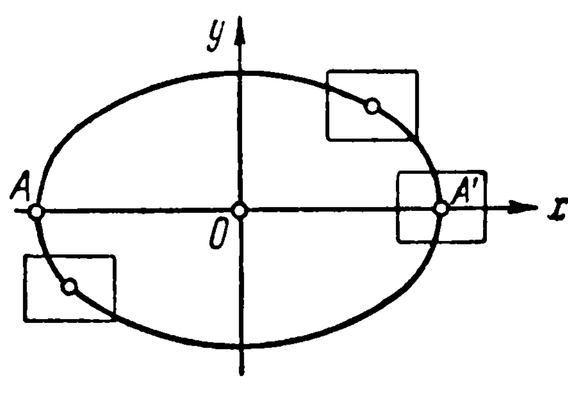


Рис. 111.

Обычно нас будет интересовать определенная точка (x_0, y_0), удовлетворяющая уравнению (1) (лежащая на кривой), и в роли упомянутого прямоугольника будет фигурировать окрестность этой точки. Так, например, в случае эллипса (рис. 111), очевидно, можно утверждать, что уравнение (1а) определяет ординату y как однозначную функцию от абсциссы x в достаточно малой окрестности любой точки эллипса, кроме вершин его A, A' на большой оси.

206. Существование неявной функции. Теперь установим условия, обеспечивающие существование однозначной и непрерывной неявной функции.

Теорема I. Предположим, что

1) *функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некотором прямоугольнике*

$$\mathscr{D} = [x_0 - \Delta,\ x_0 + \Delta;\ y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta']$$

с центром в точке (x_0, y_0);

2) *$F(x, y)$ в этой точке обращается в нуль: $F(x_0, y_0) = 0$;*

3) *при постоянном x функция $F(x, y)$ монотонно возрастает (или монотонно убывает) с возрастанием y.*

Тогда

а) *в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение (1) определяет y как однозначную функцию от x: $y = f(x)$;*

б) *при $x = x_0$ эта функция принимает значение y_0: $f(x_0) = y_0$; наконец,*

в) *функция $f(x)$ непрерывна.*

Доказательство. Станем передвигаться вдоль вертикали, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 112), т. е. фиксируем $x = x_0$; тогда рассматриваемая функция $F(x, y)$ сведется к функции $F(x_0, y)$ от одной переменной y. В силу 2), она при $y = y_0$ обращается в 0. В то же время по условию 3) функция $F(x_0, y)$ возрастает вместе с y, так что для $y < y_0$ ее значения меньше нуля, а для $y > y_0$ — больше нуля. В частности, следовательно, она будет иметь значения разных знаков в точках $A_0(x_0, y_0 - \Delta')$ и $B_0(x_0, y_0 + \Delta')$, именно

$$F(A_0) = F(x_0, y_0 - \Delta') < 0, \quad F(B_0) = F(x_0, y_0 + \Delta') > 0.$$

Перейдем теперь к горизонтальным прямым, проходящим через эти точки A_0 и B_0, т. е. фиксируем на этот раз $y = y_0 - \Delta'$

или $y=y_0+\Delta'$. Получатся две функции от одной переменной x: $F(x, y_0-\Delta')$ и $F(x, y_0+\Delta')$, которые, как мы видели, при $x=x_0$ имеют: первая — отрицательное значение, а вторая — положительное. Но по условию 1) эти функции непрерывны *), а потому найдется

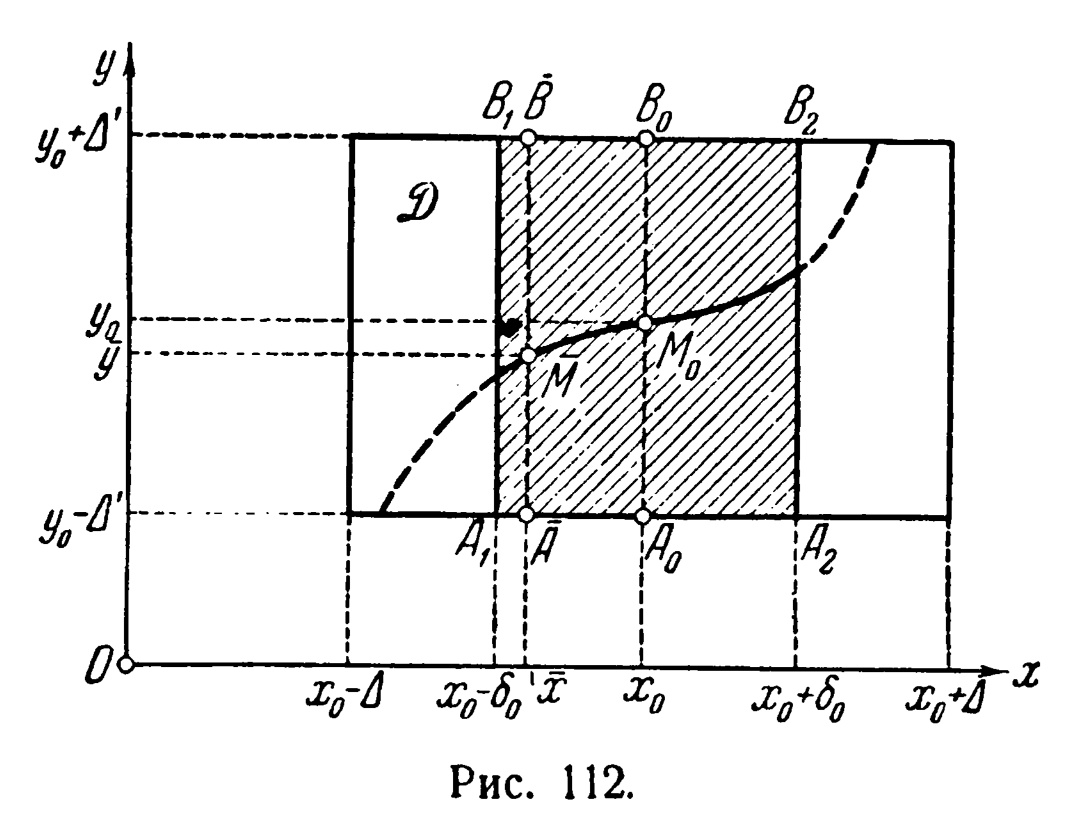


Рис. 112.

некоторая окрестность $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ точки x_0 $(0<\delta_0\leqslant\Delta)$, в которой обе функции сохраняют свой знак [**80**, лемма], так что при $x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0$

$$F(x, y_0-\Delta')<0, \quad F(x, y_0+\Delta')>0.$$

Иными словами, на нижнем и верхнем основаниях исходного прямоугольника вдоль отрезков A_1A_2 и B_1B_2 длины $2\delta_0$ с центрами в точках A_0 и B_0 заданная функция $F(x, y)$ имеет отрицательные значения на первом и положительные — на втором.

Фиксируем в промежутке $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ любое значение $x=\bar{x}$ и рассмотрим вертикальный отрезок, соединяющий точки $\bar{A}(\bar{x}, y_0-\Delta')$ и $\bar{B}(\bar{x}, y_0+\Delta')$. Вдоль него наша функция снова сведется к функции $F(\bar{x}, y)$ от одной переменной y. Так как она, в силу 1), непрерывна *) и, как сказано, на концах промежутка $[y_0-\Delta', y_0+\Delta']$ имеет значения разных знаков:

$$F(\bar{A})=F(\bar{x}, y_0-\Delta')<0, \quad F(\bar{B})=F(\bar{x}, y_0+\Delta')>0,$$

то, по теореме Больцано — Коши [**80**], при некотором значении $y=\bar{y}$, содержащемся между $y_0-\Delta'$ и $y_0+\Delta'$, эта функция $F(\bar{x}, y)$ обращается в нуль:

$$F(\bar{x}, \bar{y})=0.$$

---

*) Мы предположили непрерывность функции $F(x, y)$ по совокупности переменных x, y; но в таком случае она будет непрерывна и по каждой переменной в отдельности.

И здесь из условия 3) следует, что при $y \gtrless \bar{y}$ будем иметь, соответственно, $F(\bar{x}, y) \gtrless 0$, так что $\bar{y}$ есть единственное значение y в промежутке $(y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$, которое совместно с $x = \bar{x}$ удовлетворяет уравнению (1). На каждом вертикальном отрезке $\overline{AB}$ найдется только одна точка $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$, обращающая левую часть уравнения в нуль.

Таким образом, в окрестности

$$(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$$

точки (x_0, y_0) уравнение (1), действительно, определяет y как однозначную функцию от x: $y = f(x)$.

В то же время предыдущее рассуждение, ввиду 2), показывает также, что $f(x_0) = y_0$. Именно, из того, что $F(x_0, y_0) = 0$, усматриваем, что y_0 и есть то единственное значение y в промежутке $(y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$, которое совместно с $x = x_0$ удовлетворяет уравнению (1).

Остается лишь установить непрерывность функции $y = f(x)$ в промежутке $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Для точки $x = x_0$ это получается непосредственно из предыдущего рассуждения, которое приложимо и к любому меньшему прямоугольнику с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Заменив число Δ' любым числом $\varepsilon < \Delta'$, мы нашли бы, как и выше, такое $\delta \leqslant \delta_0$, чтобы для любого x из промежутка $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ соответствующее ему единственное значение y, которое совместно с x удовлетворяет уравнению (1), оказалось именно между $y_0 - \varepsilon$ и $y_0 + \varepsilon$. Таким образом, при $|x - x_0| < \delta$ имели бы

$$|f(x) - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Доказательство для любой точки $x = \bar{x}$ аналогично доказательству для $x = x_0$. Точка $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y} = f(\bar{x})$, удовлетворяет таким же условиям, как и точка $M_0(x_0, y_0)$, ибо $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Поэтому, как и выше, в окрестности точки $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$ уравнением (1) переменная y определяется как однозначная функция от x, непрерывная в точке $x = \bar{x}$. Но, именно ввиду однозначности, эта функция совпадает с $f(x)$, и тем устанавливается непрерывность $f(x)$ при $x = \bar{x}$.

Мы доказали теорему существования неявной функции, не задаваясь вопросом о вычислении ее значений или об ее аналитическом представлении; этим мы займемся в главе XII.

Доказанная теорема, очевидно, является обобщением теоремы n° **83**.

207. Дифференцируемость неявной функции. Теперь мы усилим предположения относительно функции $F(x, y)$ и тогда получим возможность установить и существование производной для функции $y = f(x)$.

Теорема II. *Предположим, что*

1) *функция* $F(x, y)$ *определена и непрерывна в прямоугольнике*

$$\mathscr{D} = [x_0 - \Delta,\ x_0 + \Delta;\ y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta']$$

с центром в точке (x_0, y_0);

2) *частные производные* F'_x *и* F'_y *существуют и непрерывны в* $\mathscr{D}$;

3) $F(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) *обращается в нуль*: $F(x_0, y_0) = 0$; *наконец,*

4) *производная* $F'_y(x_0, y_0)$ *отлична от нуля.*

Тогда выполняются заключения а), б), в) *теоремы* I *и, кроме того,*

г) *функция* $f(x)$ *имеет непрерывную производную.*

Доказательство (рис. 113). Пусть, например, $F'_y(x_0, y_0) > 0$; так как производная $F'_y(x, y)$, в силу 2), непрерывна, то можно построить такой квадрат:

$$[x_0 - \delta',\ x_0 + \delta',\ y_0 - \delta',\ y_0 + \delta'] \quad (\delta' < \Delta \text{ и } \Delta'),$$

чтобы для всех его точек было: $F'_y(x, y) > 0$ *). Тогда для этого

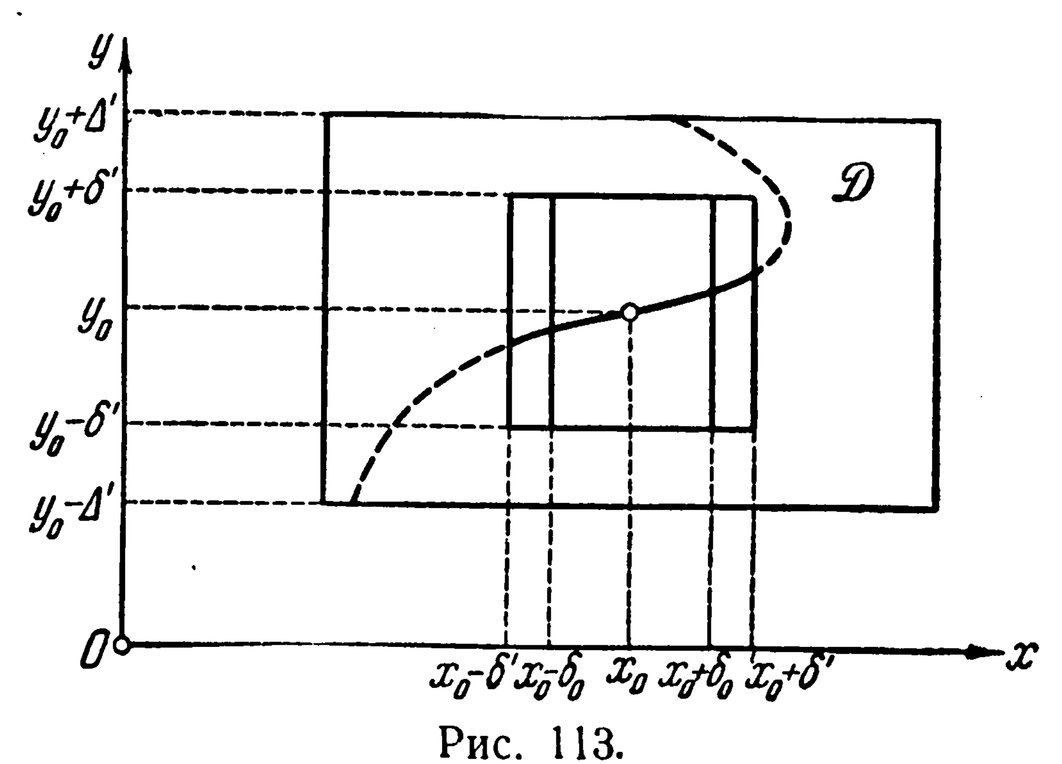


Рис. 113.

квадрата выполнены все условия теоремы I: монотонность функции $F(x, y)$ по y, при $x = \text{const}$, вытекает именно из того, что $F'_y > 0$ [**132**]. Следовательно, заключения а), б), в) можно считать оправданными.

Переходя к доказательству утверждения г), будем под y разуметь именно ту неявную функцию $y = f(x)$, которая определяется уравнением (1) и тождественно ему удовлетворяет. Придадим x приращение Δx; наращенному значению $x + \Delta x$ будет соответствовать значение $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, вместе с ним удовлетворяющее уравнению (1): $F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0$. Очевидно, и приращение

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

*) Ибо и для функции нескольких переменных справедливо утверждение, аналогичное лемме n° **80** для функций одной переменной.

Представив ΔF по формуле (1) n° **178**, получим

$$0=\Delta F(x, y)=F'_x(x, y)\cdot\Delta x+F'_y(x, y)\cdot\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

где α и β зависят от Δx, Δy и стремятся к нулю, когда Δx и Δy одновременно стремятся к нулю. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x, y)+\alpha}{F'_y(x, y)+\beta}.$$

Устремим к нулю Δx; в силу установленной уже непрерывности функции $y=f(x)$ [см. в)], при этом Δy также стремится к нулю, а потому и $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$. Так как $F'_y\neq 0$, то существует предел правой части, а следовательно, существует и производная y по x:

$$f'(x)=y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{3}$$

Подставляя $f(x)$ вместо y, будем иметь

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))};$$

так как в числителе и в знаменателе имеем непрерывные функции от непрерывных же функций, и знаменатель не обращается в нуль, то отсюда ясно, что $f'(x)$ — также непрерывная функция. Теорема доказана.

Замечательно, что по свойствам функции $F(x, y)$, которая нам дана непосредственно, мы можем судить о свойствах функции $y=f(x)$, для которой непосредственного задания мы не имеем.

208. Неявные функции от нескольких переменных. Аналогично уравнению (1) можно рассматривать и уравнение с бо́льшим числом переменных

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0. \tag{4}$$

При известных условиях этим уравнением y определяется как «неявная» функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которая, вообще говоря, будет многозначной. Если подставить ее вместо y, то будем иметь

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))=0$$

уже тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Мы будем говорить, что *в $(n+1)$-мерном параллелепипеде*

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n; c, d)$$

уравнение (4) *определяет y как однозначную функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если для любой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержащейся в n-мерном параллелепипеде*

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n)$$

уравнение (4) *имеет один, и только один, корень* y *в промежутке* (c, d).

В роли такого параллелепипеда обычно будет фигурировать окрестность интересующей нас точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Сформулируем теперь относящуюся к уравнению (4) теорему.

Теорема III. *Предположим, что*

1) *функция* $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ *определена и непрерывна в* $(n+1)$-*мерном параллелепипеде*

$$\mathcal{D} = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1; \ldots, x_n^0 - \Delta_n, x_n^0 + \Delta_n; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

с центром в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$;

2) *частные производные* $F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ *существуют и непрерывны в* $\mathcal{D}$;

3) *функция* F *в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ *обращается в нуль; и, наконец,*

4) *производная* F'_y *в этой точке не равна нулю.*

Тогда

а) *в некоторой окрестности точки* $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ *уравнение* (4) *определяет* y *как однозначную функцию от* $x_1, \ldots, x_n$: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$;

б) *при* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ *эта функция принимает значение* y_0: $f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_0$;

в) *функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна по совокупности своих аргументов и*

г) *имеет непрерывные же частные производные* $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$.

На доказательстве мы останавливаться не будем, так как оно совершенно аналогично доказательству теорем I и II.

Наконец, в самом общем случае может быть дана система из m уравнений с $n+m$ переменными

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Здесь речь идет об определении этой системы m переменных $y_1, \ldots, y_m$ как «неявных» функций от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

так что при подстановке в (5) получаются тождества

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0. \end{aligned}$$

Говорят, что *в $(n+m)$-мерном параллелепипеде*

$$(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n; c_1, d_1; \ldots; c_m, d_m)$$

система (5) *определяет* $y_1, \ldots, y_m$ *как однозначные функции от* $x_1, \ldots, x_n$, *если для каждой точки* $(x_1, \ldots, x_n)$ *в* n*-мерном параллелепипеде*

$$(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$$

система уравнений (5) *имеет одну, и только одну, систему решений* $y_1, \ldots, y_m$, *принадлежащую* m*-мерному параллелепипеду*

$$(c_1, d_1; \ldots; c_m, d_m).$$

Мы видели, что в вопросе о существовании однозначной неявной функции, определяемой одним уравнением (1) или (4), решающую роль играло требование, чтобы в рассматриваемой точке, удовлетворяющей уравнению, не обращалась в нуль производная F'_y — именно по той переменной, которая подлежит определению как неявная функция. В вопросе же о существовании однозначных неявных функций $y_1, \ldots, y_m$, определяемых системой уравнений (5), к которому мы сейчас переходим, аналогичную роль будет играть якобиан от функций, стоящих в левых частях, по переменным $y_1, \ldots, y_m$:

$$J = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Теорема IV. *Предположим, что*

1) *все функции* $F_1, \ldots, F_m$ *определены и непрерывны в* $(n+m)$*-мерном прямоугольном параллелепипеде*

$$\mathcal{D} = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1; \ldots; x_n^0 - \Delta_n, x_n^0 + \Delta_n;$$
$$y_1^0 - \Delta'_1, y_1^0 + \Delta'_1; \ldots; y_m^0 - \Delta'_m, y_m^0 + \Delta'_m]$$

с центром в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$;

2) *существуют и непрерывны в* $\mathcal{D}$ *частные производные от этих функций по всем аргументам;*

3) *точка* $(x_1^0, \ldots, y_m^0)$ *удовлетворяет системе* (5);

4) *якобиан* J [см. (6)] *в этой точке отличен от нуля.*

Тогда

а) *в некоторой окрестности точки* $(x_1^0, \ldots, y_m^0)$ *система уравнений* (5) *определяет* $y_1, \ldots, y_m$ *как однозначные функции от* $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_{m-1} = f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n);$$

б) *при* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ *эти функции принимают, соответственно, значения* $y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0, y_m^0$:

$$f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_1^0, \ldots, f_{m-1}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_{m-1}^0,$$
$$f_m(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_m^0;$$

в) *функции* $f_1, \ldots, f_m$ *непрерывны и*

г) *имеют непрерывные же частные производные по всем аргументам.*

Доказательство поведем по методу математической индукции. При $m = 1$, когда система сводится к одному уравнению, теорема верна (это — теорема III). Допустим теперь, что теорема верна для случая, когда система состоит из $m - 1$ уравнений и речь идет об определении $m - 1$ неявных функций, и докажем ее для системы из m уравнений.

Поскольку якобиан J в точке $(x_1^0, \ldots, y_m^0)$ отличен от нуля, в последнем столбце его хоть один элемент в этой точке также не равен нулю; пусть, например,

$$\frac{\partial F_m(x_1^0, \ldots, y_m^0)}{\partial y_m} \neq 0.$$

В таком случае, по теореме III, последнее уравнение системы (5) — в некоторой окрестности $\mathscr{D}^*$ точки $(x_1^0, \ldots \ldots, y_m^0)$ — определяет y_m как однозначную функцию от остальных аргументов:

$$y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{7}$$

так что тождественно (относительно этих аргументов) имеем

$$F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, y_{m-1})) = 0. \tag{8}$$

Эта функция φ непрерывна и имеет непрерывные частные производные; кроме того

$$\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0) = y_m^0. \tag{9}$$

Важно подчеркнуть, что, поскольку мы ограничиваемся впредь упомянутой окрестностью $\mathscr{D}^*$, уравнение

$$F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0$$

равносильно уравнению (7): в пределах $\mathscr{D}^*$ ему удовлетворяют одни и те же системы значений переменных $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m$.

Заменяя последнее из уравнений (5) этим уравнением (7) и подставляя функцию φ вместо y_m в остальные уравнения системы (5), мы получим новую систему уже из $m-1$ уравнений с $n+m-1$ переменными

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}) &= 0, \\ \Phi_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\ \Phi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где для сокращения положено (при $j=1, 2, \ldots, m-1$)

$$\begin{aligned} &\Phi_j(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}) = \\ &\qquad = F_j(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, y_{m-1})). \end{aligned} \tag{11}$$

Если не выходить за пределы окрестности $\mathscr{D}^*$, то система (5) оказывается равносильной системе (10) с добавлением уравнения (7). Поэтому, если нам удастся доказать, что системой (10) в достаточно малой окрестности d^* точки $(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ $m-1$ переменных $y_1, \ldots, y_{m-1}$ определяются как однозначные функции от $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ y_{m-1} = f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n), \tag{12}$$

то в силу (7) и переменная y_m определится как такая однозначная функция:

$$\begin{aligned} &y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) = \\ &\qquad = \varphi(x_1, \ldots, x_n; f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n)), \end{aligned} \tag{12a}$$

и заключение а) будет полностью оправдано*).

Обратимся же к системе (10) и покажем, что в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ для нее выполняются условия, аналогичные 1), 2), 3), 4). Справедливость первых двух непосредственно вытекает из свойств функций F_j и φ, ввиду (11). Точно так же условие 3), в связи с (11) и (9), дает нам (для $j=1, \ldots, m-1$)

$$\begin{aligned} \Phi_j(y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0) = F_j(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0, \varphi(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)) &= \\ = F_j(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0, y_m^0) &= 0. \end{aligned}$$

---

*) Поясним, что $(n+m-1)$-мерный (открытый) параллелепипед d^* предполагается настолько малым, чтобы определяющие его промежутки содержались в соответствующих промежутках, определяющих $(n+m)$-мерный параллелепипед $\mathscr{D}^*$. Та окрестность точки $(x_1^0, \ldots, y_m^0)$, о которой упоминается в заключении а), и определится всеми промежутками, связанными с d^*, с присоединением к ним последнего из промежутков, связанных с $\mathscr{D}^*$.

Остается лишь рассмотреть якобиан (аналогичный J)

$$J^* = \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{D(y_1, \ldots, y_{m-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

и убедиться в том, что он отличен от нуля в точке $(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)$. С этой целью преобразуем определитель J, прибавляя к элементам первых его $m-1$ столбцов элементы m-го столбца, умноженные соответственно на $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}$:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Если считать здесь $y_m = \varphi(x_1, \ldots, y_{m-1})$, то все элементы, кроме находящихся в последней строке и в последнем столбце, будут представлять собой частные производные от функций Φ_j (по $y_1, \ldots, y_{m-1}$). Именно, ввиду (11), дифференцируя Φ_j как сложную функцию по $y_1, \ldots, y_{m-1}$ [пользуясь правилом n° **181**], получим для $j = 1, \ldots, m-1$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1} = \frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_{m-1}} = \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}.$$

С другой стороны, если продифференцировать по $y_1, \ldots, y_{m-1}$ тождество (8) *, то окажется, что

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} = 0.$$

---

*) Ведь если (сложная) функция, стоящая в (8) слева, тождественно равна нулю, то и производные ее по любому аргументу — также нули.

Таким образом, элементы в последней строке (кроме последнего) все равны нулю. Окончательно

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Разложив этот определитель по элементам последней строки, придем к результату

$$J=J^*\cdot\frac{\partial F_m}{\partial y_m}.$$

Положим, наконец, здесь $x_1=x_1^0, \ldots, y_{m-1}=y_{m-1}^0$; тогда $y_m=\varphi(x_1, \ldots, y_{m-1})$, в силу (9), обратится в y_m^0. Так как в этом случае, по условию 4), J отлично от нуля, то не может быть нулем и J^*, ч. и тр. д.

Для системы (10), содержащей $m-1$ уравнений, наша теорема предположена верной. Следовательно, система эта в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ определяет однозначные функции (12), непрерывные и имеющие непрерывные производные; кроме того, эти функции удовлетворяют и требованию б):

$$f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0)=y_1^0, \ldots, f_{m-1}(x_1^0, \ldots, x_n^0)=y_{m-1}^0. \tag{13}$$

Отсюда следует, что m-я функция (12а) также непрерывна и имеет непрерывные производные, и, наконец, принимая во внимание (13) и (9):

$$f_m(x_1^0, \ldots, x_n^0)=$$
$$=\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0; f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, f_{m-1}(x_1^0, \ldots, x_n^0))=$$
$$=\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0)=y_m^0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Мы обращаем внимание читателя на локальный характер всех теорем существования неявных функций: *речь идет все время лишь о некоторой окрестности рассматриваемой точки.* Но и в таком виде эти теоремы полезны; например, читатель увидит это в главе VII, где при изучении свойств геометрического образа в данной его точке совершенно достаточно ограничиться непосредственной ее окрестностью.

209. Вычисление производных неявных функций. Ход рассуждений, с помощью которых устанавливались теоремы существования неявных функций, в общем случае не давал представления о самом способе вычисления производных (первого порядка) от неявных функций. О производных высшего порядка и вовсе не было речи. Теперь на этих важных вопросах мы остановимся специально.

Начнем с простейшего случая, когда дано уравнение (1). Будем считать выполненными, в окрестности рассматриваемой точки, условия теоремы II; существенную роль в дальнейшем будет играть требование $F'_y \neq 0$.

Покажем простой прием для вычисления производной y'_x (если существование ее наперед известно). Мы знаем, что если неявную функцию $y=f(x)$ подставить в уравнение (1), то оно обратится в тождество [см. (2), **205**]. Итак, если под y разуметь именно эту функцию от x, то левая часть равенства (1), $F(x, y)$, представит собой сложную функцию от x, которая тождественно равна нулю. Тогда и производная ее по x также есть нуль. Если продифференцировать эту функцию по правилу n° **181**, то получим

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)\cdot y'_x=0\,^{*)}, \tag{14}$$

откуда (так как $F'_y \neq 0$)

$$y'_x=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}; \tag{15}$$

мы пришли к уже известной нам формуле [ср. (3) **206**].

Теперь можем пойти дальше. Если функция $F(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка, то выражение, стоящее в формуле (15) справа, может быть продифференцировано по x, следовательно существует и производная от y'_x, т. е. вторая производная y''_{x^2}, от неявной функции y. Выполняя дифференцирование и подставляя всякий раз вместо y'_x ее выражение (15), найдем

$$y''_{x^2}=\frac{(F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot y'_x)\cdot F'_x-(F''_{x^2}+F''_{xy}\cdot y'_x)\cdot F'_y}{F'^2_y}=$$

$$=\frac{2F'_x\cdot F'_y\cdot F''_{xy}-F'^2_y\cdot F''_{x^2}-F'^2_x\cdot F''_{y^2}}{F'^3_y};$$

отсюда же видим, что вторая производная будет непрерывной функцией от x.

Если функция $F(x, y)$ имеет непрерывные производные третьего порядка, то, очевидно, существует и третья производная от неявной функции: y'''_{x^3}; ее выражение снова может быть полу-

*) Собственно, такого же типа рассуждение мы уже проводили выше. Ср. сноску на стр. 458.

чено непосредственным дифференцированием выражения для y''_{x^2}, и т. д. С помощью математической индукции легко доказать, что *существование непрерывных производных функции* $F(x, y)$ *до k-го порядка* ($k>1$) *включительно обеспечивает и существование* (*непрерывной*) *производной k-го порядка от неявной функции.*

После того как, таким образом, самый факт существования последовательных производных от неявной функции установлен, вычисление их проще производить путем повторного дифференцирования тождества (14), с учетом того, что y есть функция от x: Например, первое же дифференцирование этого тождества даст нам

$$F''_{x^2}+F''_{xy}\cdot y'_x+(F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot y'_x)\cdot y'_x+F'_y\cdot y''_{x^2}=0, \tag{16}$$

откуда (ведь $F'_y\neq 0$!)

$$y''_{x^2}=-\frac{F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot y'_x+F''_{y^2}\cdot y'^2_x}{F'_y};$$

подставив вместо y'_x его выражение (15), вернемся к уже найденному выражению для y''_{x^2}; и т. д.

Аналогично обстоит дело и в случае уравнения (4) с бо́льшим числом переменных. Здесь предполагаем выполненными условия теоремы III. Если под y разуметь неявную функцию, определяемую уравнением (4), то (4) превращается в т о ж д е с т в о. Фиксируя значения $x_2, \ldots, x_n$ и рассматривая y как функцию лишь от x_1, продифференцируем это тождество по x_1:

$$F'_{x_1}+F'_y\cdot y'_{x_1}=0, \quad \text{откуда} \quad y'_{x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_y};$$

точно так же получим

$$y'_{x_2}=-\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \ \ldots, \ y'_{x_n}=-\frac{F'_{x_n}}{F'_y} \quad \text{и т. д.}$$

Если нужны в с е производные первого, второго, ... порядка, то проще сразу вычислять dy, d^2y, ... Продифференцируем же наше тождество п о л н ы м о б р а з о м, т. е. приравняем нулю полный дифференциал от его левой части [используя при этом и н в а р и а н т н о с т ь ф о р м ы первого дифференциала, **185**]:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,$$

так что

$$dy=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}dx_1-\ldots-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}dx_n.$$

В то же время

$$dy=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n.$$

Ввиду произвольности $dx_1, \ldots, dx_n$, отсюда ясно, что

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \ \ldots, \ \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

как мы и получили выше.

Дифференцируя еще раз, получим

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y} dy\right] dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y} d^2 y = 0$$

и определим $d^2 y$, что приведет нас к выражениям для

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \ \ldots,$$

и т. д. Мы видим, что во всех этих выкладках основную роль играет условие, что

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений (5). Будем предполагать, что в окрестности взятой точки выполняются условия теоремы IV. Снова обращаем внимание на роль, которую будет играть требование $J \neq 0$.

Мы знаем, что неявные функции $y_1, \ldots y_m$ имеют частные производные по $x_1, \ldots, x_n$. Самое *вычисление* их производится дифференцированием тождеств, которые получаются из (5), если под $y_1, \ldots, y_m$ разуметь именно упомянутые неявные функции. Дифференцирование по x_1, например, дает

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0. \end{array}\right.$$

Это — система *линейных* уравнений относительно неизвестных $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1}$, *с отличным от нуля* определителем

$$J = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}, \ \ldots, \ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, x_1)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}.$$

Аналогичные выражения получаются и для производных от $y_1, \ldots, y_m$ по $x_2, \ldots, x_n$.

Если функции $F_1, \ldots, F_m$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, то правые части всех полученных формул имеют (непрерывные) производные по всем аргументам, следовательно, существуют (непрерывные) вторые производные от неявных функций. Вообще (как это легко доказать индуктивно) *существование для функций $F_1, \ldots, F_m$ непрерывных производных до k-го порядка включительно влечет за собой существование и непрерывность всех производных k-го порядка и для неявных функций.*

Вычисление производных от неявных функций и в общем случае также производится либо дифференцированием тождеств (5) по тем или другим переменным, либо дифференцированием их полным образом. Получаемая для определения производных или дифференциалов система линейных уравнений своим определителем всегда имеет отличный от нуля якобиан J. Эти замечания станут более ясными на примерах.

210. Примеры. 1) Пусть y связано с x уравнением

$$\ln \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Дифференцируя последовательно по x (причем y считаем функцией от x), получим

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2} \quad \text{или} \quad x+yy' = xy'-y;$$

затем

$$1+y'^2+yy'' = xy'';$$

и т. д. Из первого уравнения находим

$$y' = \frac{x+y}{x-y},$$

из второго (если подставить найденное значение y')

$$y'' = \frac{1+y'^2}{x-y} = 2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3},$$

и т. д.

2) Дано уравнение

$$F(x, y) = x^3+y^3-3axy = 0.$$

Требуется найти экстремумы определяемой им неявной функции y от x.

Имеем здесь

$$F'_x = 3(x^2-ay), \quad F'_y = 3(y^2-ax).$$

Ввиду (15), для того чтобы было $y'_x = 0$, должно выполняться равенство $F'_x = 0$. Решая совместно уравнения $F=0$ и $F'_x=0$, найдем две пары соответственных значений x и y:

$$x=0, \quad y=0 \quad \text{и} \quad x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Но в первой точке обращается в нуль и F'_y, так что мы не можем утверждать, что в ее окрестности наше уравнение определяет y как однозначную функцию от x; поэтому точку (0, 0) оставляем в стороне.

Во второй точке $F'_y = 3a^2\sqrt[3]{2} > 0$, и к ней приложима теорема II. Чтобы убедиться в наличии экстремума, вычислим y''_{x^2} при $x = a\sqrt[3]{2}$; проще всего исходить из (16), полагая там $y'_x = 0$;

$$y''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2}}{F'_y}\ ^{*)}.$$

Так как $F''_{x^2} = 6x > 0$ при $x = a\sqrt[3]{2}$, то $y''_{x^2} < 0$, и налицо максимум.

3) Пусть неявная функция z от x, y определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Имеем последовательно

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0, \quad dz = -\frac{c^2x}{a^2z}\,dx - \frac{c^2y}{b^2z}\,dy,$$

так что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}.$$

Затем

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{z\,d^2z}{c^2} = 0,$$

откуда (если воспользоваться известным уже выражением для dz)

$$d^2z = -\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

что дает нам

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \quad \text{и т. д.}$$

4) Пусть z определяется, как функция от x и y, из уравнения

$$z = x + y \cdot \varphi(z).$$

Предполагая $1 - y \cdot \varphi'(z) \neq 0$, доказать, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y \cdot \varphi'(z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y \cdot \varphi'(z)},$$

откуда и вытекает требуемое.

5) Пусть из уравнения

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

---

*) Это — не общее выражение для y''_{x^2}; оно годится лишь в интересующей нас точке $(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$.

переменная z определяется как неявная функция от x и y. Предполагая $x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$, установить, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$$

или

$$r \cdot q^2 - 2pq \cdot s + t \cdot p^2 = 0,$$

где для краткости положено

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Последовательно дифференцируя по x и по y, получим

$$\varphi(z) + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot p = 0, \qquad [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot q = 1$$

и, далее,

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi'(z) \cdot p + [x \cdot \varphi''(z) + \psi''(z)] \cdot p^2 + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot r &= 0, \\ \varphi'(z) \cdot q + [x \cdot \varphi''(z) + \psi''(z)] \cdot pq + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot s &= 0, \\ [x \cdot \varphi''(z) + \psi''(z)] \cdot q^2 + [x \cdot \varphi'(z) + \psi'(z)] \cdot t &= 0. \end{aligned}\right| \begin{aligned} q^2 \\ -2pq \\ p^2 \end{aligned}$$

Сложив последние три равенства, предварительно умноженные на q^2, $-2pq$, p^2, и придем к требуемому соотношению.

6) Пусть дана система

$$x + y + z + u = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3,$$

определяющая y, z, u как функции от x. Имеем

$$1 + y' + z' + u' = 0, \quad x + yy' + zz' + uu' = 0, \quad x^2 + y^2y' + z^2z' + u^2u' = 0.$$

Предполагая определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix} = (z - y)(u - y)(u - z)$$

не равным нулю, имеем отсюда

$$y' = -\frac{(z - x)(u - x)}{(z - y)(u - y)} \quad \text{и т. д.}$$

7) Пусть переменные x, y, z связаны с переменными r, θ, φ соотношениями

$$x = r \cdot \cos\theta \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\theta \cos\varphi, \quad z = r \cdot \sin\varphi,$$

где $0 < r < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Якобиан

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\,\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\,\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi > 0.$$

Упомянутые соотношения определяют r, θ, φ как функции от x, y, z. Для вычисления производных этих функций продифференцируем эти соотношения *полным образом*:

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\varphi\,dr - r \cdot \sin\theta\cos\varphi\,d\theta - r \cdot \cos\theta\,\sin\varphi\,d\varphi &= dx, \\ \sin\theta\cos\varphi\,dr + r \cdot \cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r \cdot \sin\theta\,\sin\varphi\,d\varphi &= dy, \\ \sin\varphi\,dr \qquad\qquad\qquad\qquad + r \cdot \cos\varphi\,d\varphi &= dz. \end{aligned}$$

Отсюда определим dr, $d\theta$ и $d\varphi$:

$$dr = \frac{r^2 \cdot \cos\theta \cos^2\varphi}{J} dx + \frac{r^2 \sin\theta \cos^2\varphi}{J} dy + \frac{r^2 \cdot \sin\varphi \cos\varphi}{J} dz,$$

$$d\theta = -\frac{r \sin\theta}{J} dx + \frac{r \cdot \cos\theta}{J} dy,$$

$$d\varphi = -\frac{r \cdot \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi}{J} dx - \frac{r \cdot \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi}{J} dy + \frac{r \cdot \cos^2\varphi}{J} dz.$$

Этим, собственно, уже и найдены интересующие нас производные (если учесть указанное выше значение J):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r \cdot \cos\varphi}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r \cdot \cos\varphi}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\theta \sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin\theta \sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Предложенные уравнения легко решить относительно r, θ, φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Это дает возможность вычислить все эти производные и тем проверить найденные результаты.

8) В качестве заключительного примера на дифференцирование неявных функций выведем еще одну формулу, снова подчеркивающую аналогию между якобианом системы функций и производной одной функции.

Пусть дана система n уравнений с $2n$ переменными:

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Предполагая якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

отличным от нуля, рассмотрим $y_1, y_2, \ldots, y_n$ как функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемые этой системой уравнений и, следовательно, обращающие их в тождества. Дифференцируя эти тождества по каждому x_j, результаты можем представить в виде

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_j}.$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Определитель, составленный из левых частей этих равенств, есть

$$(-1)^n \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)};$$

определитель же, составленный из правых частей, очевидно, представляет собой произведение определителей

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \quad \text{и} \quad \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

[см. **203** (3)]. Отсюда получается формула

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}},$$

являющаяся аналогом формулы (15).

Если уравнения даны в виде, разрешенном относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то под рассмотренный случай это подойдет, если положить $F_i = \varphi_i - x_i$. Так как здесь $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -1$ или 0, смотря по тому, будет ли $i = j$ или $i \neq j$, то числитель сведется к

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n,$$

и формула примет вид

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}.$$

Этот результат нам уже знаком [**203** (4)].

§ 3. Некоторые приложения теории неявных функций

211. Относительные экстремумы. Рассмотрим вопрос об экстремуме функции $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ от $n+m$ переменных в предположении, что эти переменные подчинены еще m *уравнениям связи*

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0 \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Мы уточним понятие о таком *относительном экстремуме* и укажем приемы для его разыскания.

Говорят, что *в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$, удовлетворяющей уравнениям связи, функция $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ имеет относительный максимум (минимум), если неравенство*

$$f(x_1, \ldots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$
$$(\geqslant)$$

выполняется в некоторой окрестности точки M_0 для всех ее точек $(x_1, \ldots, x_{n+m})$, удовлетворяющих уравнениям связи.

Мы будем предполагать, что как функция f, так и функции Φ_i имеют в окрестности рассматриваемой точки непрерывные частные производные по всем аргументам. Пусть, далее, в точке M_0 отличен от нуля хоть один из определителей m-го порядка, составленных из матрицы частных производных *)

$$\begin{matrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{matrix}, \tag{2}$$

например, определитель

$$\frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+1}} \cdots \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Тогда, если ограничиться достаточно малой окрестностью точки M_0, по теореме IV система (1) равносильна системе вида

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{n+m} = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ суть неявные функции, определяемые системой (1). Иными словами, требование, чтобы значения переменных $x_1, \ldots, x_n$, $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ удовлетворяли уравнениям связи (1), можно заменить предположением, что переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ представляют собой функции (4) от $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, вопрос об относительном экстремуме для функции $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ от $n+m$ переменных в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ сводится к вопросу об обыкновенном (абсолютном) экстремуме для

*) В этом случае говорят, что матрица (2) имеет (в точке M_0) ранг m.

сложной функции от n переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n;\ \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (5)$$

в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Эти соображения указывают и на реальный путь для нахождения точки, доставляющей относительный экстремум функции $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$: если мы умеем фактически разрешить уравнения связи, например, относительно переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, и найти явные выражения для функций (4), то дело сводится к нахождению абсолютного экстремума для сложной функции (5). Собственно говоря, мы так именно и поступали в ряде ранее решенных задач [**200, 201**], например, когда мы искали наименьшее значение для суммы $x+y+z+t$ при условии $xyzt=c^4$, и т. п.

Укажем теперь другой путь для нахождения точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$, не предполагая, что мы имеем явные выражения для (неявных) функций (4), хотя существованием этих функций мы будем пользоваться и здесь.

Итак, пусть в точке M_0 функция $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ имеет относительный экстремум или — что то же — сложная функция (5) в точке P_0 имеет экстремум абсолютный. Тогда, по замечанию I n° **196**, в этой точке должен обращаться в нуль ее дифференциал и притом — тождественно относительно дифференциалов независимых переменных $dx_1, \ldots, dx_n$. По инвариантности формы первого дифференциала [**185**], это условие можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0, \qquad (6)$$

где под $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ разумеются дифференциалы функции (4) в точке P_0, в то время как частные производные вычислены в точке M_0, ибо (как явствует из теоремы IV)

$$\varphi_1(x_1^0, \ldots, x_n^0) = x_{n+1}^0, \ldots, \varphi_m(x_1^0, \ldots, x_n^0) = x_{n+m}^0. \qquad (7)$$

Из (6) *нельзя, конечно, заключить о равенстве нулю коэффициентов при дифференциалах, так как не все эти дифференциалы произвольны.* Для того чтобы свести дело к произвольно выбираемым дифференциалам, т. е. к дифференциалам $dx_1, \ldots, dx_n$ независимых переменных, мы постараемся исключить отсюда дифференциалы $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ переменных зависимых. Это легко сделать, если продифференцировать полным образом уравнения связи (1), разумея под $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ функции (4) *):

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m). \qquad (8)$$

*) Точнее говоря, мы дифференцируем те тождества, которые получаются из уравнений (1), если вместо $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ в них подставить неявные функции (4). Подобный способ речи мы будем применять и впредь.

Здесь, как и выше, ввиду (7), частные производные вычислены в точке M_0. Так как, по предположению, определитель (3) в этой точке — не нуль, то $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ могут быть отсюда линейно выражены через $dx_1, \ldots, dx_n$. Если эти выражения подставить в (6), то получится равенство вида

$$A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n = 0,$$

где $A_1, \ldots, A_n$ означают n выражений, рациональных относительно частных производных функций Φ_j, и здесь взятых в точке M_0. Так как в этом равенстве фигурируют только дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ независимых переменных, то в точке M_0 имеем

$$A_1 = 0, \ldots, A_n = 0.$$

Вместе с уравнениями связи это дает $n+m$ уравнений для определения неизвестных $x_1, \ldots, x_{n+m}$.

Конечно, мы установили лишь необходимые условия для экстремальной точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$. Но и в таком виде условия могут быть полезны даже для разыскания наибольшего (или наименьшего) значения функции f при условиях (1), если по характеру вопроса наперед ясно, что внутри рассматриваемой области должна существовать точка, где это наибольшее (наименьшее) значение достигается, или если такое допущение сделано в порядке наведения, с тем чтобы найденную точку апробировать другими соображениями. Примеры приведены ниже, в **214**.

212. Метод неопределенных множителей Лагранжа. В изложенном выше способе нарушается симметрия в отношении переменных: часть из них трактуются как независимые, часть — как зависимые, одни дифференциалы исключаются, другие сохраняются. Иногда это влечет за собой усложнение выкладок. Лагранж предложил метод, при котором все переменные сохраняют одинаковую роль.

Умножим равенства (8), соответственно, на произвольные пока («неопределенные») множители λ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) и результаты почленно сложим с (6). Мы получим равенство

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0, \tag{9}$$

где по-прежнему $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ означают дифференциалы неявных функций (4) (в рассуждении мы пока сохраняем неравноправие переменных); производные вычислены в точке M_0.

Выберем теперь значения множителей $\lambda_i = \lambda_i^0$ ($i = 1, \ldots, m$) так, чтобы обращались в нуль именно коэффициенты при зависимых дифференциалах $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_m^0 \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} = 0 \tag{10}$$

$$(j = n+1, \ldots, n+m).$$

Это сделать можно, поскольку определитель (3) системы линейных уравнений, получающейся для определения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, отличен от нуля. При выбранных значениях множителей равенство (9) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\ldots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0. \tag{9*}$$

Здесь мы снова имеем дело лишь с дифференциалами независимых переменных, поэтому коэффициенты при них должны быть нулями, т. е. наряду с (10) имеем и

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\ldots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \tag{10*}$$
$$(j=1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Итак, для определения $n+m$ неизвестных $x_1, \ldots, x_{n+m}$, да еще m множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, имеем столько же уравнений, именно m уравнений связи и $n+m$ уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\ldots+\lambda_m\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0$$
$$(j=1,\ 2, \ldots,\ n+m)$$

[см. (10) и (10*)].

Для того чтобы облегчить выписывание этих уравнений, обыкновенно вводят вспомогательную функцию

$$F=f+\lambda_1\Phi_1+\ldots+\lambda_m\Phi_m;$$

тогда упомянутые уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0 \quad (j=1,\ 2, \ldots,\ n+m). \tag{11}$$

Они выглядят так же, как и условия обыкновенного экстремума для функции F. Это следует рассматривать лишь как указание, облегчающее запоминание.

И метод Лагранжа приводит к необходимым условиям. В остальном здесь может быть повторено то, что было сказано в конце предыдущего номера.

Замечание. В изложенной теории существенную роль играло предположение о ранге матрицы (2), которым мы воспользовались трижды. При решении задач одним из указанных методов — для уверенности в том, что не пропущена ни одна точка, доставляющая функции относительный экстремум, — следовало бы предварительно установить, что упомянутое предположение выполняется на деле во всех точках рассматриваемой области, удовлетворяющих уравнениям связи. В простых случаях мы будем предоставлять это читателю.

213. Достаточные для относительного экстремума условия. По этому поводу мы ограничимся немногими замечаниями. Предположим существование и непрерывность вторых производных для функций f и Φ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$. Пусть теперь точка $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$, совместно с множителями $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$, удовлетворяет установленным выше необходимым условиям.

Вопрос о наличии в этой точке (относительного) экстремума зависит, как и в **198**, от знака разности

$$\Delta = f(x_1, \ldots, x_{n+m}) - f(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0),$$

с той лишь существенной оговоркой, что и точка $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ удовлетворяет уравнениям связи (1) или — что то же — (4). Легко понять, что для таких точек приращение функции f может быть заменено приращением функции F (где все множители λ_i мы считаем равными λ_i^0):

$$\Delta = F(x_1, \ldots, x_{n+m}) - F(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0).$$

Ввиду того, что в точке M_0 выполняются условия (11), — в этом-то и состоит выгода перехода к функции F, — это приращение, по формуле Тейлора, может быть записано так [ср. **198**, (8)]:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,\,k=1}^{n+m} A_{jk}\Delta x_j \Delta x_k + \sum_{j,\,k=1}^{n+m} \alpha_{jk}\Delta x_j \Delta x_k\right\},$$

где

$$\Delta x_j = x_j - x_j^0, \quad A_{jk} = F''_{x_j x_k}(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots, n+m)$$

и $\alpha_{jk} \to 0$, если $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$ (остальные приращения $\Delta x_{n+1}, \ldots, \Delta x_{n+m}$ при этом сами собой будут бесконечно малыми по непрерывности функций (4)).

Если заменить здесь все приращения Δx_j соответствующими дифференциалами dx_j, то по отношению к независимым переменным это вообще ничего не изменит; что же касается зависимых переменных, то произведенная замена вызовет лишь необходимость поставить вместо коэффициентов α_{jk} другие бесконечно малые β_{jk}:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,\,k=1}^{n+m} A_{jk}dx_j dx_k + \sum_{j,\,k=1}^{n+m} \beta_{jk}dx_j dx_k\right\}.$$

Переход к дифференциалам выгоден потому, что дифференциалы зависимых и независимых переменных связаны системой линейных соотношений (8). Так как определитель (3) в точке M_0, по предположению, — не нуль, то отсюда зависимые дифференциалы выразятся линейно через независимые. Подставив их выражения в Δ,

мы, вместо первой суммы, получим квадратичную форму относительно дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$.

А теперь, так же как и в **198** и **199**, можно показать, что: *если эта форма будет определенной и притом положительной (отрицательной), то в испытуемой точке будет относительный минимум (максимум): если же форма оказывается неопределенной, то относительного экстремума нет.*

Впрочем, практическое значение этого критерия невелико (ср. замечание в **200**).

Перейдем к примерам и задачам.

214. Примеры и задачи. 1) Пусть требуется найти экстремум функции $f = x + y + z + t$ при условии $\Phi = xyzt - c^4 = 0$; область изменения переменных определяется неравенствами $x > 0$, $y > 0$, $y > 0$, $t > 0$. Мы уже решали эту задачу в **200**, 4) фактически выражая t из последнего условия. Теперь, дифференцируя это равенство полным образом, найдем

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} = 0, \text{ откуда } dt = -t\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right).$$

Исключая dt из равенства $df = dx + dy + dz + dt = 0$, придем к результату

$$\left(1 - \frac{t}{x}\right) dx + \left(1 - \frac{t}{y}\right) dy + \left(1 - \frac{t}{z}\right) dz = 0,$$

который, ввиду произвольности dx, dy и dz, распадается на три:

$$1 - \frac{t}{x} = 0, \quad 1 - \frac{t}{y} = 0, \quad 1 - \frac{t}{z} = 0,$$

так что $x = y = z = t = c$.

Применяя к той же задаче метод Лагранжа, введем вспомогательную функцию

$$F = x + y + z + t + \lambda xyzt \text{ *)}$$

и составим условия:

$$F'_x = 1 + \lambda yzt = 0, \ldots, \quad F'_t = 1 + \lambda xyz = 0,$$

откуда

$$yzt = xzt = xyt = xyz, \text{ так что } x = y = z = t = c.$$

Для того чтобы воспользоваться результатом предыдущего n°, вычислим $\lambda = -\frac{1}{c^3}$ и рассмотрим функцию

$$F = x + y + z + t - \frac{xyzt}{c^3}.$$

Ее второй дифференциал (в точке $x = y = z = t = c$) будет

$$d^2F = -\frac{2}{c}(dx\,dy + dx\,dz + dx\,dt + dy\,dz + dy\,dt + dz\,dt).$$

Дифференцируя уравнения связи (все в той же точке), получим

$$dx + dy + dz + dt = 0.$$

---

*) Если вспомнить роль этой функции, то станет ясно, что постоянное слагаемое в составе Φ здесь может быть опущено без вреда.

Если определить отсюда dt и подставить в предыдущее выражение, то окончательно найдем

$$-\frac{2}{c}[dx\,dy+dx\,dz+dy\,dz-(dx+by+dz)^2]=$$
$$=\frac{1}{c}[(dx+dy+dz)^2+dx^2+dy^2+dz^2].$$

Так как эта форма, очевидно, определенная и положительная, то в найденной точке будет относительный минимум.

[Отсюда, однако, нельзя сделать заключение, что этот минимум будет и наименьшим значением функции $f=x+y+z+t$ при указанной связи между значениями ее аргументов; ср. **200**, 4).]

2) Станем вновь [ср. **200**, 2)] искать наименьшее и наибольшее значения функции

$$u=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2$$
$$(a>b>c>0)$$

при наличии связи:

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

т. е. на сферической поверхности, выраженной этим уравнением *).

С этой целью, сначала найдем по методу Лагранжа все относительные экстремумы функции. Вспомогательная функция

$$F=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2)$$

приводит к условиям:

$$x[(a^2+\lambda)-2a(ax^2+by^2+cz^2)]=0,$$
$$y[(b^2+\lambda)-2b(ax^2+by^2+cz^2)]=0,$$
$$z[(c^2+\lambda)-2c(ax^2+by^2+cz^2)]=0,$$

к которым надлежит присоединить еще уравнение связи. Отсюда

(1) $x=0,\ y=0,\ z=\pm 1\quad (u=0)$;

(2) $x=0,\ y=\pm 1,\ z=0\quad (u=0)$;

(3) $x=\pm 1,\ y=0,\ z=0\quad (u=0)$;

(4) $x=0,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \left(u=\frac{1}{4}(b-c)^2\right)$;

(5) $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=0,\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \left(u=\frac{1}{4}(a-c)^2\right)$;

(6) $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad z=0\ \left(u=\frac{1}{4}(a-b)^2\right)$.

Выбирая из указанных в скобках значений u наименьшее и наибольшее, мы и придем к решению задачи [ср. **200**, 2)].

3) Вернемся к задаче о наивыгоднейших сечениях проводов в электрической сети с параллельным включением [**201**, 8)]. Сохраняя принятые там обозначения, будем искать экстремум функции

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n)=l_1q_1+l_2q_2+\ldots+l_nq_n$$

при условии, что

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n)=\frac{\rho l_1J_1}{q_1}+\frac{\rho l_2J_2}{q_2}+\ldots+\frac{\rho l_nJ_n}{q_n}=e;$$

---

*) Ввиду того, что эта поверхность представляет замкнутое ограниченное множество, существование на ней точек, где функция принимает наименьшее и наибольшее значение, вытекает из теоремы Вейерштрасса [см. замечание в конце n° **173**].

при этом мы не станем даже вводить, взамен $q_1, q_2, \ldots, q_n$, другие переменные, как сделали это выше, ибо нашими новыми методами задача и так решается просто.

Итак, дифференцируя полным образом уравнение $\Phi=0$, получим затем следующее выражение для дифференциала dq_n:

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_n J_n}\left\{\frac{l_1 J_1}{q_1^2}\,dq_1 + \ldots + \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\,dq_{n-1}\right\}.$$

Подставляя его в равенство $df = l_1 dq_1 + \ldots + l_{n-1} dq_{n-1} + l_n dq_n = 0$, придем к результату:

$$\left(l_1 - \frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_1 J_1}{q_1^2}\right)dq_1 + \ldots + \left(l_{n-1} - \frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\right)dq_{n-1} = 0.$$

Так как $dq_1, \ldots, dq_{n-1}$ уже произвольны, то коэффициенты при них порознь нули, откуда

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \frac{q_2^2}{J_2} = \ldots = \frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}} = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2$$

и

$$q_1 = \lambda\sqrt{J_1},\quad q_2 = \lambda\sqrt{J_2},\ \ldots,\ q_n = \lambda\sqrt{J_n}. \tag{12}$$

Множитель пропорциональности λ легко определить из уравнения связи:

$$\lambda = \frac{\rho}{e}\sum_{i=1}^{n} l_i\sqrt{J_i}.$$

Если применить метод Лагранжа, то нужно построить вспомогательную функцию *)

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_n) = l_1 q_1 + \ldots + l_n q_n + \lambda^2\left(\frac{l_1 J_1}{q_1} + \ldots + \frac{l_n J_n}{q_n}\right)$$

и приравнять нулю ее производные:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = l_1 - \frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial q_n} = l_n - \frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2} = 0,$$

откуда снова получаем (12), и т. д.

4) В качестве более сложного примера рассмотрим такую задачу: трехосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$ пересечен плоскостью $lx + my + nz = 0$, проходящей через его центр; требуется определить полуоси получающегося в сечении эллипса. Иными словами, нужно найти экстремальные значения функции $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, если переменные подчинены указанным выше двум уравнениям связи.

Метод исключения зависимых дифференциалов [211] здесь приводит к сложным выкладкам; поэтому мы сразу прибегнем к методу Лагранжа.

Для того чтобы убедиться, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

*) «Неопределенный множитель» мы для удобства берем в форме λ^2 и включаем в него постоянную ρ.

равен 2 во всех точках пересечения эллипсоида с плоскостью *), допустим противное. Из обращения в 0 всех определителей второго порядка следует пропорциональность элементов верхней и нижней строк; но тогда равенство $lx+my+nz=0$ влечет за собой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, что невозможно.

Составив вспомогательную функцию

$$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\mu(lx+my+nz),$$

приравняем нулю ее производные:

$$x+\lambda\cdot\frac{x}{a^2}+\mu l=0,\quad y+\lambda\cdot\frac{y}{b^2}+\mu m=0,\quad z+\lambda\cdot\frac{z}{c^2}+\mu n=0. \tag{13}$$

Умножая эти уравнения, соответственно, на x, y, z и складывая, получим (с учетом уравнений связи), что $\lambda=-r^2$.

Если предположить, для определенности, что ни одно из чисел l, m, n не равно нулю, то из (13) можно усмотреть, что r не равно ни a, ни b, ни c. Тогда уравнения (13) перепишутся в виде:

$$x=-\mu\frac{la^2}{a^2-r^2},\quad y=-\mu\frac{mb^2}{b^2-r^2},\quad z=-\mu\frac{nc^2}{c^2-r^2}.$$

Отсюда легко найти μ, а с ним и x, y, z; но минуя это, можно, сложив эти равенства, предварительно умноженные на l, m, n, получить уравнение

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2}+\frac{m^2b^2}{b^2-r^2}+\frac{n^2c^2}{c^2-r^2}=0,$$

откуда непосредственно и определяются интересующие нас два экстремальные значения r^2.

Так как существование этих экстремальных значений наперед известно, то здесь, таким образом, получается полное решение вопроса.

5) Наконец, предложим себе найти наименьшее и наибольшее значения квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k\quad(a_{ik}=a_{ki})$$

при условии

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1\ ^{**}). \tag{14}$$

Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

Исключая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из условий

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}&\equiv(a_{11}-\lambda)\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}&\equiv a_{21}\cdot x_1+(a_{22}-\lambda)\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n}&\equiv a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)\cdot x_n=0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

*) См. замечание в **212**.

**) Здесь можно сделать замечание, аналогичное сноске на стр. 474.

придем к уравнению n-й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

относительно λ. Если λ есть один из его корней, то системе (15) линейных уравнений можно удовлетворить значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$, не сплошь равными нулю; умножив их на надлежащий множитель, можно добиться и выполнения условия (14). Однако определение этих значений не представляет для нас интереса, ибо, как увидим, вопрос о наименьшем и наибольшем значениях функции f решается и без них.

Действительно, умножая равенства (15), соответственно, на $x_1, x_2, \dots, x_n$ и почленно складывая, придем к равенству

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0$$

или, в силу (14),

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda.$$

Таким образом, если λ удовлетворяет уравнению (16), то значение функции f в соответствующей точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и равно самому λ.

Мы приходим к изящному результату: искомое наименьшее и наибольшее значения функции f, при соблюдении условия (14), совпадают с наименьшим и наибольшим из (вещественных) корней *) уравнения (16).

215. Понятие независимости функций. Рассмотрим систему функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

определенных и непрерывных, вместе со своими частными производными, в некоторой n-мерной открытой области $\mathscr{D}$.

Рассмотрим случай, когда значение одной из них, например y_j, однозначно определяется совокупностью тех значений, которые принимают остальные функции

$$(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m).$$

Точнее говоря, если $\mathscr{E}_0$ есть множество таких $(m-1)$-мерных точек, отвечающих всевозможным точкам $(x_1, \dots, x_n)$ в $\mathscr{D}$, то предполагается, что в $\mathscr{E}_0$ будет иметь место функциональная зависимость

$$y_j = \varphi(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots y_m), \qquad (18)$$

причем это равенство оказывается тождеством относительно x в $\mathscr{D}$, если вместо всех y_i подставить функции (17) **). Тогда

*) Впрочем, можно доказать, что все корни этого уравнения будут вещественными.

**) Существенно, что функция φ в числе своих непосредственных аргументов не содержит x.

говорят, что в области $\mathscr{D}$ функция y_j зависит от остальных. Впрочем, для того, чтобы иметь возможность применять дифференциальное исчисление, мы включим в определение еще требование, чтобы функция φ была определена и непрерывна со своими частными производными в некоторой открытой области $\mathscr{E}$ $(m-1)$-мерного пространства, содержащей множество $\mathscr{E}_0$.

Если, в частности, одна из функций (17), y_j, сводится к постоянной, то она явно будет зависеть от остальных: здесь можно просто положить $\varphi = \text{const}$. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называются вообще *зависимыми* в области $\mathscr{D}$, если одна из них (все равно какая) зависит от остальных.

Примеры. 1) Если положить

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \end{cases}$$

то нетрудно проверить, что во всем n-мерном пространстве будет выполняться тождество

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3.$$

2) Аналогично, для функций

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1x_3 + x_2, \\ y_3 = (x_1^2+1)(x_2^2+x_3^2) - (x_1^2-1)x_2x_3 - x_1(x_2^2 - x_3)^2 \end{cases}$$

имеем тождественно (в трехмерном пространстве)

$$y_3 = y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2.$$

Все это — *зависимые* функции.

Если ни в области $\mathscr{D}$, ни в какой-либо частичной, в ней содержащейся, области не имеет место тождество вида (18), то функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называют *независимыми* в области $\mathscr{D}$.

Ответ на вопрос о независимости функций дает рассмотрение так называемой *матрицы Якоби*, составленной из частных производных этих функций по всем независимым переменным:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Предполагая $n \geqslant m$, прежде всего имеем такую теорему:

Теорема 1. *Если хоть один определитель m-го порядка, составленный из элементов матрицы* (19), *отличен от нуля в области $\mathscr{D}$, то в этой области функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ независимы.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{20}$$

Если бы не равным нулю был не этот, а какой-нибудь другой определитель, то, изменив нумерацию переменных, можно было бы свести вопрос к случаю (20).

Доказательство теоремы будем вести от противного. Предположим, что одна из функций, например y_m, выражается через остальные, так что

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \tag{21}$$

хотя бы в некоторой части $\mathscr{D}_0$ области $\mathscr{D}$.

Продифференцировав это тождество по каждой из переменных x_i $(i = 1, \ldots, m)$, мы получим ряд тождеств (в $\mathscr{D}_0$) вида

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Мы видим, что элементы последней строки определителя (20) получаются путем сложения соответственных элементов первых $m-1$ строк, умноженных предварительно на множители $\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$. Такой определитель, как известно, равен нулю. Это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает невозможность равенства (21).

216. Ранг матрицы Якоби. Переходя к общему случаю, введем следующее определение. Назовем *рангом* матрицы *Якоби* (19) (*в области* $\mathscr{D}$) наивысший из порядков определителей, образованных из элементов этой матрицы и не обращающихся в нуль *тождественно* в $\mathscr{D}$. Может, конечно, случиться, что все элементы матрицы (19) тождественно обращаются в нуль; тогда говорят, что ранг матрицы есть 0; но этот случай не представляет интереса, ибо здесь попросту все функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ сводятся к постоянным [**183**]. Если ранг матрицы (19) есть $\mu \geqslant 1$, то существует хотя бы один определитель μ-го порядка, составленный из элементов матрицы (это, конечно, предполагает $m \geqslant \mu$ и $n \geqslant \mu$) и не равный в $\mathscr{D}$ тождественно нулю, в то время как все определители порядка выше μ (если таковы имеются) тождественно равны нулю. Говорят, что ранг μ *достигается* в некоторой точке области, если,

упомянутый определитель μ-го порядка именно в этой точке отличен от нуля.

Теорема II. *Пусть ранг матрицы Якоби в области $\mathscr{D}$ есть $\mu \geqslant 1$ и достигается он в точке*

$$M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

этой области. Тогда в некоторой окрестности $\mathscr{D}_0$ названной точки μ функций из числа наших m (именно те, производные которых входят в определитель μ-го порядка, не равный нулю в точке M_0) будут независимы, а остальные от них зависят.

Доказательство. Без умаления общности можно предположить, что в точке M_0 отличен от нуля именно определитель

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_\mu)}{D(x_1, \ldots, x_\mu)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial y_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Ввиду непрерывности частных производных, то же будет и в некоторой окрестности упомянутой точки, и, следовательно, по теореме I, функции $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ будут в этой окрестности независимы.

Обозначим теперь через $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_\mu^0$ значения этих функций в точке M_0. На основании теоремы IV n° **208** в некотором $(n+\mu)$-мерном параллелепипеде

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_0 = (&x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; \ldots; x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n; \\ &y_1^0 - \Delta_1, y_1^0 + \Delta_1: \ldots; y_\mu^0 - \Delta_\mu, y_\mu^0 + \Delta_\mu) \end{aligned} \qquad (23)$$

первые μ из уравнений (17)

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n) - y_1 = 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n) - y_2 = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_\mu(x_1, \ldots, x_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n) - y_\mu = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

определяют $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ как однозначные функции от остальных переменных $y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1} \ldots, x_n$, фигурирующих в этих уравнениях

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(y_1, \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_\mu = \varphi_\mu(y_1, \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\}. \qquad (25)$$

В упомянутой области системы уравнений (24) и (25) оказываются вполне равносильными, т. е. удовлетворяются одними и теми же значениями переменных $x_1, \ldots, x_n$, и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Из самой теоремы, на которую мы опирались, следует, что, если вместо $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ подставить в (24) функции (25), то получатся тождества относительно $y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$. Но для нас сейчас важно и другое: *если вместо $y_1, \ldots, y_\mu$, подставить в (25) функции $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, то получатся тождества относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$* — по крайней мере в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Именно, достаточно выбрать эту окрестность

$$\mathscr{D}_0 = (x_1^0 - \delta_1', x_1^0 + \delta_1';\ x_2^0 - \delta_2', x_2^0 + \delta_2';\ \ldots;\ x_n^0 - \delta_n', x_n^0 + \delta_n')$$

так, чтобы было

$$0 < \delta_1' \leqslant \delta_1, \quad 0 < \delta_2' \leqslant \delta_2, \ \ldots, \ 0 < \delta_n' \leqslant \delta_n$$

и, кроме того, чтобы для ее точек значения $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, определяемые из (24), т. е. значения $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, отличались от $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_\mu^0$, соответственно, меньше, чем на $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu$ *). Действительно, тогда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ попадает в $\mathscr{D}_0$, и одновременно с равенствами (24) должны выполняться и равенства (25).

Возьмем теперь (если $m > \mu$) любую из остальных функций (17), например $y_{\mu+1}$, и докажем, что она зависит от первых μ функций $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$. Если в равенство $y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_n)$ вместо $x_1, \ldots, x_\mu$ подставить функции (25), то $y_{\mu+1}$ представится в виде (сложной) функции от $y_1 \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(\varphi_1(y_1 \ldots, y_\mu;\ x_{\mu+1}, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi_\mu(y_1 \ldots, y_\mu;\ x_{\mu+1}, \ldots, x_n);\ x_{\mu+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ \equiv F_{\mu+1}(y_1, \ldots, y_\mu;\ x_{\mu+1}, \ldots, x_n). \quad (26) \end{aligned}$$

На основании сделанного выше замечания, если в это равенство вместо $y_1, y_2, \ldots, y_\mu, y_{\mu+1}$ подставить, соответственно, функции $f_1, f_2, \ldots, f_\mu, f_{\mu+1}$, то оно удовлетворится тождественно относительно x-ов в области $\mathscr{D}_0$.

Для того, чтобы убедиться в зависимости функции $y_{\mu+1}$ от функций $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, остается лишь доказать, что *функция $F_{\mu+1}$ в (27) на деле аргументов $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ не содержит.* С этой целью достаточно установить, что — тождественно относительно $y_1 \ldots, y_\mu; x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ — будет:

$$\frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+2}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_n} = 0.$$

---

*) Это можно осуществить ввиду непрерывности функций $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, принимающих в точке M_0 значения $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_\mu^0$.

[ср. n° **183**]. Остановимся для примера на первом равенстве; остальные доказываются аналогично.

Продифференцируем по $x_{\mu+1}$ уравнения (24), считая $x_1, \ldots, x_\mu$ функциями (25) от $y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$; мы получим равенства:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu+1}}=0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_2}{\partial x_{\mu+1}}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\ldots+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu+1}}=0, \end{array}\right\},$$

линейные относительно величин $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}$.

Из этих μ линейных равенств, как следствие, вытекает $(\mu+1)$-е линейное равенство

$$\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\ldots+\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}}=0, \tag{27*}$$

потому что определитель $(\mu+1)$-го порядка, составленный из коэффициентов при упомянутых величинах и из свободных членов во всех $\mu+1$ равенствах (27) и (27*), т. е. определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu+1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{\mu+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu+1}} \\ \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} \end{vmatrix}$$

тождественно равен нулю (ведь ранг матрицы (19) есть μ!). Но левая часть равенства (27*), по самому определению (26) функции $F_{\mu+1}$, представляет производную $\frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}}$. Таким образом, ввиду (27*), эта производная действительно равна нулю.

Итак, в функции $F_{\mu+1}$ аргументы $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ могут быть опущены: $y_{\mu+1}$ зависит лишь от $y_1, \ldots, y_\mu$, ч. и тр. д.

В примере 1), 215, матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \ldots & 2x_n \\ x_2+x_3+\ldots+x_n & x_1+x_3+\ldots+x_n & \ldots & x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Если к элементам третьей строки прибавить, соответственно, элементы второй, умноженные на $\frac{1}{2}$, то получится строка, состоящая (подобно первой) из равных элементов. Отсюда ясно уже, что все определители третьего порядка — нули. Ранг матрицы равен д в у м, и действительно — д в е функции из трех независимы, а третья зависит от этих двух.

Аналогично сказанное применяется и к примеру 2), **215**.

В заключение заметим, что возможны случаи, когда в одной части рассматриваемой области имеет место одна зависимость между функциями, а в другой осуществляется другая зависимость, или же функции оказываются независимыми, и т. п.

3) Пусть, например, функции y_1 и y_2 от двух независимых переменных x_1, x_2 определяются на плоскости x_1x_2 следующими равенствами:

$$y_1 = \begin{cases} x_1^3x_2^2, & \text{если } x_1 \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x_1 < 0. \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} x_1^2x_2^3, & \text{если } x_2 \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x_2 < 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что эти функции непрерывны вместе со своими производными на всей плоскости.

В данном случае ранг матрицы Я к о б и равен д в у м для первого координатного угла, е д и н и ц е — для второго и четвертого углов и, наконец, н у л ю — для третьего. Лишь в первом координатном угле функции независимы.

§ 4. Замена переменных

217. Функции одной переменной. Цель этого параграфа — дать представление о ф о р м а л ь н о м п р о ц е с с е замены переменных. Поэтому мы не будем здесь отвлекать внимание выяснением всех условий, при которых производимые манипуляции законны (что к тому же и не представляет никаких трудностей).

Значительная часть содержания настоящего параграфа могла бы быть изложена и раньше; однако нам казалось целесообразным сосредоточить весь материал, связанный с заменой переменных, в одном месте.

Пусть дано некоторое выражение

$$W = F(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \ldots),$$

содержащее независимую переменную x, функцию от нее y и ряд производных от y по x до некоторого порядка. Иной раз требуется перейти в подобном выражении к н о в ы м переменным — независимой t и функции от нее u, с которыми с т а р ы е переменные x и y связаны определенными соотношениями (носящими название *формул преобразования*). Точнее говоря, требуется представить W в функции от t, u и производных от u по t.

Такая з а м е н а п е р е м е н н ы х обычно мотивируется либо особым интересом, который представляют в рассматриваемом вопросе переменные t и u, либо тем упрощением, которое эта замена вносит в само выражение W.

Остановимся сначала на случае, когда заменяется лишь независимая переменная и дана формула преобразования, непосредственно связывающая x с новой независимой переменной t.

Предположим, что эта формула преобразования разрешена относительно x:

$$x = \varphi(t). \tag{1}$$

Если y есть функция от x, то через посредство x она является и функцией

от t. Мы имели уже в **121** формулы, выражающие производные от y по x через производные от x и y по t:

$$\left.\begin{aligned} y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{x^2}=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{x'^3_t},\\ y'''_{x^3}=\frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3}-x'''_{t^3}y'_t)-3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)}{x'^5_t},\ldots \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Так как x'_t, x''_{t^2}, x'''_{t^3}, ... можно считать известными функциями от t [они получаются из (1) дифференцированием], то остается лишь подставить в W вместо y'_x, y''_{x^2}, ... эти выражения их через t, y'_t, y''_{t^2}, ...

Если формула преобразования дана в неразрешенном относительно x виде:

$$\Phi(x, t)=0, \tag{3}$$

то задача по существу решается так же, лишь производные x'_t, x''_{t^2}, ... вычисляются по правилам дифференцирования неявных функций *).

Переходя к общему случаю, когда заменяются обе переменные, предположим, что формулы преобразования разрешены относительно старых переменных:

$$x=\varphi(t, u),\ y=\psi(t, u). \tag{4}$$

Если y связано функциональной зависимостью с x, то отсюда u будет связано зависимостью с t, а тогда в силу (4) x и y окажутся сложными функциями от t. По правилу дифференцирования сложных функций будем иметь

$$x'_t=\varphi'_t+\varphi'_u u'_t,\quad y'_t=\psi'_t+\psi'_u u'_t;$$
$$x''_{t^2}=\varphi''_{t^2}+2\varphi''_{tu}u'_t+\varphi''_{u^2}u'^2_t+\varphi'_u u''_{t^2},\quad y''_{t^2}=\psi''_{t^2}+\ldots+\psi'_u u''_{t^2};\ \ldots$$

Обращаем внимание читателя на то, что через x'_t, y'_t и т. п. мы обозначаем «полные» производные от x и y по t, т. е. с учетом и зависимости u от t; наоборот, φ'_t, ψ'_t, ... означают производные по t лишь постольку, поскольку t входит в функции φ, ψ, ... в качестве одного из двух аргументов.

Подставив эти выражения в формулы (2), найдем выражения производных от y по x через t, u и производные от u по t, и т. д.

Если формулы преобразования не разрешены относительно x и y:

$$\Phi(x, y, t, u)=0,\qquad \Psi(x, y, t, u)=0, \tag{5}$$

то производные x'_t, y'_t, x''_{t^2}, y''_{t^2}, ... вычисляются отсюда по правилам дифференцирования неявных функций. Например, дифференцируя (5) по t (причем не только x и y, но и u считается функцией от t), получим уравнения

$$\Phi'_x x'_t+\Phi'_y y'_t+\Phi'_t+\Phi'_u u'_t=0,\quad \Psi'_x x'_t+\Psi'_y y'_t+\Psi'_t+\Psi'_u u'_t=0,$$

из которых найдутся x'_t, y'_t, и т. д.

В том частном случае, когда формулы преобразования разрешены относительно новых переменных:

$$t=\alpha(x, y),\qquad u=\beta(x, y), \tag{6}$$

*) Впрочем, при этом может оказаться, что в окончательном выражении W еще останется x; его придется исключать при помощи (3).

можно, прежде всего, пользоваться изложенным только что общим методом. Например, дифференцируя формулы (6) по t (причем x, y, u считаем функциями от t), получим

$$1 = \alpha'_x x'_t + \alpha'_y y'_t, \quad u'_t = \beta'_x x'_t + \beta'_y y'_t,$$

откуда

$$x'_t = \frac{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x}, \quad y'_t = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x}$$

и, наконец,

$$y'_x = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}.$$

Проще, однако, в этом случае поступить так, как если бы проделывали обратный переход от переменных t, u к переменным x, y. Продифференцировав формулы (6) по x (считая y функцией от x), получим

$$t'_x = \alpha'_x + \alpha'_y y'_x, \quad u'_x = \beta'_x + \beta'_y y'_x,$$

так что

$$u'_t = \frac{u'_x}{t'_x} = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'_x}{\alpha'_x + \alpha'_y y'_x}, \tag{7}$$

откуда для y'_x получается то же выражение, что и выше.

И здесь мы различаем производные t'_x, u'_x, α'_x, β'_x: первые означают «полные» производные по x, с учетом и зависимости y от x, а вторые считаются с x лишь как с одним из двух аргументов функций α, β.

Заметим, что переход от переменных x, y к переменным t, u по формулам (6) может быть истолкован геометрически как некоторое точечное преобразование плоскости (или ее части): если x, y рассматривать как координаты некоторой точки M плоскости, а t, u — как координаты некоторой точки P, то преобразование переводит точку M в точку P. Возьмем затем какую-либо кривую $\mathscr{K}$ на плоскости, с уравнением $y = f(x)$; этой функциональной зависимости между x и y отвечает некоторая зависимость между t и u: $u = g(t)$, которая также определяет на плоскости некоторую кривую $\mathscr{L}$. Итак, в рассматриваемом преобразовании кривая $\mathscr{K}$ переходит в кривую же $\mathscr{L}$. Если в точке M первой кривой провести касательную с угловым коэффициентом y'_x, то в соответствующей точке P вторая кривая будет иметь касательную с угловым коэффициентом u'_t, который определяется по формуле (7). Таким образом, по координатам точки M на кривой $\mathscr{K}$ и угловому коэффициенту касательной в M однозначно определяются как координаты соответствующей точки P на преобразованной кривой $\mathscr{L}$, так и угловой коэффициент касательной в P. Поэтому, если через точку M провести две кривые, касающиеся в этой точке, то преобразованные кривые будут также касаться в соответствующей точке P. Рассматриваемое *точечное преобразование плоскости сохраняет касание* [ср. ниже пример 5)].

218. Примеры. 1) Пусть дано уравнение $x^2 y''_{x^2} + x y'_x + y = 0$; преобразовать его, полагая $x = e^t$.

По формулам (2) имеем

$$y'_x = e^{-t} \cdot y'_t, \quad y''_{x^2} = e^{-2t} \cdot (y''_{t^2} - y'_t),$$

и уравнение примет более простой вид:

$$y''_{t^2} + y = 0.$$

2) Преобразовать выражение

$$W = \frac{y''_{x^2} - y'_x (1 + y'_x)^2}{(1 + y'_x)^3},$$

полагая $x = t - y$.

Под общую схему это преобразование подойдет, если написать $x=t-u$, $y=u$. По формулам (2)

$$W=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t-y'(x'_t+y'_t)^2}{(x'_t+y'_t)^3}.$$

С другой стороны, формула преобразования дает $x'_t=1-y'_t$; подставляя, найдем окончательно $W=y''_{t^2}-y'_t$.

3) Перестановка ролей переменных. Предположим, что независимая переменная x и функция от нее y обмениваются ролями; под общую схему это преобразование подойдет, если положить $x=u$, $y=t$. Поставим себе задачей выразить производные от y по x через производные от x по y. Снова прибегаем к формулам (2), заменяя t через y. Если учесть, что $y'_y=1$ (и $y''_{y^2}=y'''_{y^3}=\ldots=0$), то сразу получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y},\quad y''_{x^2}=-\frac{x''_{y^2}}{x'^3_y},$$
$$y'''_{x^3}=\frac{3x''^2_{y^2}-x'_y x'''_{y^3}}{x'^5_y},\ \ldots$$

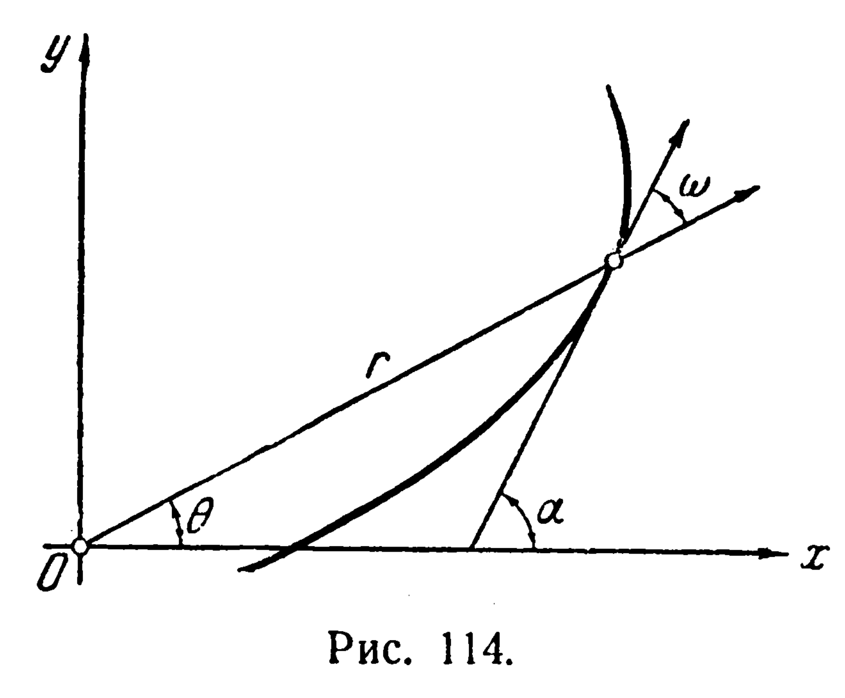


Рис. 114.

Например, выражение $W=y'_x y'''_{x^3}-3y''^2_{x^2}$, если применить к нему это преобразование, получит вид $W=-\frac{x'''_{y^3}}{x'^5_y}$.

4) Переход к полярным координатам. Если x, y рассматривать как прямоугольные координаты точки, то уравнение $y=f(x)$ выразит кривую. Часто бывает полезно перейти к полярным координатам r, θ, выражая кривую ее полярным уравнением $r=g(\theta)$. Тогда, естественно, представляется необходимость, исходя из выражений различных геометрических элементов кривой через x, y, y'_x, y''_{x^2}, ..., получить соответствующие выражения их через θ, r, r'_θ, r''_{θ^2}, ...

Формулы преобразования в этом случае, как известно, имеют вид $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Дифференцируя их по θ (причем учитываем, что r есть функция от θ), получим

$$x'_\theta=r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta,\quad y'_\theta=r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta;$$
$$x''_{\theta^2}=r''_{\theta^2}\cos\theta-2r'_\theta\sin\theta-r\cos\theta,$$
$$y''_{\theta^2}=r''_{\theta^2}\sin\theta+2r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta,\ \ldots$$

Отсюда, по формулам (2), найдем (подставляя θ вместо t):

$$y'_x=\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta},\quad y''_{x^2}=\frac{r^2+2r'^2_{\theta}-rr''_{\theta^2}}{(r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta)^3},\ \ldots$$

Таким образом, например, угловой коэффициент касательной будет

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_x=\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta};$$

тангенс угла ω, образованного касательной с продолженным радиусом-вектором (рис. 114),

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta}=\frac{xy'_x-y}{x+yy'_x},$$

теперь выразится простой формулой

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta},$$

в связи с чем при полярном задании кривой положение касательной предпочитают определять именно углом ω.

Рассмотрим еще выражение

$$R = \frac{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}},$$

представляющее, как увидим ниже [в n° 251], важный геометрический элемент кривой («радиус кривизны»). Если подставить сюда найденные выше выражения для y'_x и y''_{x^2}, то после упрощений получим

$$R = \frac{(r^2 + r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''_{\theta^2}}.$$

5) Преобразование Лежандра. Поставленную в предыдущем n° задачу замены переменных можно обобщить, допустив присутствие производных уже в формулах преобразования. Мы ограничимся одним примером этого рода:

$$t = y'_x, \quad u = x \cdot y'_x - y;$$

это преобразование называется преобразованием Лежандра.

Продифференцируем вторую формулу преобразования по x, рассматривая слева u как функцию от x через посредство t (зависимость t от x дается первой формулой):

$$u'_t \cdot y''_{x^2} = y'_x + x \cdot y''_{x^2} - y'_x = x \cdot y''_{x^2}.$$

Отсюда (в предположении, что $y''_{x^2} \neq 0$) и $u'_t = v$. Таким образом, если учесть и обе формулы преобразования, имеем

$$x = u'_t, \quad y = t \cdot u'_t - u,$$

чем выявляется взаимность преобразования: t, u, u'_t выражаются через x, y, y'_x совершенно так же, как эти последние величины выражаются через первые.

Дифференцируя подобным же образом по x формулу $u'_t = x$, получим

$$u''_{t^2} \cdot y''_{x^2} = 1, \quad \text{откуда } y''_{x^2} = \frac{1}{u''_{t^2}}.$$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$u'''_{t^3} \cdot y''^2_{x^2} + u''_{t^2} \cdot y'''_{x^3} = 0, \text{ так что } y'''_{x^3} = -\frac{u'''_{t^3}}{u''^3_{t^2}},$$

и т. д.

Заметим, что если преобразование Лежандра истолковать геометрически как преобразование плоскости, то оно отнюдь не будет точечным преобразованием. Для определения координат t, u точки P недостаточно знать координаты x, y точки M, но нужен и угловой коэффициент y'_x касательной в этой точке к рассматриваемой кривой $y = f(x)$. Тем не менее, кривая преобразуется здесь снова в кривую, и касание сохраняется*).

*) Подобные преобразования, сохраняющие касание, играют важную роль в различных областях геометрии и анализа. Они носят название касательных преобразований, или преобразований прикосновения. Точечные преобразования и преобразования Лежандра являются лишь частными примерами их.

219. Функции нескольких переменных. Замена независимых переменных. Перейдем теперь к задаче о преобразовании выражения

$$W=F\left(x, y, \ldots, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \ldots\right),$$

содержащего, кроме независимых переменных x, y, ..., и функции от них z, также частные производные z по ее аргументам, до определенного порядка.

По тем же мотивам, что и в простейшем случае, рассмотренном выше, и здесь может понадобиться перейти к новым переменным, которые со старыми связаны с помощью *формул преобразования*. Если обозначить новые независимые переменные через t, u, ..., а функцию от них — через v, то задача состоит в том, чтобы выразить W через t, u, ..., v и через производные от v по ее аргументам. Очевидно, достаточно научиться делать это по отношению к старым производным $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \ldots$ Для простоты письма мы будем предполагать, что независимых переменных всего две: старые x и y, а новые t и u.

Начнем и здесь с того случая, когда заменяются лишь независимые переменные, и формулы преобразования непосредственно связывают старые переменные x, y с новыми t, u.

Предположим, что формулы преобразования разрешены относительно старых переменных:

$$x=\varphi(t, u), \quad y=\psi(t, u). \tag{8}$$

Рассматривая z как сложную функцию от t и u через посредство x и y, по правилу дифференцирования сложных функций получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}. \tag{9}$$

Таким образом, для определения старых производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ мы имеем систему линейных уравнений; отсюда старые производные линейно выразятся через новые:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A\frac{\partial z}{\partial t}+B\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=C\frac{\partial z}{\partial t}+D\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{10}$$

При этом важно отметить, что коэффициенты A, B, C, D составляются из производных функций φ, ψ, фигурирующих в формулах (8), но вовсе не зависят от z.

Это замечание позволяет применить формулы (10) к производным $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ (вместо z). Таким путем, например, для $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ получится выражение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+B\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

$$=A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Применяя (10) к производным второго порядка (вместо z), можно получить выражения для производных третьего порядка, и т. д.

Если формулы преобразования разрешены относительно новых переменных:

$$t=\alpha(x, y), \qquad u=\beta(x, y),$$

то удобнее прибегнуть к обратному методу, т. е. рассматривать z как сложную функцию от x, y через посредство t, u, и дифференцировать ее по старым переменным. Это сразу приведет нас к формулам типа (10):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{11}$$

На этот раз коэффициенты

$$A=\frac{\partial t}{\partial x}, \quad B=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad C=\frac{\partial t}{\partial y}, \quad D=\frac{\partial u}{\partial y}$$

будут функциями от x, y, но также не зависят от z.

Применяя повторно формулы (11), можно и здесь получить выражения дальнейших производных. Например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial z}{\partial t}+B\frac{\partial z}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)+B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}\right)+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}+B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)\,{}^{*)}.$$

Наконец, в общем случае, при произвольных формулах преобразования

$$\Phi(x, y, t, u)=0, \quad \Psi(x, y, t, u)=0, \tag{12}$$

можно пользоваться как прямым, так и обратным методом, вычисляя частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \ \frac{\partial x}{\partial u}, \ \frac{\partial y}{\partial t}, \ \frac{\partial y}{\partial u}, \ \text{или} \ \frac{\partial t}{\partial x}, \ \frac{\partial t}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial y}$$

по правилам дифференцирования неявных функций.

220. Метод вычисления дифференциалов. Укажем теперь и другой метод для выражения старых производных через новые, особенно удобный, если в W входят не отдельные производные, но все производные данного порядка. Это — метод вычисления полных дифференциалов. Он также может быть представлен в двух формах, в зависимости от того, считаются ли t и u или x и y независимыми переменными.

Пусть сначала независимыми будут t и u, все дифференциалы берутся именно по этим переменным (прямой метод). Дифференцируя полным образом формулы преобразования (12), можно выразить dx и dy линейно через dt и du:

$$dx=\alpha\,dt+\beta\,du, \quad dy=\gamma\,dt+\delta\,du; \tag{13}$$

затем, дифференцируя эти формулы, представим d^2x и d^2y в виде однородных многочленов второй степени относительно dt и du:

$$d^2x=\varepsilon\,dt^2=\zeta\,dt\,du+\eta\,du^2, \quad d^2y=\theta\,dt^2+\iota\,dt\,du+\varkappa\,du^2, \tag{14}$$

и т. д. Коэффициенты α, β, ..., ι, $\varkappa$ суть известные функции от x, y, t и u.

---

*) Здесь уместно сделать замечание, аналогичное замечанию на стр. 484. Так как выражения старых производных через новые содержат x, y, то после подстановки этих выражений в W может оказаться необходимым еще исключать x, y с помощью формул преобразования. Читатель легко заметит и в дальнейшем случаи, сходные с этим.

Представим теперь dz двояко (пользуясь инвариантностью формы дифференциала):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial u} du. \tag{15}$$

Если вместо dx и dy подставить их выражения (13) и приравнять коэффициенты при dt и du в обеих частях равенства *), то получатся линейные уравнения

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{и} \quad \beta \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

из которых определятся производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Аналогично, можно представить двояко d^2z (помня о том, что независимыми переменными являются не x и y, а t и u):

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} dt\, du + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2. \tag{16}$$

Подставив вместо dx, dy, d^2x и d^2y их выражения (13) и (14), приравняем коэффициенты при dt^2, $dt\,du$ и du^2 в обеих частях равенства **). Это дает нам систему трех линейных уравнений для определения производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $\left(\text{так как } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ уже известны}\right)$; и т. д.

Более простым в осуществлении является **обратный метод**, при котором независимыми переменными считаются x и y, так что все дифференциалы берутся на этот раз по этим переменным.

Последовательным дифференцированием из формул преобразования (12) мы получаем здесь

$$dt = a\,dx + b\,dy, \quad du = c\,dx + \partial\,dy; \tag{17}$$
$$d^2t = e\,dx^2 + f\,dx\,dy + g\,dy^2, \quad d^2u = h\,dx^2 + i\,dx\,dy + j\,dy^2 \tag{18}$$

и т. д. И здесь коэффициенты a, b, ..., i, j суть известные функции от x, y, t и u.

Если в (15) вместо dt и du подставить их выражения (17) и приравнять коэффициенты при dx и dy в обеих частях равенства, то **непосредственно** получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b \frac{\partial z}{\partial t} + \partial \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Взамен (16) в настоящем случае будем иметь

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} dt\, du + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial z}{\partial t} d^2t + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u.$$

---

*) Напомним, что равенство $A\,dt + B\,du = A'\,dt + B'\,du$ может иметь место для **произвольных** dt и du лишь в том случае, если $A = A'$ и $B = B'$.

) Равенство $A\,dt^2 + B\,dt\,du + C\,du^2 = A'\,dt^2 + B'\,dt\,du + C'\,du^2$ может иметь место для **произвольных dt и du лишь при $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$.

Подстановка выражений (17), (18) и приравнивание коэффициентов при dx^2, $dx\,dy$ и dy^2 в обеих частях равенства непосредственно приведут к вычислению производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; и т. д.

221. Общий случай замены переменных. Обратимся, наконец, к общему случаю, когда заменяются и независимые переменные, и функция. Пусть формулы преобразования разрешены относительно старых переменных:

$$x=\varphi(t,\ u,\ v),\quad y=\psi(t,\ u,\ v),\qquad z=\chi(t,\ u,\ v). \tag{19}$$

Если z есть функция от x и y: $z=f(x,\ y)$, то подставляя сюда вместо x, y и z их выражения через t, u, v, получим зависимость между последними переменными, так что v будет функцией от t и u.

Считая независимыми переменными t и u (прямой метод), а z — функцией от них через посредство x и y, как и выше, получим равенства (9), а из них (10). Но здесь под $\frac{\partial x}{\partial t}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial u}$ разумеются «полные» частные производные от x, y, z по t или u, получаемые из (19) с учетом того обстоятельства, что v сама зависит от t и u:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \chi}{\partial u}+\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Коэффициенты A, B, C, D содержат не только t, u, v, но и производные $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$; последние входят рациональным образом. Последовательное применение формул (10) и здесь приведет к выражениям для вторых производных, и т. д.

Если формулы преобразования разрешены относительно новых переменных:

$$t=\alpha(x,\ y,\ z),\quad u=\beta(x,\ y,\ z),\quad v=\gamma(x,\ y,\ z), \tag{20}$$

то обычно прибегают к обратному методу, т. е. считают независимыми переменными x и y. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Вместо $\frac{\partial t}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial v}{\partial y}$ сюда нужно подставить их выражения, получаемые дифференцированием по x и по y формул (20), с учетом того, что z есть функция от x и y:

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Таким путем получаются линейные относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ уравнения, из которых эти производные легко выражаются через x, y, z, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial u}$.

Вычисление дальнейших производных проще всего выполнить так: дифференцируем полученное для $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\left(\text{или } \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ выражение снова по x (по y), рассматривая производные $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial u}$ как функции от x и y через посредство t и u, и т. д.

В случае формул преобразования общего вида

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{A}(x, y, z, t, u, v)=0, \quad \mathrm{B}(x, y, z, t, u, v)=0, \\ \Gamma(x, y, z, t, u, v)=0 \end{array}\right\} \tag{21}$$

можно пользоваться любым из этих методов с применением правил дифференцирования неявных функций.

Для решения рассматриваемой общей задачи замены переменных применим и метод вычисления полных дифференциалов. Мы ограничимся изложением той его формы, которая связана с предположением, что независимыми являются старые переменные x и y (обратный метод), так что по этим переменным и берутся все дифференциалы.

Последовательным дифференцированием, исходя из формул (21), можно найти выражения

$$\left.\begin{aligned} dt &= a_1dx + a_2dy + a_3dz, \\ du &= b_1dx + b_2dy + b_3dz, \\ dv &= c_1dx + c_2dy + c_3dz; \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} d^2t = \partial_1dx^2 + \partial_2dx\,dy + \partial_3dy^2 + \partial_4dx\,dz + \\ + \partial_5dy\,dz + \partial_6dz^2 + a_3d^2z, \\ d^2u = e_1dx^2 + \ldots + e_6dz^2 + b_3d^2z, \\ d^2v = f_1dx^2 + \ldots + f_6dz^2 + c_3d^2z; \ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если в равенство

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}\,dt + \frac{\partial v}{\partial u}\,du$$

подставить вместо dt, du и dv их выражения (22), то получим

$$c_1dx + c_2dy + c_3dz = \frac{\partial v}{\partial t}(a_1dx + a_2dy + a_3dz) + \frac{\partial v}{\partial u}(b_1dx + b_2dy + b_3dz),$$

откуда

$$dz = A\,dx + B\,dy, \tag{24}$$

где A, B рациональным образом содержат производные $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial u}$. Сопоставляя это с формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

видим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Возьмем теперь равенство (t и u не являются независимыми переменными)

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,dt^2 + 2\,\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\,dt\,du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,du^2 + \frac{\partial v}{\partial t}\,d^2t + \frac{\partial v}{\partial u}\,d^2u$$

и подставим сюда вместо dt, du, d^2t, d^2u, d^2v их выражения (22) и (23), а затем и dz, заменим его выражением (24). Из полученного равенства определится d^2z:

$$d^2z = C\,dx^2 + 2D\,dx\,dy + E\,dy^2,$$

где C, D, E рациональным образом содержат производные $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$. Сопоставляя с формулой

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2,$$

приходим к результату

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = C, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = D, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = E,$$

и т. д.

Задаче преобразования переменных и здесь можно придать геометрический смысл. Если переменные (x, y, z) и (t, u, v) рассматривать как координаты точек M и P пространства, то формулы преобразования, например, в форме (20), относят каждой точке M некоторую точку P, т. е. характеризуют точечное преобразование пространства (или его части). Зависимости между x, y и z отвечает зависимость между t, u и v, так что каждая поверхность $\mathcal{S}$ преобразуется при этом в некоторую поверхность $\mathcal{T}$.

Мы видели, что значениями $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ однозначно определяются значения t, u, v, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial u}$. Вспоминая уравнение касательной плоскости [180 (6)]:

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

отсюда легко заключить, что двум касающимся в точке M поверхностям $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ отвечают в рассматриваемом преобразовании две поверхности $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, также касающиеся в точке P. *Точечное преобразование пространства сохраняет касание* [ср. ниже пример 7)].

222. Примеры. 1) Переход к полярным координатам. Пусть z есть функция точки на плоскости $z = f(M)$. Обыкновенно положение точки определяется ее прямоугольными координатами (x, y), так что z является функцией от переменных x и y. Часто, однако, оказывается более удобным характеризовать положение точки полярными координатами r, θ, и тогда возникает необходимость преобразования к новым переменным. Проделаем этот переход различными методами.

Прямой метод: независимыми переменными считаются r, θ. Исходя из формул преобразования

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

по образцу формул (10) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}, \qquad (25)$$

так что выражения $\cos\theta$, $-\frac{\sin\theta}{r}$, $\sin\theta$, $\frac{\cos\theta}{r}$ играют здесь роль коэффициентов A, B, C, D. Затем,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) =$$
$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

и т. д.

Обратный метод: независимыми переменными считаются x, y. Для того чтобы воспользоваться формулами (11), нужно знать производные $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$. Их можно найти, разрешив предварительно уравнения, связывающие старые переменные с новыми, относительно последних. Но можно воспользоваться методами дифференцирования неявных функций, не разрешая уравнений. Если продифференцировать формулы преобразования по x и по y, считая r и θ функциями от x и y, то получим

$$1 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad 0 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

и

$$0 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad 1 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

и по формулам (11) — мы возвращаемся к выражению (25), и т. д.

Метод вычисления дифференциалов. Пусть, как и только что, независимыми переменными будут x, y.

Дифференцируем полным образом формулы преобразования

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta;$$

отсюда

$$dr = \cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy, \quad d\theta = \frac{-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy}{r},$$

так что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial\theta}d\theta = \left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)dx + \left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)dy,$$

что снова приводит к выражениям (25).

Вторичное дифференцирование формул для dr и $d\theta$ дает:

$$d^2r = -\sin\theta\, d\theta\, dx + \cos\theta\, d\theta\, dy = \\ = \frac{\sin^2\theta\, dx^2 - 2\sin\theta\cos\theta\, dx\, dy + \cos^2\theta\, dy^2}{r},$$

$$d^2\theta = \frac{-r(\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy)\, d\theta - (\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)\, dr}{r^2} = \\ = \frac{2\sin\theta\cos\theta\, dx^2 - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, dx\, dy - 2\sin\theta\cos\theta\, dy^2}{r^2}.$$

Тогда для d^2z будем иметь:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} dr\, d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial z}{\partial r} d^2r + \frac{\partial z}{\partial\theta} d^2\theta = \\ = \left(\cos^2\theta\, \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) dx^2 + 2(\ldots)\, dx\, dy + (\ldots)\, dy^2,$$

откуда для вторых производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ... получатся те же выражения, что и выше.

Рассмотрим, для примера, выражения

$$W_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

С помощью найденных формул они преобразуются так:

$$W_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

2) Переход к сферическим координатам. В пространстве роль, аналогичную полярным координатам на плоскости, играют так называемые сферические координаты ρ, φ, θ, с которыми прямоугольные координаты x, y, z связаны с помощью формул

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Пусть требуется преобразовать к переменным ρ, φ, θ выражения

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где u есть некоторая функция точки в пространстве.

Если преобразование произвести в два приема, полагая сначала $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (и оставляя z неизменным), а затем $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\sin\varphi$ (оставляя θ неизменным), то можно будет воспользоваться результатами примера 1).

Например, для второго выражения имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$W_2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Выражение в скобках, на основании того же примера 1), перепишется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho};$$

наконец,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Подставляя все это, окончательно найдем

$$W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Аналогично,

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

3) Показать, что выражения W_1 и W_2 сохраняют свою *форму* при любом преобразовании прямоугольных координат в прямоугольные же

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2z, \quad z' = a_3x + b_3y + c_3z,$$

где коэффициенты a, b, c удовлетворяют известным соотношениям

$$a_ia_j + b_ib_j + c_ic_j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{26}$$

Метод вычисления дифференциалов. Считая x, y, z независимыми переменными, имеем

$$\begin{aligned} dx' &= a_1dx + b_1dy + c_1dz, & d^2x' &= 0, \\ dy' &= a_2dx + b_2dy + c_2dz, & d^2y' &= 0, \\ dz' &= a_3dx + b_3dy + c_3dz, & d^2z' &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$du = \frac{\partial u}{\partial x'}(a_1dx + b_1dy + c_1dz) + \frac{\partial u}{\partial y'}(a_2dx + b_2dy + c_2dz) + \\ + \frac{\partial u}{\partial z'}(a_3dx + b_3dy + c_3dz),$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1\frac{\partial u}{\partial x'} + a_2\frac{\partial u}{\partial y'} + a_3\frac{\partial u}{\partial z'}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b_1\frac{\partial u}{\partial x'} + b_2\frac{\partial u}{\partial y'} + b_3\frac{\partial u}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = c_1\frac{\partial u}{\partial x'} + c_2\frac{\partial u}{\partial y'} + c_3\frac{\partial u}{\partial z'};$$

возводя в квадрат и складывая, в силу (26), получим

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2.$$

Затем,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}(a_1dx + b_1dy + c_1dz)^2 + \\ + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}(a_1dx + b_1dy + c_1dz)(a_2dx + b_2dy + c_2dz) + \ldots$$

Выражение W_2 есть сумма коэффициентов при dx^2, dy^2 и dz^2; с помощью (26) нетрудно установить, что

$$W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}.$$

4) Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+zx\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

к новым переменным t, u, v по формулам $x=uv$, $y=vt$, $z=tu$.

Прямой метод. Считая независимыми переменными t, u, v, будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}u,\quad \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}v+\frac{\partial w}{\partial z}t,\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}t.$$

Отсюда

$$x\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$y\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$z\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Далее,

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}-w\right)=x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{dt}+\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right)=$$

$$=\frac{1}{4}t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{4}u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{1}{2}uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-$$

$$-\frac{1}{2}vt\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial t}-\frac{1}{2}tu\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial u}+\frac{3}{4}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{4}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{4}v\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}=z\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial w}{\partial y}\right)=z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{1}{4}u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{1}{2}uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+$$

$$+\frac{1}{4}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{4}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{4}v\frac{\partial w}{\partial v}.$$

и т. д. Сложив все подобные выражения (и отбросив числовой множитель), получим преобразованное уравнение в виде

$$t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

До сих пор заменялись лишь независимые переменные; приведем примеры, где замене подвергается и функция.

5) Преобразовать уравнение $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, полагая

$$x=t,\quad y=\frac{t}{1+tu},\quad z=\frac{t}{1+tv}.$$

Прямой метод. Независимые переменные: t, u. Дифференцируем третью из формул преобразования по t и по u, рассматривая переменные z и v как функции от t, u (первую — через посредство x, y):

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{(1+tu)^2}=\frac{1-t^2\frac{\partial v}{\partial t}}{(1+tv)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{-t^2}{(1-tu)^2}=-\frac{t^2}{(1+tv)^2}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(1+tv)^2}\left(1-t^2\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+tu)^2}{(1+tv)^2}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Преобразованное уравнение после сокращения будет иметь вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0.$$

Решим ту же задачу иначе.

Обратный метод. Выразим из формул преобразования новые переменные через старые:

$$t=x,\quad u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad v=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$$

и будем считать независимыми переменными x, y. Дифференцируя третью формулу по x и по y (v зависит от них через посредство t, u), найдем:

$$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{x^2},\quad -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{y^2}$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial v}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial v}{\partial u}\ \text{и т. д.}$$

6) Выражение

$$W=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

преобразовать к переменным $t=x+y,\quad u=\frac{y}{x},\quad v=\frac{z}{x}$.

Метод вычисления дифференциалов. Независимые переменные: x, y. Дифференцируем формулы преобразования:

$$dt=dx+dy,\quad du=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy,\quad dv=-\frac{z}{x^2}dx+\frac{1}{x}dz.$$

Если v рассматривать, как функцию от x, y через посредство t, u, то дифференциал dv напишется так:

$$dv=\frac{\partial v}{\partial t}dt+\frac{\partial v}{\partial u}du=\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right).$$

Сопоставляя два выражения для dv, находим

$$dz=\frac{z}{x}dx+x\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx+dy\right).$$

Составим теперь вторые дифференциалы от новых переменных:

$$d^2t=0,\quad d^2u=\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dx\,dy,$$

$$d^2v=-\frac{2}{x^2}dx\,dz+\frac{2z}{x^3}dx^2+\frac{1}{x}d^2z.$$

С другой стороны,

$$d^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}dt\,du+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial v}{\partial t}d^2t+\frac{\partial v}{\partial u}d^2u=$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)^2+\frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dx\,dy\right).$$

Приравнивая оба выражения для d^2v и заменяя dz полученным выше его выражением, придем к равенству, из которого определится d^2z:

$$d^2z = 2\,\frac{dx}{x}\left[\frac{z}{x}\,dx + x\,\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy) + \frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}\,dx + dy\right)\right] - \frac{2z}{x^2}\,dx^2 +$$
$$+ x\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2 + 2\,\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}\,dx^2 - \frac{2}{x^2}\,dx\,dy\right)\right].$$

Отсюда можно определить производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ как коэффициенты при dx^2, $2dx\,dy$, dy^2. Но нужный нам результат можно получить проще, заметив, что d^2z переходит в W, если взять $dx=1$, $dy=-1$. Таким путем находим:

$$W = \frac{(x+y)^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{(1+u)^3}{t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}.$$

7) Преобразование Лежандра. Наподобие 5), **218** мы и здесь приведем преобразование Лежандра как пример более общего преобразования, когда уже формулы, связывающие старые и новые переменные, содержат производные. Положим

$$t = \frac{\partial z}{\partial x},\quad u = \frac{\partial z}{\partial y},\quad v = x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} - z.$$

Разумея под z некоторую определенную функцию от x и y: $z=f(x, y)$, будем предполагать ее такой, что

$$J = \frac{D(t, u)}{D(x, y)} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \neq 0. \tag{27}$$

Дифференцируя третью из формул преобразования по x и по y (причем v рассматриваем как функцию от x, y через посредство t, u), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

откуда

$$x = \frac{\partial v}{\partial t},\quad y = \frac{\partial v}{\partial u},\quad \text{так что и}\quad z = t\,\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial u} - v, \tag{28}$$

т. е. преобразование имеет взаимный характер.

Дифференцируя первые две из полученных формул (28) сначала по x, а затем по y, придем к уравнениям

$$1 = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

и

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad 1 = \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Так как [203 (4)]

$$I=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\right)^2=\frac{D(x,\,y)}{D(t,\,u)}=\frac{1}{J}\neq 0,$$

то из этих уравнений

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}}{I},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}}{I},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{I}.$$

Если x, y, z и t, u, v трактовать как координаты некоторых точек пространства, то преобразование Лежандра можно рассматривать как преобразование пространства (но не точечное). Поверхность, характеризуемая зависимостью между z и x, y, переходит при этом в поверхность, определяемую зависимостью между v и t, u. Так как t, u, v, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$ зависят только от x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, то преобразование Лежандра сохраняет касание*).

8) Легко обобщить преобразование Лежандра на случай пространства любого числа измерений. Пусть, скажем, z есть функция от x_1, x_2, ..., x_n. Положим

$$t_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\quad (i=1,\,2,\,\dots,\,n)\quad\text{и}\quad v=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial z}{dx_i}-z;$$

здесь v есть новая функция от новых переменных t_1, t_2, ..., t_n.

Будем предполагать и здесь определитель

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n\,\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\end{vmatrix}$$

отличным от нуля.

Продифференцируем формулу, определяющую v, по x_k (рассматривая при этом v как функцию от x_1, ..., x_n через посредство t_1, ..., t_n):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial t_i}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k}\quad\left(k=1,\,\dots,\,n\right).$$

Ввиду $J\neq 0$, отсюда следует

$$\frac{\partial v}{\partial t_i}=x_i\quad (i=1,\,\dots,\,n).$$

Таким образом, и

$$z=\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{\partial v}{\partial t_i}-v,$$

так что в общем случае преобразование также имеет взаимный характер.

*) Сюда также относится сноска на стр. 487.

9) Наконец, рассмотрим еще один пример преобразования, представляющий некоторое своеобразие. Пусть

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n; x_1, \ldots, x_n)$$

будет функция от $2n$ переменных, однородная 2-й степени относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Предполагая определитель

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

отличным от нуля, положим

$$t_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

и введем $t_1, \ldots, t_n$ в качестве новых независимых переменных вместо $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$. Тогда функция φ преобразуется в некоторую функцию

$$\psi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n).$$

Доказать, что

$$\text{(а)} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t_i} = x_i,$$

$$\text{(б)} \quad \frac{\partial\psi}{\partial u_i} = -\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Дифференцируя $\varphi = \psi$ по x_k, рассматривая ψ как функцию от $x_1, \ldots, x_n$ через посредство $t_1, \ldots, t_n$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial t_i}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

С другой стороны, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ будет однородной функцией первой степени относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда по формуле Эйлера [188]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_i}\,x_i \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Сопоставляя полученные два разложения для $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, ввиду $H \neq 0$, заключаем о справедливости соотношений (а).

Дифференцируя же по u_i получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=\frac{\partial\psi}{\partial u_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial t_k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial u_i}.$$

Но $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, очевидно, однородная функция второй степени относительно $x_1, \ldots, x_n$. Снова применяя формулу Эйлера, видим, что последняя сумма дает нам

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)x_k=2\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}.$$

Отсюда и следуют соотношения (6).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аналитическое представление кривых и поверхностей

223. Кривые на плоскости (в прямоугольных координатах). В настоящей главе мы остановимся на некоторых приложениях изученных понятий, фактов и методов дифференциального исчисления к геометрии. [С немногими из них мы сталкивались уже выше n° **91, 141, 143, 145, 148, 180**].

Мы считаем полезным предварительно напомнить читателю различные способы аналитического представления кривых и поверхностей; этому посвящен § 1. Оговорим наперед, что функции, о которых будет идти речь в этой главе, как правило, предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные же производные по своим аргументам; в случае надобности, мы будем требовать существования и непрерывности и дальнейших производных.

Начнем с плоских кривых, причем в основу положим некоторую прямоугольную систему координат Oxy.

Выше мы не раз рассматривали уравнение вида

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x = g(y) \tag{1}$$

и изучали соответствующую ему кривую [**47, 91, 146** и след.]. Такого рода задание кривой, когда одна из текущих координат ее точки представляется в виде (однозначной) явной функции от другой координаты, мы будем называть явным заданием (или представлением) кривой. Оно обладает простотой и наглядностью; как увидим, *всякое другое задание* — в некотором смысле — *может быть сведено к этому.*

В связи с теорией неявных функций нам приходилось также говорить о неявном задании кривой, т. е. о представлении кривой уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

неразрешенным ни относительно x, ни относительно y [**205** и след.]. Такое уравнение носит название неявного уравнения кривой.

Из теорем о существовании неявной функции [**205**, **206**] следует, что если в точке (x_0, y_0) кривой выполнено условие

$$F'_x(x_0, y_0) \neq 0 \text{ или } F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то, по крайней мере, в некоторой окрестности этой точки кривая может быть представлена явным уравнением (1) того или другого вида (причем фигурирующая в нем функция f или g непрерывна вместе со своей производной).

Таким образом, только точки (x_0, y_0) кривой, для которых выполняются сразу оба условия

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0, \tag{3}$$

могут иметь ту *особенность*, что в их окрестности кривая не представима явным уравнением (ни того, ни другого вида). Точки кривой, удовлетворяющие уравнениям (3), и называют *особыми*.

Ниже [**236**] мы займемся вопросом о поведении кривой (2) вблизи особой точки. Но, как правило, особые точки будут исключаться из рассмотрения, и мы будем изучать кривую лишь в окрестности ее *обыкновенной* (т. е. неособой) точки.

Наконец, в предыдущем изложении не раз упоминалось о том, что уравнения вида

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{4}$$

устанавливающие зависимость текущих координат точки от некоторого *параметра* t, также определяют кривую на плоскости [см., например, **106**]. Подобные уравнения называют *параметрическими*; они дают *параметрическое* представление кривой.

Рассмотрим точку (x_0, y_0), определяемую значением $t = t_0$ параметра, и предположим, что при $t = t_0$ будет $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда и вблизи этого значения t производная $x'_t = \varphi'(t)$ — по непрерывности — будет сохранять тот же знак; функция $x = \varphi(t)$ оказывается *монотонной* [**132**]. При этих условиях, в силу **83** и **94**, можно t рассматривать как однозначную функцию от x: $t = \theta(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную же производную. Подставив эту функцию вместо t в выражение для y, установим непосредственную зависимость y от x

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x),$$

где — снова — функция f непрерывна вместе со своею производной; таким образом, мы выразим *явным* уравнением, по крайней мере, участок кривой, примыкающий к взятой точке. Аналогичное заключение можно сделать, если даже $\varphi'(t_0) = 0$, но $\psi'(t_0) \neq 0$, с той единственной разницей, что получится явное уравнение другого вида: $x = g(y)$.

Лишь в том случае, когда одновременно

$$x'_t = \varphi'(t_0) = 0 \text{ и } y'_t = \psi'(t_0) = 0, \tag{5}$$

кривая в окрестности рассматриваемой точки может оказаться не представимой явным уравнением; такую точку будем называть особой.

В **237** мы остановимся вкратце на виде кривой (4) вблизи особой точки, но, как правило, и здесь мы будем изучать лишь обыкновенные точки.

Важно теперь оговориться, что все сказанное выше об обыкновенной точке (x_0, y_0), т. е. такой, для которой не выполняются условия (5), предполагает еще, что эта точка получается только при одном значении параметра $t=t_0$, (т. е., как говорят, является простой точкой). Если бы, наоборот, точка (x_0, y_0) была кратной и отвечала, например, двум различным значениям параметра $t=t_0$ и $t=t_1$, то в ней, вообще говоря, пересекались бы два участка кривой: один, определяемый значениями t, близкими к t_0, а другой — значениями t, близкими к t_1. В этом случае всю кривую в окрестности данной точки опять-таки нельзя было бы представить явным уравнением. Таким образом, кратные точки также по существу следует относить к особым *).

Подведем итоги сказанному. Мы не пытались дать геометрическую характеристику понятия кривой: для нас *кривая есть геометрическое место точек, удовлетворяющих аналитическому соотношению вида* (1), (2) *или* (4), — в предположении непрерывности встречающихся в них функций и их производных. Правда, геометрические образы, определяемые этими различными способами, в целом могут значительно разниться по своему облику, но в малом, в окрестности обыкновенной (а в случае параметрического задания и простой) точки, все они уподобляются тем простейшим образам, которые задаются уравнениями вида (1).

224. Примеры. Сделаем обзор наичаще встречающихся кривых (многие из них, впрочем, уже знакомы читателю из аналитической геометрии).

1) Цепная линия (рис. 41). Ее уравнение

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

По такой линии устанавливается в равновесии гибкая и нерастяжимая тяжелая нить (цепь, провод и т. п.), подвешенная за оба конца.

Форма кривой вблизи вершины A (см. рис. 41) напоминает параболу, но при удалении от вершины кривая круче устремляется в бесконечность. Отрезок $OA=a$ определяет точнее ее форму — чем a меньше, тем кривая круче. То расположение кривой, которое изображено на чертеже, вовсе необязательно, но оно позволяет придать уравнению кривой наиболее простой вид.

---

*) Есть, впрочем, один случай, когда точку, получающуюся дважды все же не считают кратной: это будет тогда, когда точка отвечает двум крайним значениям параметра и в ней кривая замыкается. В примере окружности

$$x=a\cdot\cos\theta,\ y=a\cdot\sin\theta \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

это будет точка, определяемая значениями $\theta=0$ и $\theta=2\pi$.

2) Эллипс, отнесенный к осям симметрии, имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Поскольку сумма квадратов величин $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{b}$ должна равняться единице, естественно принять их, соответственно, за косинус и синус некоторого угла t. Это приводит к обычному параметрическому представлению эллипса,

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t;$$

при изменении t от 0 до 2π эллипс описывается против часовой стрелки начиная от конца A $(a, 0)$ большой оси.

Можно было бы, разумеется, использовать и какие-либо другие выражения, сумма квадратов которых равна единице, и положить, например,

$$x=a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y=b\frac{2u}{1+u^2},$$

где u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Так как при $u\to\pm\infty$ имеем $x\to -a$, $y\to 0$, то можно считать условно, что точка $A'(-a, 0)$ получается при $u=\pm\infty$.

Аналогично для случая гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

вспоминая известное соотношение, связывающее гиперболические косинус и синус, можно положить

$$x=a\operatorname{ch} t, \quad y=b\operatorname{sh} t \quad (-\infty<t<+\infty).$$

Другое представление той же кривой:

$$x=a\frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad y=b\frac{2u}{1-u^2}$$
$$(-\infty<u<+\infty; \quad u\neq\pm 1)$$

Читателю рекомендуется во всех случаях дать себе отчет в передвижении точки по кривой при изменении параметра.

3) Полукубическая парабола (рис. 115)

$$y^2-cx^3=0 \quad (c>0)$$

Здесь особой точкой служит начало (0, 0). Если решить уравнение относительно y, то получим явные уравнения двух симметричных ветвей кривой

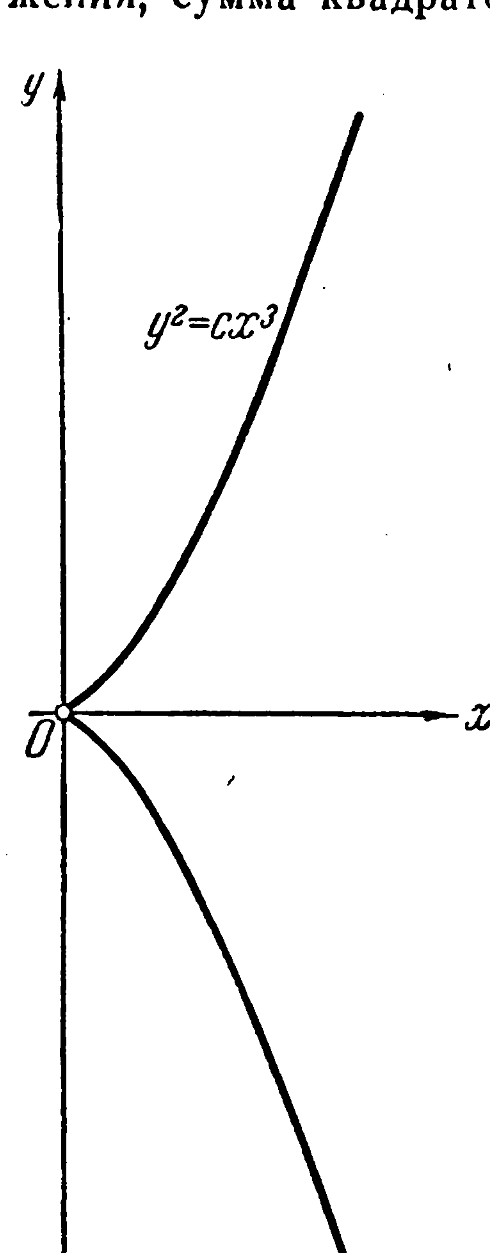


Рис. 115.

$$y=\pm\sqrt{cx^3}=\pm\sqrt{c}\,x^{\frac{3}{2}}.$$

Так как $y'=0$ при $x=0$ для обеих ветвей, то в начале они обе касаются оси x, и налицо острие [точка возврата, см. 236].

4) Астроида (рис. 116)

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad (a>0).$$

Это уравнение, собственно говоря, не подходит под тот тип, которым мы условились ограничиться: в каждой из точек $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm a)$ одна из частных производных левой части уравнения обращается в ∞. Впрочем не-

трудно, освободив уравнение кривой от иррациональностей, представить его в виде

$$((x^2+y^2)-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0.$$

При этом представлении указанные точки как раз и будут особыми.

Из уравнения кривой видно, что кривая лежит в круге $x^2+y^2=a^2$ и симметрична относительно обеих осей; ограничимся поэтому первым квадрантом. Разрешая уравнение относительно y:

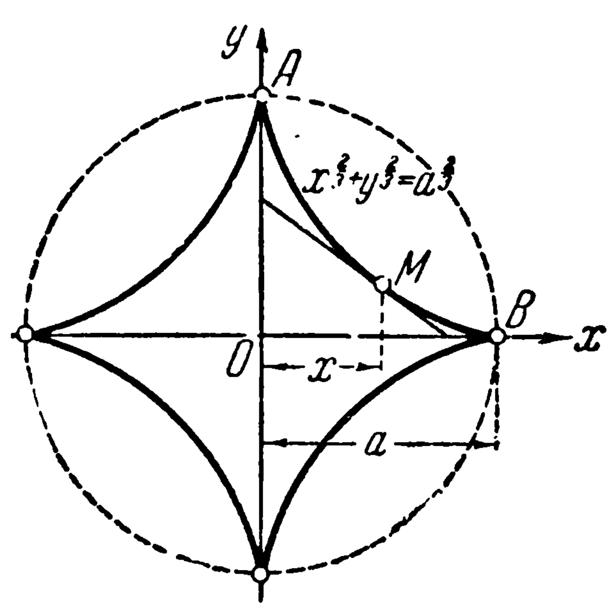


Рис. 116.

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

и дифференцируя:

$$y'=-\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

видим, что при $x=0$ касательная вертикальна, а при $x=a$ — горизонтальна. Отсюда следует, что во всех четырех особых точках будут острия (точки возврата).

Желая получить параметрическое представление астроиды, используем то, что — в силу уравнения кривой — сумма квадратов выражений $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ должна равняться единице. Положив их равными $\cos t$ и $\sin t$, придем к таким параметрическим уравнениям:

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Так как производные

$$x'_t=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad y'_t=3a\sin^2 t\cos t$$

обе обращаются в 0 при $t=0$ (2π), $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, то этим значениям параметра отвечают особые точки — те же, что и выше.

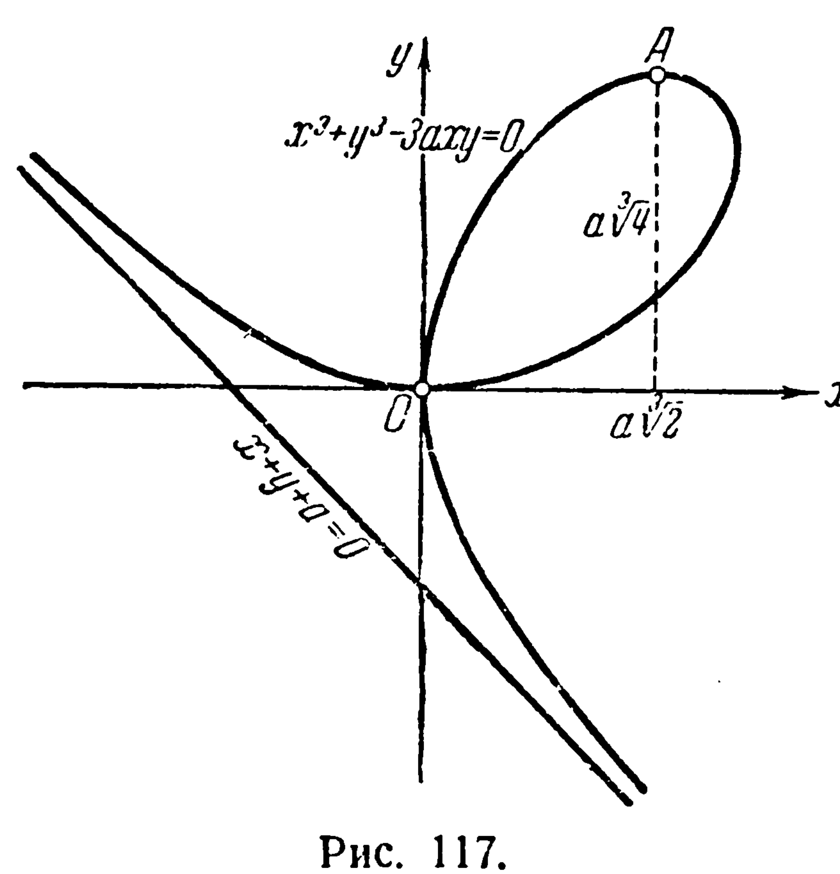


Рис. 117.

5) Декартов лист (рис. 117)

$$x^3+y^3-3a\,xy=0\ ^{*})\quad (a>0).$$

Особой точкой служит начало координат (0,0): в нем кривая сама себя пересекает. Кривая имеет асимптоту $x+y+a=0$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

Чтобы убедиться в этом, разделим уравнение почленно на x^3:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3=3a\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}-1.$$

Отсюда, прежде всего, можно заключить, что, скажем, при $|x|>3a$, $\left|\frac{y}{x}\right|$

*) См. пример 2), **210**. Точка $A(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$, отвечающая максимуму y как функции от x, отмечена на чертеже.

остается ограниченным, а тогда уже ясно, что при $x \to \pm\infty$ отношение $\frac{y}{x} \to -1$. С другой стороны, уравнение дает нам

$$y+x=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}=\frac{3a\cdot\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

так что при $x \to \pm\infty$ будет $y+x \to -a$. Этим наше утверждение и оправдано [148].

Вводя в качестве параметра отношение $t=\frac{y}{x}$ и подставляя в уравнение кривой $y=tx$, легко получить параметрическое представление:

$$x=\frac{3at}{t^3+1},\quad y=\frac{3at^2}{t^3+1}\quad(-\infty<t<+\infty,\ t\neq-1).$$

При $t\to\pm\infty$ обе координаты стремятся к 0; можно считать, что начальная точка (0, 0) получается как при $t=0$, так и при $t=\pm\infty$. При изменении t от $-\infty$ до -1, точка (x, y) исходя из начала, вдоль правой ветви удаляется в бесконечность. При изменении t от -1 до 0 наша точка из бесконечности вдоль левой ветви возвращается к началу. Наконец, при возрастании t от 0 до $+\infty$ точка описывает (против часовой стрелки) петлю.

225. Кривые механического происхождения. Продолжая перечень примеров, рассмотрим еще некоторые кривые механического происхождения, полученные путем качения одних кривых по другим.

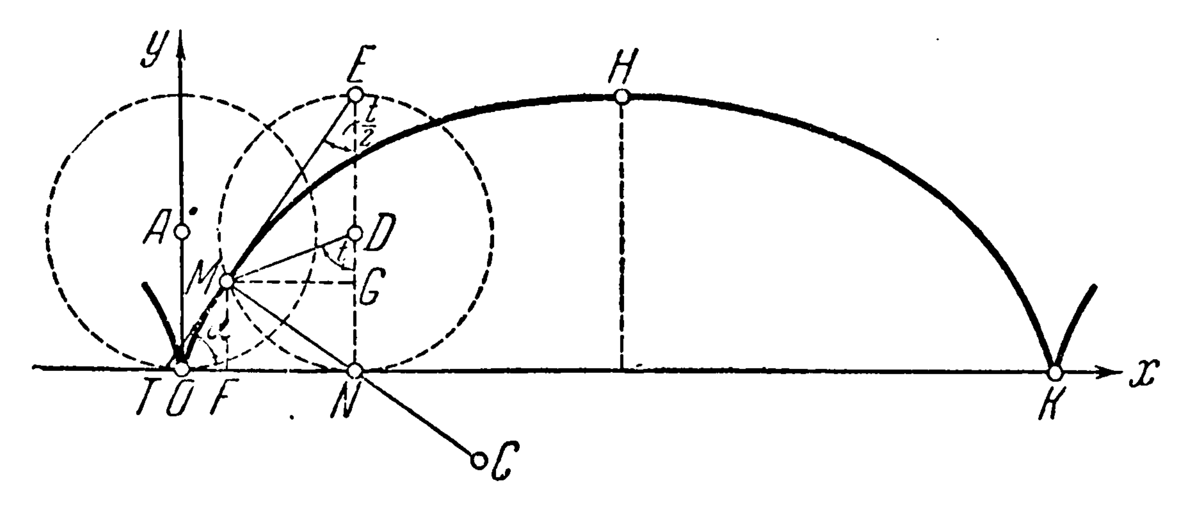


Рис. 118.

6) Циклоида. Вообразим, что по прямой Ox (рис. 118) слева направо катится без скольжения круг радиуса a с центром в A. Кривая, описываемая при этом любой точкой окружности, и называется циклоидой. Проследим, например, путь точки O за время одного оборота круга.

Рассмотрим катящийся круг в новом положении. Точкой касания служит уже другая точка N; таким образом, по прямой точка касания переместилась на расстояние ON. В то же время точка O переместилась в положение M, пройдя по окружности круга путь NM. Так как качение происходит без скольжения, то эти пути равны:

$$\smile{NM}=ON.$$

Если выбрать теперь в качестве параметра, определяющего положение точки, угол $t=\angle NDM$ на который успел повернуться радиус, имевший в начале качения вертикальное положение AO, то координаты x и y точки M выразятся следующим образом:

$$x=OF=ON-FN=\smile{NM}-MG=at-a\sin t,$$
$$y=FM=NG=ND-GD=a-a\cos t.$$

Итак параметрические уравнения циклоиды имеют вид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ получится кривая, состоящая из бесчисленного множества таких ветвей, какая изображена на рис. 118.

Так как производные

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t$$

одновременно обращаются в 0 при $t = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то этим значениям отвечают особые точки кривой. Но [106, (10)]

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

так что, например, при $t \to \pm 0$ (или при $x \to \pm 0$) производная y'_x будет стремиться к $\pm \infty$; ясно, что в начальной точке (равно как и в других особых точках) касательная вертикальна: здесь налицо *острие* [*точка возврата*, **237**].

7) *Эпи- и гипоциклоида.* Если один круг без скольжения катится *извне* по другому кругу, то кривая, описываемая произвольной точкой окружности подвижного круга, называется *эпициклоидой*. В случае же качения *изнутри* мы имеем дело с *гипоциклоидой*. Остановимся на выводе уравнений первой из этих кривых.

Возьмем начало координат в центре O неподвижного круга, а ось x проведем через то положение A интересующей нас точки, в котором она является точкой касания обоих кругов (рис. 119). Когда подвижный круг перейдет в новое положение, указанное на чертеже, точка A перейдет в M. Геометрическое место точек M нам и надлежит определить.

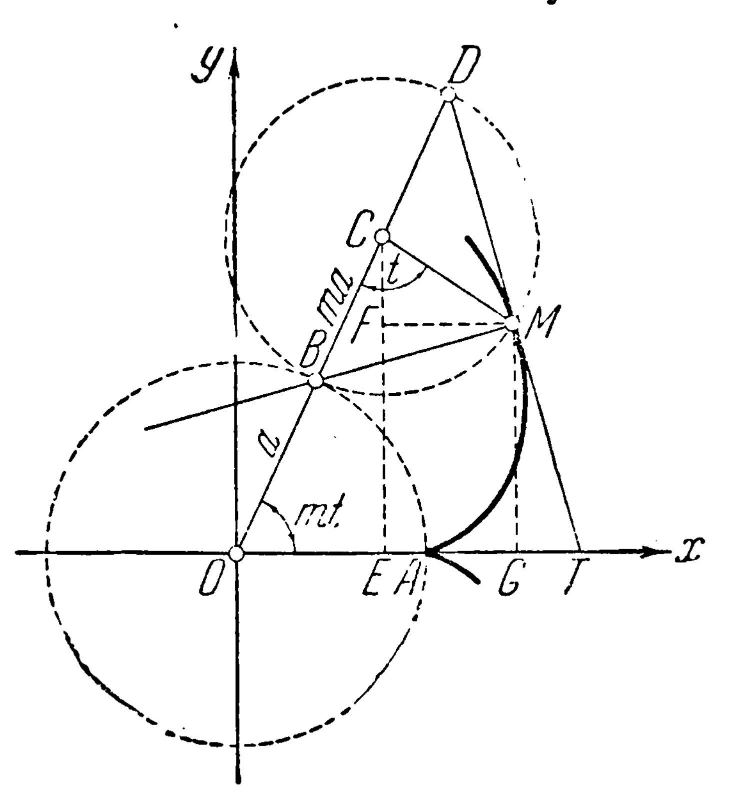


Рис. 119.

Обозначим через a радиус неподвижного круга, а через ma — радиус катящегося круга. Выберем за параметр здесь угол $t = \sphericalangle MCB$ между радиусом CM, соединяющим центр катящегося круга с интересующей нас точкой на его окружности, и радиусом CB, проведенным в точку касания. В начале движения пусть этот угол равен 0.

Прежде всего, посмотрим, в чем здесь проявляется *отсутствие скольжения*. Дуга $\breve{AB}$, пройденная точкой касания по неподвижной окружности, должна равняться дуге $\breve{MB}$, пройденной точкой касания по катящейся окружности:

$$a \cdot \sphericalangle AOB = ma \cdot \sphericalangle MCB = mat, \quad \text{откуда } \sphericalangle AOB = mt.$$

Выразим теперь координаты x и y точки M через t. Имеем

$$x = OG = OE + FM = (a + ma)\cos mt + ma \sin \sphericalangle FCM;$$

но

$$\sphericalangle FCM = \sphericalangle BCM - \sphericalangle OCE \quad \text{и} \quad \sphericalangle OCE = \frac{\pi}{2} - mt,$$

так что

$$\sphericalangle FCM = (1 + m)t - \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \sin \sphericalangle FCM = -\cos(1 + m)t.$$

Окончательно

$$x = a\,[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)\,t].$$

Подобным же образом найдем

$$y = a\,[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)\,t].$$

Эти уравнения дают параметрическое представление эпициклоиды. Когда катящийся круг снова придет в соприкосновение с неподвижным кругом в той же своей точке, что и в начале движения (т. е. при $t = 2\pi$), точка M закончит одну ветвь кривой. При дальнейшем качении она будет описывать следующую ветвь, подобную первой, и т. д.

Производные

$$x'_t = -m(m+1)\,a\,[\sin mt - \sin(1+m)\,t],$$
$$y'_t = m(m+1)\,a\,[\cos mt - \cos(1+m)\,t]$$

обращаются одновременно в 0 при $t = 2k\pi$ (где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), т. е. всякий раз, когда рассматриваемая на подвижном круге точка становится точкой касания. Соответствующие точки кривой будут особыми (точки возврата).

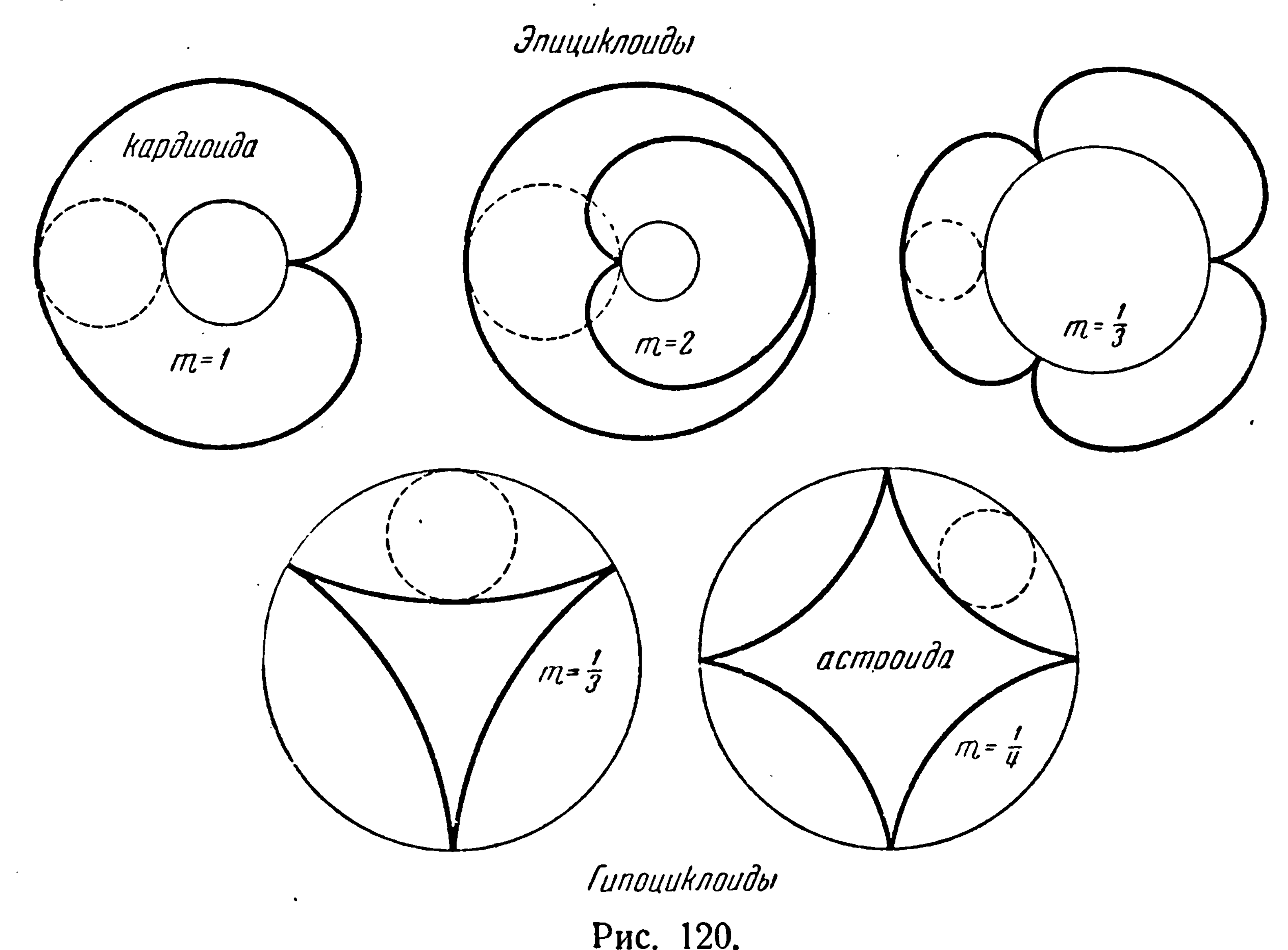


Рис. 120.

В случае гипоциклоиды подобным же образом получаются такие параметрические уравнения:

$$x = a\,[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)\,t],$$
$$y = a\,[-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)\,t].$$

Здесь m также означает отношение радиуса катящегося круга к радиусу неподвижного. Легко заметить, что эти уравнения получаются из уравнений эпициклоиды заменой m на $-m$.

На рис. 120 изображены эпициклоиды, соответствующие $m=1,\ 2,\ \frac{1}{3}$, и гипоциклоиды, соответствующие $m=\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. В последней читатель узнает астроиду*).

8) Эвольвента круга. Представим себе, что на круг, описанный из центра O радиусом a, навернута по часовой стрелке нить; пусть конец нити приходится в точке A. Станем нить развертывать (против часовой стрелки), сматывая с круга и все время натягивая ее за конец. Кривая, описываемая при этом концом нити, называется эвольвентой круга [ср. ниже 254, 246].

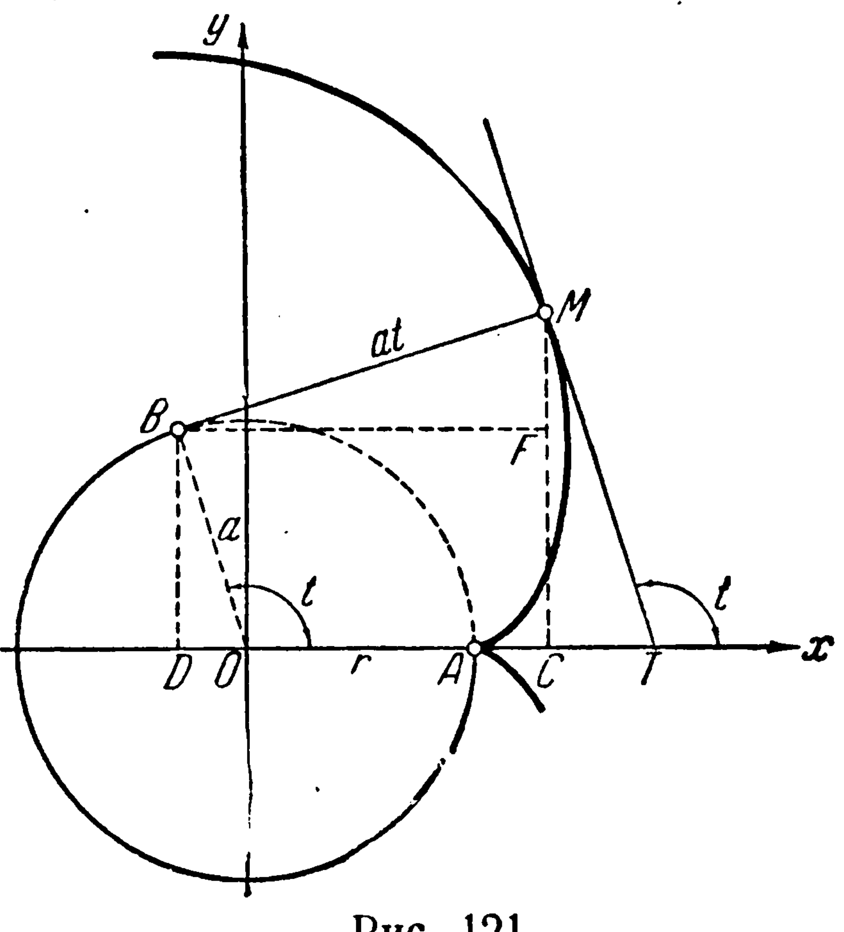


Рис. 121.

Возьмем начало координат в центре O (рис. 121) и проведем ось x через точку A. Когда будет смотана часть AB нити, она займет положение BM, располагаясь по касательной к кругу, а точка A перейдет в M. Итак, $\smile{AB}=BM$. В качестве параметра введем угол $t=\sphericalangle AOB$ между радиусами OA и OB. Координаты x, y точки M выразятся следующим образом:

$$x=DC-DO=BF-DO=BM\sin\sphericalangle BMC-OB\cos\sphericalangle DOB;$$

но $BM=\smile{AB}=at$, а углы $\sphericalangle BMC$ и $\sphericalangle DOB$ равны $\pi-t$, так что

$$x=at\sin(\pi-t)-a\cos(\pi-t)=a(t\sin t+\cos t).$$

Далее,

$$y=CM=CF+FM=DB+FM=OB\sin\sphericalangle DOB+BM\cos\sphericalangle BMC=$$
$$=a(\sin t-t\cos t).$$

Таким образом, наша кривая представляется следующими параметрическими уравнениями:

$$x=a(t\sin t+\cos t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

Единственная особая точка отвечает значению $t=0$, при котором обращаются в 0 обе производные

$$x'_t=at\cos t,\quad y'_t=at\sin t.$$

Предлагаем читателю убедиться в том, что та же кривая получится, если катить прямую (без скольжения) по кругу и рассмотреть траекторию какой-либо точки прямой.

226. Кривые на плоскости (в полярных координатах). Примеры. Во многих случаях оказывается проще представлять кривые их полярными уравнениями, устанавливающими зависимость между

*) Если в уравнениях гипоциклоиды положить $m=\frac{1}{4}$ и заменить t на $-4t$, то и получатся уравнения, приведенные в 4).

текущими полярными координатами r, θ точек кривой. Полярный угол θ мы отсчитываем от полярной оси, считая его положительным против часовой стрелки. Полярный радиус-вектор r мы будем брать как положительным, так и отрицательным; в первом случае его откладывают в направлении, определяемом углом θ, а во втором — в противоположном направлении.

Как в случае прямоугольных координат, и здесь зависимость между r и θ может быть задана в явной, неявной или параметрической форме. Мы ограничимся, преимущественно, простейшим случаем, когда кривая представляется *явным* уравнением вида $r = f(\theta)$.

Если перейти к прямоугольным координатам, взяв, как обычно, полюс за начало, а полярную ось — за ось x, то уравнения

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

дадут *параметрическое* представление нашей кривой, причем роль параметра здесь будет играть полярный угол θ. [Полученные

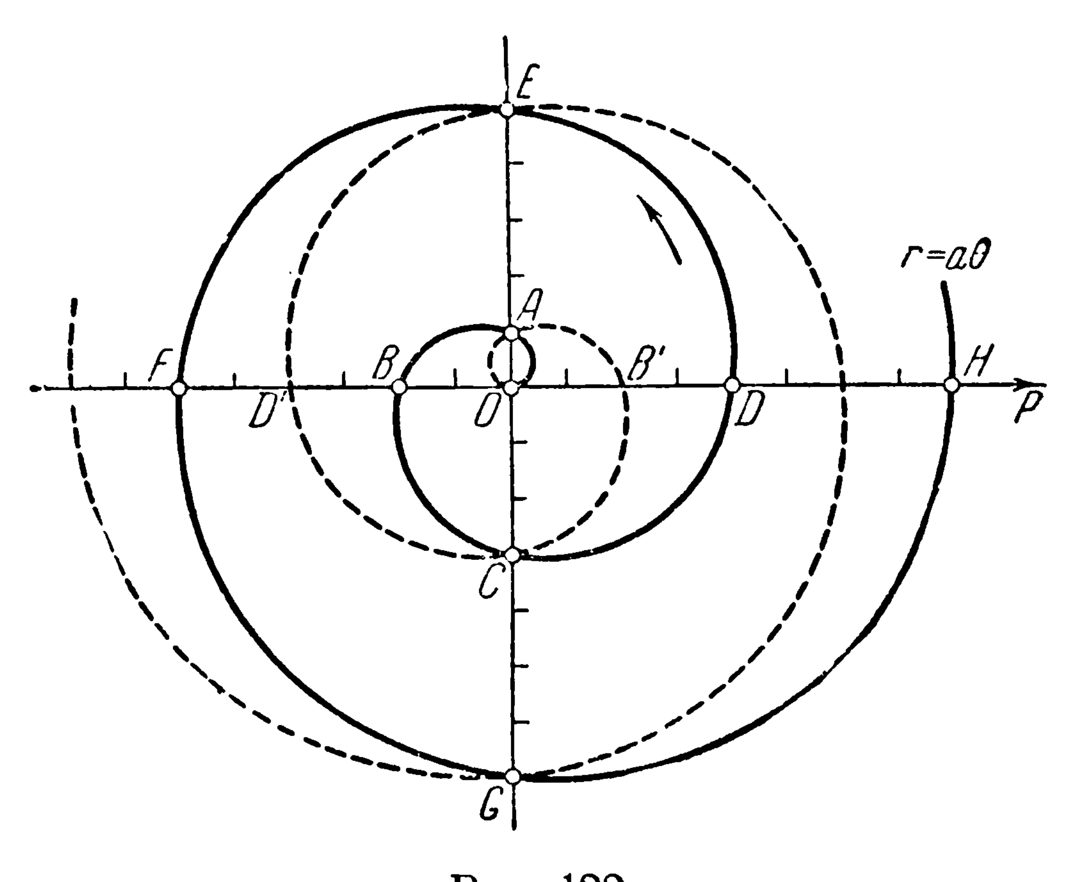


Рис. 122.

здесь функции от θ, вместе с f, непрерывны и имеют непрерывные производные.]

Формулы

$$x'_\theta = r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta,$$
$$y'_\theta = r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta$$

показывают, что *особая* точка (в смысле n° **223**) может встретиться лишь в том случае, если $r = r'_\theta = 0$.

Обратимся к *примерам*.

1) *Архимедова спираль*: $r = a\theta$ (рис. 122).

Кривую можно рассматривать как траекторию точки, равномерно движущейся по лучу, исходящему из полюса, в то время как этот луч равномерно вращается вокруг полюса.

Для построения ряда точек $A, B, C, D, \ldots$ кривой отложим по вертикали $OA = a \cdot \frac{\pi}{2}$, а затем возьмем $OB = 2OA$, $OC = 3OA$, $OD = 4OA$ и т. д., ибо им отвечают углы $2\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, $4\frac{\pi}{2}$ и т. д. Изменяя угол θ от 0 до ∞, получим бесконечное множество витков кривой $OABCD$, $DEFGH$, ...; расстояния соседних витков, считая по лучу, равны $2\pi a$.

Можно углу θ придавать и отрицательные значения, от 0 до $-\infty$. Тогда получится вторая часть кривой $OAB'CD' \ldots$, намеченная пунктиром; она симметрична с первой.

Заметим, что уравнение $r = a\theta + b$ также выражает архимедову спираль: если повернуть полярную ось на угол $\alpha = -\frac{b}{a}$, то это уравнение приведется к виду $r = a\theta$.

2) Гиперболическая спираль: $r = \frac{a}{\theta}$ (рис. 123).

При возрастании угла θ до бесконечности радиус-вектор стремится к нулю а точка кривой стремится к совпадению с полюсом (никогда его не достигая);

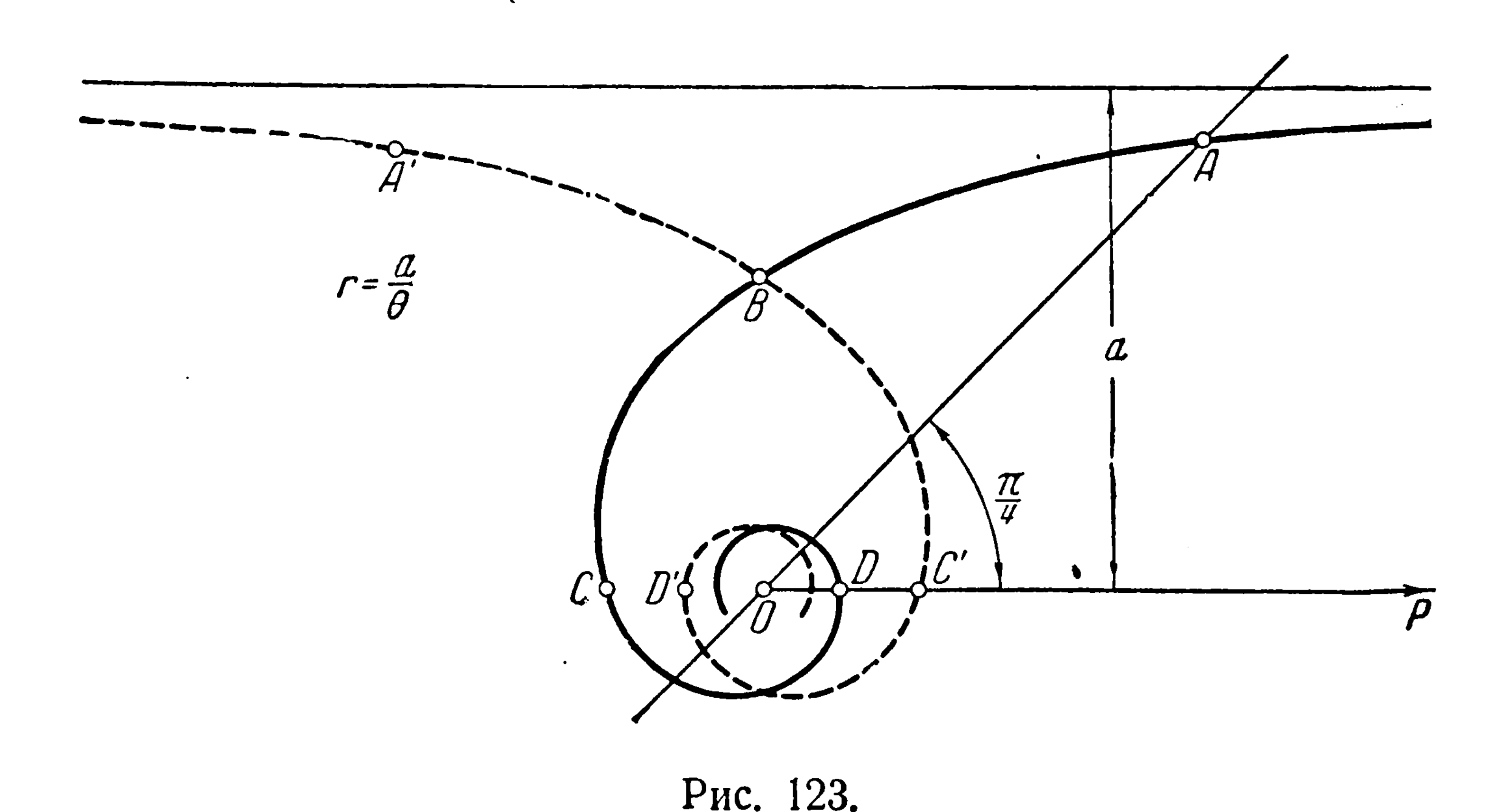


Рис. 123.

в этих условиях полюс называется асимптотической точкой кривой. Кривая бесчисленное множество раз заворачивается вокруг полюса.

Если на луче $\theta = \frac{\pi}{4}$ отложить отрезок $OA = \frac{4a}{\pi}$ и взять $AB = \frac{1}{2}OA$, $OC = \frac{1}{2}OB$, $OD = \frac{1}{2}OC$, ..., то точки $A, B, C, D, \ldots$, очевидно, лежат на кривой.

Угол θ может принимать и отрицательные значения. При изменении θ от 0 до $-\infty$, как и в случае архимедовой спирали, получается вторая часть кривой $A'BC'D' \ldots$, симметричная с первой; она и здесь намечена пунктиром.

Для уточнения формы кривой в бесконечности рассмотрим вертикальное расстояние точки кривой до полярной оси $y = r\sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta}$. При $r \to \pm\infty$ или — что то же — при $\theta \to \pm 0$ имеем $\lim y = a$. Таким образом, прямая, проведенная параллельно полярной оси на расстоянии a от нее, служит для кривой асимптотой.

3) Логарифмическая спираль: $r = ae^{m\theta}$ (рис. 124).

Если угол θ возрастает (или убывает) в арифметической прогрессии, то r возрастает (убывает) в геометрической прогрессии. Отложим на полярной оси отрезок $OA = a$, а на вертикали к ней — отрезок $OB = ae^{m\frac{\pi}{2}}$; обе точки A, B принадлежат нашей кривой. Если построить теперь прямоугольную ломаную $ABCDE\ldots$, то из подобия треугольников нетрудно заключить, что

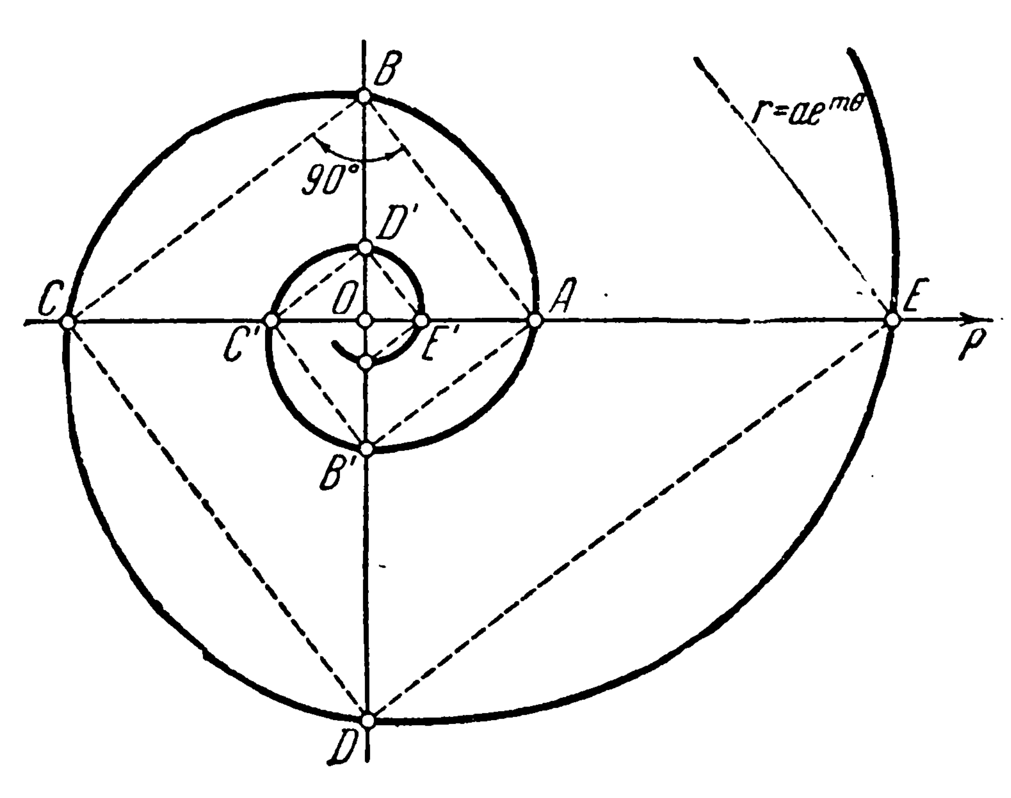


Рис. 124.

отрезки OA, OB, OC, OD, OE, ... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{m\frac{\pi}{2}}$; так как соответствующие углы суть $0, \frac{\pi}{2}, 2\cdot\frac{\pi}{2}, 3\cdot\frac{\pi}{2}$ и т. д., то, очевидно, все точки C, D, E, ... также лежат на рассматриваемой спирали.

Когда угол θ растет от 0 до $+\infty$, точка делает бесчисленное множество оборотов вокруг полюса, быстро удаляясь от него в бесконечность; расстояния между витками уже не равны. Угол θ может принимать и отрицательные значения; когда θ стремится к $-\infty$, то радиус-вектор r стремится к 0. Кривая бесконечное множество раз заворачивается вокруг полюса, безгранично к нему приближаясь (но никогда не достигая, см. часть $AB'C'D'E'\ldots$ на рис. 124); полюс является асимптотической точкой кривой.

Отметим, наконец, что, поворачивая полярную ось вокруг полюса, можно добиться уничтожения множителя a и привести уравнение логарифмической спирали к простейшему виду: $r = e^{m\theta}$.

4) Улитки: $r = a\cos\theta + b$ (рис. 125).

Происхождение этих кривых можно себе представить так. Возьмем окружность диаметра a. Если выбрать полюс O лежащим на самой окружности, а полярную ось провести через центр C, то для любой точки M окружности, очевидно, будет $r = a\cos\theta$. Это и есть полярное уравнение окружности. Если изменять здесь угол θ от 0 до 2π, то переменная точка дважды опишет окружность (против часовой стрелки).

Если удлинить теперь все радиусы-векторы OM' окружности на постоянный отрезок $M'M = b$ ($b > 0$), то из построенных таким путем точек M составится новая кривая, которая и носит общее название улитки. Ее полярное уравнение, очевидно, будет $r = a\cos\theta + b$.

Проще всего обстоит дело, если $b > a$, ибо тогда радиус-вектор всегда положителен и кривая окружает полюс со всех сторон (рис. 125 a). При $b < a$ кривая проходит через полюс и, сама себя пересекая, образует внутреннюю

петлю, как на рис. 125 *б*. Для определения углов θ, при которых переменная точка проходит через полюс, полагаем $r=0$ в уравнении кривой. Мы получаем уравнение $\cos\theta = -\frac{b}{a}$, которое имеет решение именно потому, что $b<a$.

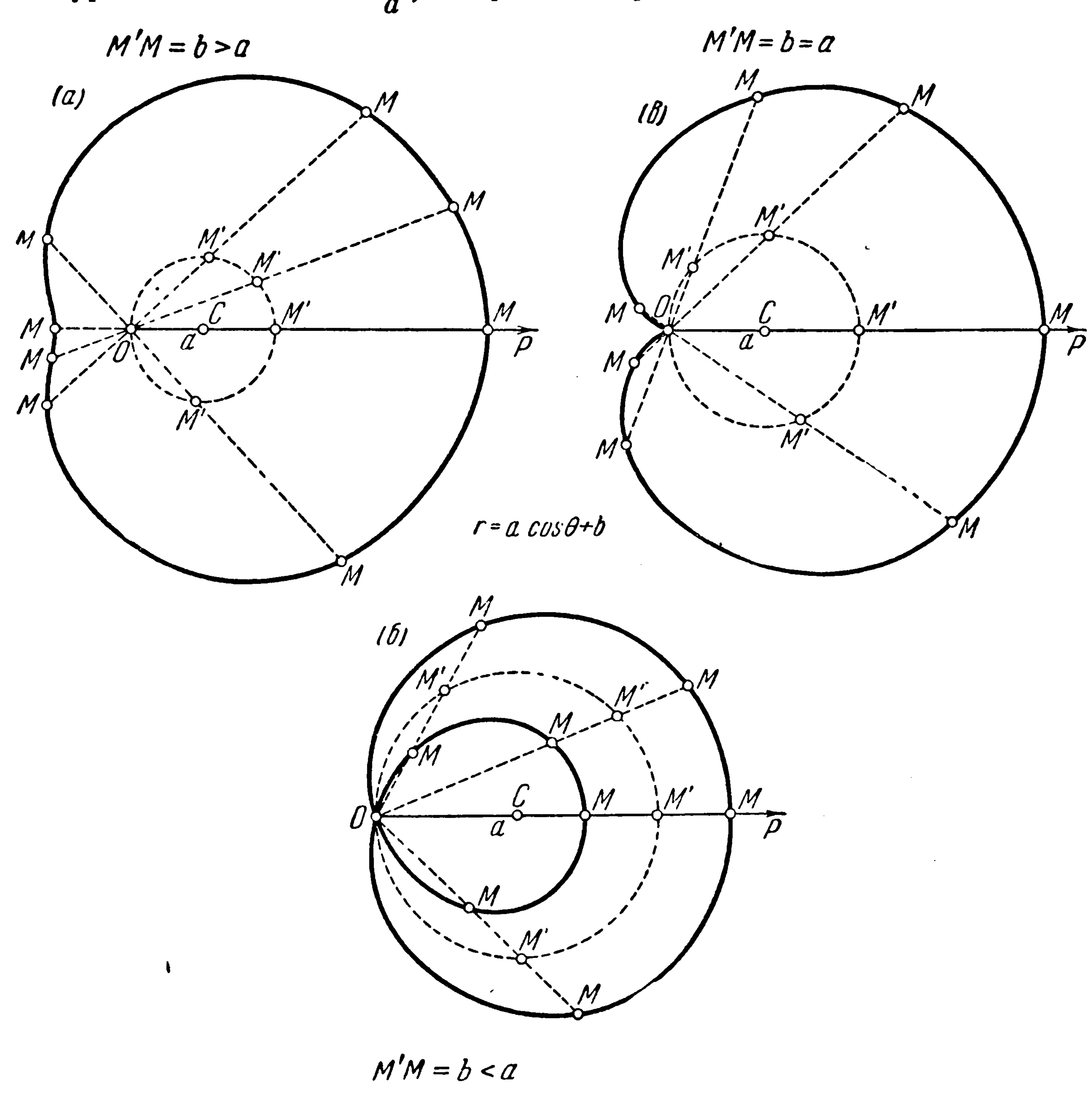


Рис. 125.

Особенно интересен промежуточный тип кривой, отвечающий случаю, когда $b=a$. Здесь полюс лежит на кривой ($\theta=\pi$), но петли нет; кривая изображена на рис. 125 *в*. Сразу бросается в глаза тождество этой кривой с кардиоидой, рассмотренной выше, как частный случай эпициклоиды (рис. 120). Представляем читателю убедиться в этом.

5) Лемниската Бернулли: $r^2=2a^2\cos 2\theta$ (рис. 126).

Эту кривую можно определить как геометрическое место точек M, для которых произведение их расстояний $\rho=FM$ и $\rho'=F'M$ до двух данных точек F и F', отстоящих одна от другой на расстояние $2a$, есть постоянная величина a^2 *).

*) При указанном соотношении между расстоянием FF' и постоянной величиной произведения $\rho\rho'$, очевидно, середина O отрезка FF' принадлежит кривой ($\rho=\rho'=a$). Иначе обстоит дело, если $\rho\rho=b^2$, где $b\neq a$, тогда получаются так называемые овалы Кассини.

При обозначениях рис. 126 из треугольников OMF и OMF' имеем

$$\rho^2 = r^2 + a^2 + 2ar\sin\theta,\quad \rho'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta,$$

так что, по определению,

$$\rho^2\rho'^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = a^4,$$

откуда после элементарных преобразований получим

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Это и есть полярное уравнение лемнискаты.

Так как левая, а с ней и правая часть этого уравнения не может принимать отрицательных значений, то угол θ может изменяться лишь в таких

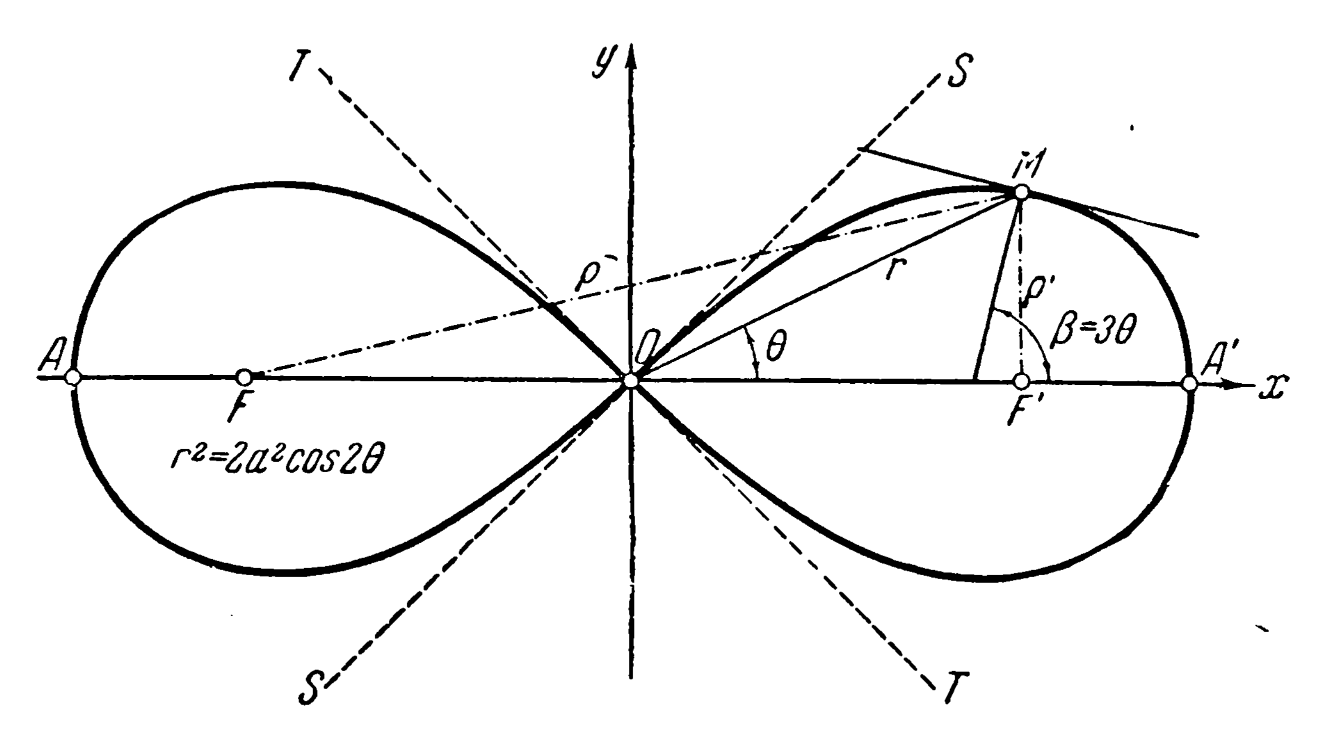


Рис. 126.

промежутках, для которых $\cos 2\theta \geqslant 0$. Это будут промежутки

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right),\ \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Вся кривая расположится в двух вертикальных углах между прямыми SS и TT, проведенными под углами $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ к полярной оси (см. рисунок). Она сама себя пересекает в полюсе, которому отвечают $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Если обычным образом перейти к прямоугольным координатам, то легко получить такое (неявное) уравнение лемнискаты:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

227. Поверхности и кривые в пространстве. Мы не предполагаем здесь углубляться в приложения дифференциального исчисления к геометрии в пространстве, оставляя эти вопросы для специального курса дифференциальной геометрии. Поэтому в отношении пространственных образов мы ограничимся лишь тем, что необходимо для дальнейших частей самого курса анализа.

Как и выше (напомним это еще раз), все рассматриваемые функции будем предполагать *непрерывными* и *имеющими непрерывные производные* по своим аргументам.

Будем исходить из прямоугольной системы координатных осей $Oxyz$. Нам приходилось уже говорить о том, что поверхность в пространстве может быть выражена уравнением между текущими координатами вида

$$z=f(x, y) \tag{6}$$

[см., например, **160**]. Такое уравнение, равно как и аналогичные ему $x=g(y, z)$ и $y=h(z, x)$, мы будем называть явным уравнением поверхности.

К этому простейшему случаю, в известном смысле, сводятся и другие способы задания поверхности.

Часто случается, что поверхность выражается уравнением вида

$$F(x, y, z)=0, \tag{7}$$

не разрешенным относительно той или иной координаты (неявное задание). Если в точке (x_0, y_0, z_0), ему удовлетворяющей, хоть одна из частных производных $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ отлична от 0, то в окрестности этой точки поверхность представима явным уравнением того или иного типа. Действительно, если, например $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то по теореме III n° **208**, по крайней мере в окрестности рассматриваемой точки, уравнение определяет z, как однозначную функцию от x и y: $z=f(x, y)$ (и притом — непрерывную вместе со своими производными по обоим аргументам).

Таким образом, исключение может представиться лишь в особой точке поверхности, удовлетворяющей сразу трем условиям:

$$F'_x=0, \quad F'_y=0, \quad F'_z=0.$$

Уравнение

$$F(x, y)=0, \tag{8}$$

не содержащее вовсе одной из координат, также может быть истолковано как уравнение поверхности. Именно, на плоскости xy оно выражает кривую; если на ней, как на направляющей, построить цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси z, то все точки этой поверхности, и только они, будут удовлетворять рассматриваемому уравнению (поскольку z в него не входит и ничем не стеснено).

Аналогично истолковываются уравнения вида $G(y, z)=0$ или $H(z, x)=0$.

Обратимся теперь к кривым в пространстве. Простейшим способом задания кривой в пространстве является тот, когда две текущие координаты, например, y и z, задаются в виде функций от третьей, x:

$$y=f(x), \quad z=g(x). \tag{9}$$

Подобный способ есть естественный аналог явного задания кривой на плоскости. И здесь уравнения указанного типа можно было бы называть явными уравнениями кривой.

Как и в случае плоской кривой, *к явному заданию в основном, сводятся и другие аналитические представления пространственной кривой.*

Каждое из уравнений (9) может быть истолковано либо как уравнение проекции нашей кривой на координатную плоскость, соответственно, xy или xz, либо как уравнение проектирующего цилиндра [см. (8)] с образующими, параллельными, соответственно, оси z или оси y.

Более общий способ задания пространственной кривой состоит в том, чтобы рассматривать ее как пересечение двух поверхностей вообще. Если эти поверхности выражаются каждая одним из нижеследующих уравнений

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0, \tag{10}$$

то совокупность обоих уравнений дает аналитическое представление кривой пересечения. Уравнения (10) называют неявными уравнениями кривой.

Составим матрицу из частных производных от функций F и G

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Пусть какой-нибудь из определителей этой матрицы, например,

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

отличен от 0 в рассматриваемой точке. Тогда на основании теоремы IV n° **208** в окрестности этой точки уравнения (10) могут быть заменены уравнениями типа (9) (причем фигурирующие в этих уравнениях функции снова оказываются непрерывными вместе со своими производными).

Таким образом, возможность сведения к простейшему способу задания перестает быть обеспеченной лишь в окрестности такой точки кривой (ее называют особой), где все три определителя матрицы (11) одновременно обращаются в нуль.

228. Параметрическое представление. Перейдем, наконец, к параметрическому заданию поверхностей и кривых в пространстве, причем на этот раз начнем с кривых. Подобному тому как мы это делали на плоскости, координаты переменной точки пространственной кривой можно задать в функции от некоторой вспомогательной переменной — параметра — t:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{12}$$

с тем чтобы при изменении параметра t точка, координаты которой даются этими уравнениями, описывала рассматриваемую кривую (в случае явного задания (9) роль параметра играло само x).

Если для взятой точки кривой хоть одна из производных x'_t, y'_t, z'_t отлична от 0, то — как и в случае плоской кривой — легко в окрестности этой точки перейти от параметрического к *явному* заданию. Лишь в окрестности *особой* точки, где все эти производные — нули, нельзя гарантировать такую возможность.

Как и в случае плоской кривой, к числу *особых* следует отнести и так называемые *кратные* точки, т. е. точки, получаемые при двух или большем числе значений параметра *).

Обратимся к *параметрическому* представлению *поверхностей*.

На этот раз определение положения точки на поверхности потребует *двух* параметров (в случае явного задания (6) роль этих параметров играли две из координат: x и y). Пусть имеем уравнения

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v), \tag{13}$$

где (u, v) изменяется в замкнутой области Δ. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} \tag{14}$$

и предположим, что для $u=u_0$ и $v=v_0$ отличен от 0 хоть один из определителей этой матрицы; например, пусть

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, переписав первые два из уравнений (13) в виде

$$\varphi(u, v)-x=0, \quad \psi(u, v)-y=0,$$

на основании теоремы IV n° **208** можем утверждать, что этой системой двух уравнений с четырьмя переменными u, v, x, y (если ограничиться значениями их, близкими к интересующим нас) переменные u, v определяются, как однозначные функции от x, y:

$$u=g(x, y), \quad v=h(x, y),$$

непрерывные со своими производными. Наконец, подставляя эти выражения u и v в третье из уравнений (13), придем к обычному представлению поверхности явным уравнением

$$z=\chi(g(x, y), \ h(x, y))=f(x, y),$$

где и функция f непрерывна и имеет непрерывные производные.

Лишь в том случае, если все три определителя матрицы (14) одновременно обращаются в 0 (соответствующая точка поверхности будет *особой*), такое представление может оказаться неосуществимым.

---

*) См. сноску на стр. 505.

Читателю ясно, что в связи с параметрическим представлением поверхности так же может быть установлено понятие о простой и кратной точках поверхности: первая получается лишь при одной системе значений (u, v) параметров, а вторая, по меньшей мере, — при двух *).

Возвращаясь к параметрическим уравнениям (13) поверхности, фиксируем в них значение одного из параметров, например, положим $u = u_0$. Тогда получатся очевидно, уравнения некоторой кривой

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi(u_0, v),$$

всеми точками лежащей на поверхности. Изменяя значение u_0, получим целое семейство таких «кривых (u)». Аналогично, фиксируя значение $v = v_0$, получим также кривую на нашей поверхности

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad z = \chi(u, v_0);$$

из таких «кривых (v)» также составляется целое семейство.

Так как значения u и v можно рассматривать как координаты точек на поверхности, то эти линии называют координатными линиями поверхности. Если точка поверхности простая, т. е. получается лишь при одной системе значений (u, v) параметров, то через нее проходит по одной координатной линии из каждого семейства.

Обозревая различные способы аналитического представления поверхностей [см. (6), (7) и (13)] и пространственных кривых [(9), (10) и (12)], мы могли бы повторить сказанное в конце n° **223**. В окрестности обыкновенной (и простой) точки дело сводится к наглядному случаю явного задания.

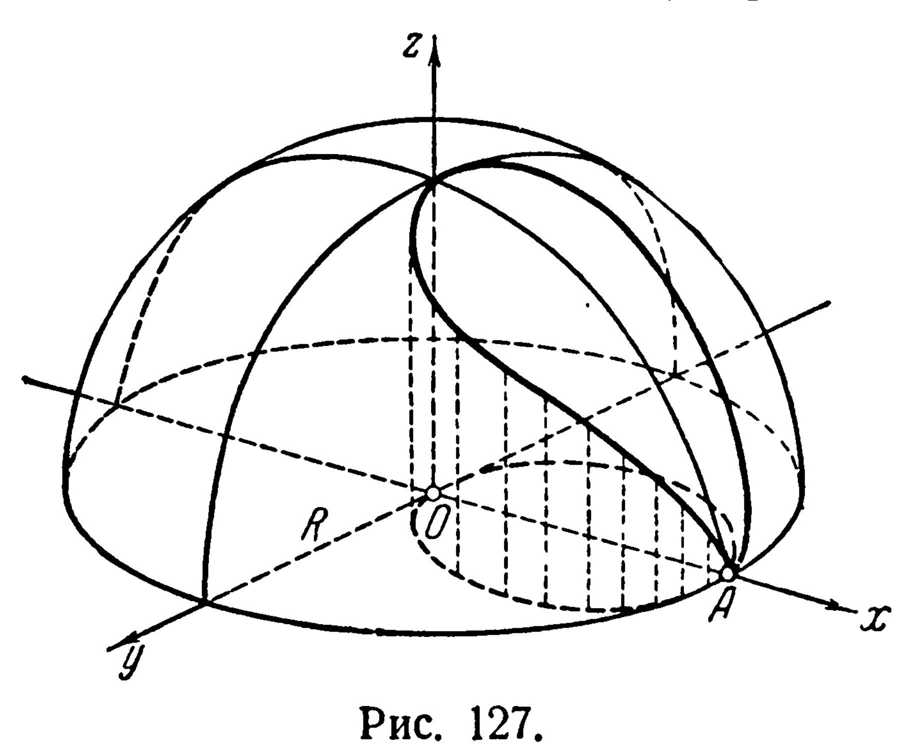


Рис. 127.

229. Примеры. 1) Кривая Вивиани. Так называется кривая пересечения поверхностей сферы и прямого цилиндра, для которого направляющей служит окружность, построенная на радиусе сферы, как на диаметре (рис. 127). Пусть радиус сферы есть R; если расположить оси, как указано на рисунке, то уравнения сферы и цилиндра, соответственно, будут

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
$$x^2 + y^2 = Rx.$$

Совокупность их и определяет нашу кривую.

---

*) Отметим, что в случае замкнутой поверхности (т. е. поверхности, не имеющей контура, например, сферической), ее точки заведомо не могут быть поставлены в взаимно однозначное соответствие точкам плоской области Δ на плоскости uv. В этом случае наличие кратных точек неизбежно при любом параметрическом задании.

Кривая имеет вид изогнутой восьмерки; в точке $(R, 0, 0)$ она сама себя пересекает, так что эта точка — наверное особая. Это подтверждается и вычислением. Матрица

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-R & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

имеет определители

$$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz, \quad \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x-R \end{vmatrix} = 4xz - 2Rz, \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-R & 2y \end{vmatrix} = 2Ry,$$

которые все вместе обращаются в 0 именно в этой точке.

Кривую Вивиани можно представить и параметрически, например, так:

$$x = R\sin^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\cos t.$$

Действительно, нетрудно проверить, что эти выражения тождественно удовлетворяют неявным уравнениям кривой и что при изменении параметра t, скажем, от 0 до 2π, полностью описывается вся кривая. Точка $(R, 0, 0)$ получается дважды — при $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{3\pi}{2}$, т. е. является кратной, как и следовало ожидать.

2) Есть случаи, когда параметрическое представление естественно вытекает из самого происхождения кривой. Рассмотрим, в виде примера, винтовую линию. Происхождение ее можно себе представить следующим образом. Пусть некоторая точка M, находившаяся первоначально в A (рис. 128), вращается равномерно вокруг оси z (скажем, по часовой стрелке) и одновременно участвует в равномерном же поступательном движении параллельно этой оси (допустим, в положительном направлении). Траектория точки M и называется винтовой линией. За параметр, определяющий положение точки M, можно принять угол t, составляемый с осью x проекцией OP отрезка OM. Координаты x и y точки M будут те же, что и у точки P, так что $x = a\cos t$ и $y = a\sin t$, где a есть радиус описываемой точки P окружности. Что же касается вертикального перемещения z, то оно растет пропорционально углу поворота t (ибо поступательное и вращательное движения оба происходят равномерно), т. е. $z = ct$. Окончательно параметрические уравнения винтовой линии будут

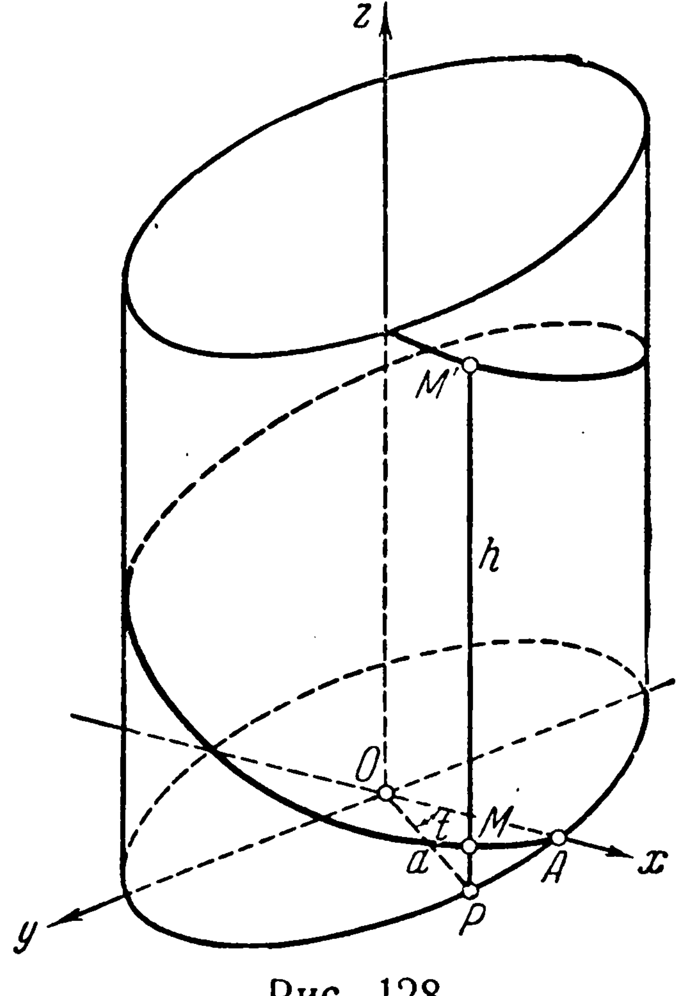


Рис. 128.

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct. \tag{15}$$

Полученная винтовая линия называется левой; при правой системе координатных осей те же уравнения выражали бы правую винтовую линию.

Легко исключить из уравнений (15) параметр t и перейти к явному заданию; например, найдя t из последнего уравнения и подставив его выражение в первые два, получим

$$x = a\cos\frac{z}{c}, \quad y = a\sin\frac{z}{c}.$$

3) Рассмотрим сферическую поверхность радиуса R с центром в начале (рис. 129). Ее неявное уравнение будет, как известно,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Желая получить ее обычное параметрическое представление, проведем «экваториальное» сечение AKA', а через «полюсы» P, P' и рассматриваемую точку M — «меридиан» $PMKP'$. Положение точки M на сфере может быть определено углами $\varphi = \angle POM$ и $\theta = \angle AOK$. Имеем $z = NM = R\cos\varphi$. Затем $ON = R\sin\varphi$, а через ON координаты x и y (те же для M, что и для N) выразятся так: $x = ON\cos\theta$, $y = ON\sin\theta$. Собирая все эти результаты, окончательно параметрические уравнения поверхности сферы получим в виде:

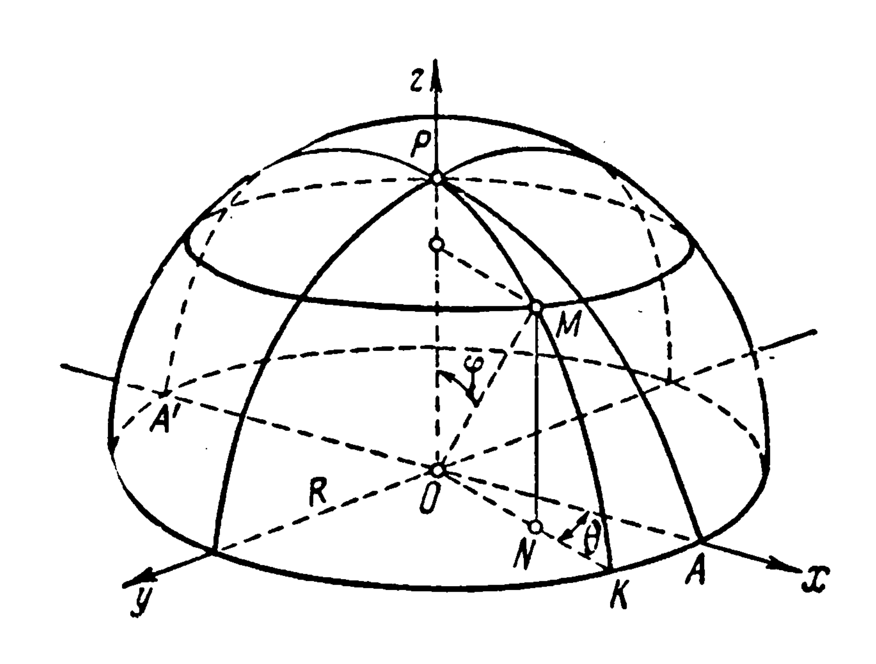


Рис. 129.

$$x = R\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = R\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = R\cos\varphi,$$

причем угол φ достаточно изменять от 0 до π, а угол θ — от 0 до 2π.

Однако, соответствие между точками сферической поверхности и точками прямоугольника $[0, \pi; 0, 2\pi]$ на плоскости $\varphi\theta$ не будет взаимно однозначным *): значения $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ приводят к одним и тем же точкам поверхности и, кроме того, при $\varphi = 0$ $(\varphi = \pi)$ *каково бы ни было значение* θ, получается одна лишь точка — полюс $P(P')$.

Если φ заменить углом $\lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi$, изменяющимся от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а θ менять между $-\pi$ и π, то мы придем к обычным *географическим координатам*: широте и долготе.

Для матрицы частных производных

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

все определители

$$R^2\sin^2\varphi\cos\theta, \quad R^2\sin^2\varphi\sin\theta, \quad R^2\sin\varphi\cos\varphi$$

обращаются вместе в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Однако очевидно, что оба «полюса» представляют особенность только применительно к *этому* аналитическому представлению сферы.

Легко видеть, что одно семейство координатных линий на сфере составится из *меридианов* $(\theta = \text{const})$, а другое — из *параллельных кругов* $(\varphi = \text{const})$.

4) Можно обобщить предыдущий пример следующим образом. Пусть в плоскости xz задана кривая (образующая) своими параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u), \tag{16}$$

причем $\varphi(u) \geqslant 0$. Станем вращать ее, как твердое тело, вокруг оси z (рис. 130). Если через v обозначить угол поворота, то уравнения получаемой *поверхности вращения* напишутся в виде

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u) \quad (0 \leqslant v \leqslant 2\pi).$$

Если в плоскости xz взять полуокружность

$$x = R\sin u, \quad z = R\cos u$$

*) Ср. сноску на стр. 520.

и ее вращать вокруг оси z, то параметрическое представление образуемой таким путем сферической поверхности мы получим (с точностью до обозначений) в прежнем виде.

Предоставляем читателю убедиться в том, что особыми точками для поверхности вращения могут быть лишь точки на оси вращения, либо же точки, полученные при вращении из особых точек образующей.

Координатными линиями и здесь служат различные положения образующей (меридианы) и параллельные круги.

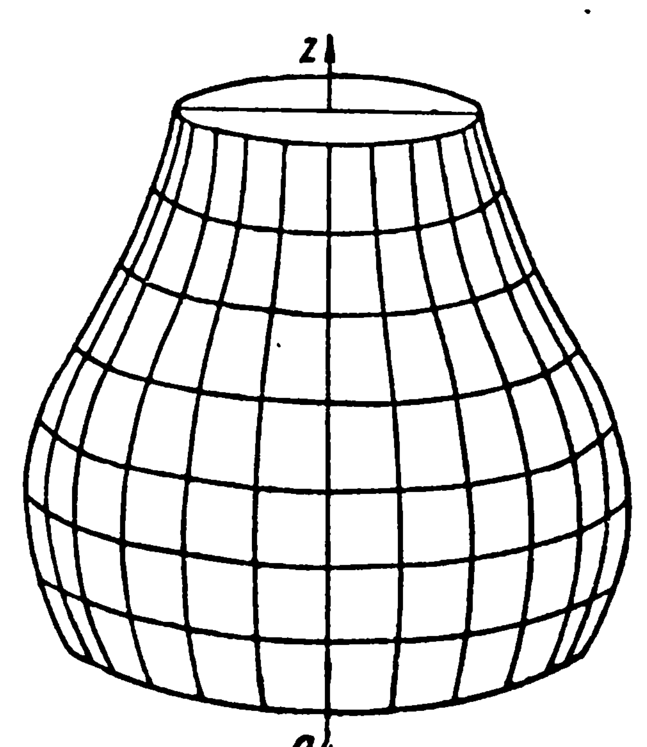


Рис. 130.

5) Если к вращательному движению кривой (16) присоединить еще поступательное — параллельно оси вращения, то (предполагая оба движения происходящими равномерно) получим общую винтовую поверхность

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,$$
$$z=\psi(u)+cv.$$

Возьмем, в частности, в качестве образующей положительную часть оси x:

$$x=u,\quad z=0\quad (u\geqslant 0).$$

Подвергнув ее винтовому движению, придем к обыкновенной винтовой поверхности

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=cv.$$

Для общей винтовой поверхности одно семейство координатных линий состоит из различных положений образующей ($v=\text{const}$), а другое — из винтовых линий ($u=\text{const}$).

§ 2. Касательная и касательная плоскость

230. Касательная к плоской кривой в прямоугольных координатах. Понятие касательной нам уже встречалось не раз [см. например, **91**]. Кривая, заданная явным уравнением

$$y=f(x),$$

где f — непрерывная функция с непрерывной производной, в каждой своей точке (x, y) имеет касательную, угловой коэффициент которой $\operatorname{tg}\alpha$ выражается формулой

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_x=f'(x).$$

Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$Y-y=y'_x(X-x). \tag{1}$$

Здесь (как и ниже) X, Y означают текущие координаты, а x, y — координаты точки касания.

Легко получить и уравнения нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно к касательной:

$$Y-y=-\frac{1}{y'_x}(X-x)\quad\text{или}\quad X-x+y'_x(Y-y)=0. \tag{2}$$

В связи с касательной и нормалью рассматривают некоторые отрезки — именно отрезки TM и MN и их проекции TP и PN на ось x (рис. 131). Последние называются, соответственно, подкасательной и поднормалью и обозначаются через sbt (subtangens) и sbn (subnormal). Полагая в уравнениях (1) и (2) $Y=0$, легко вычислить, что

$$sbt = TP = \frac{y}{y'_x}, \quad sbn = PN = yy'_x. \tag{3}$$

Тогда из треугольников MPT и MPN определятся и длины отрезков касательной и нормали

$$t = TM = \left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\right|, \quad n = MN = \left|y\sqrt{1+y'^2_x}\right|. \tag{4}$$

В случае неявного задания кривой

$$F(x, y) = 0,$$

в окрестности ее обыкновенной точки $M(x, y)$ можно представить себе кривую выраженной явным уравнением. Если в точке M, например, $F'_y(x, y) \neq 0$, то кривая выразится уравнением вида $y = f(x)$, где функция f непрерывна и имеет непрерывную производную. Отсюда ясно, что для кривой существует в точке M касательная, и ее уравнение может быть представлено в форме (1). Но мы знаем [**209** (15)], что в этом случае

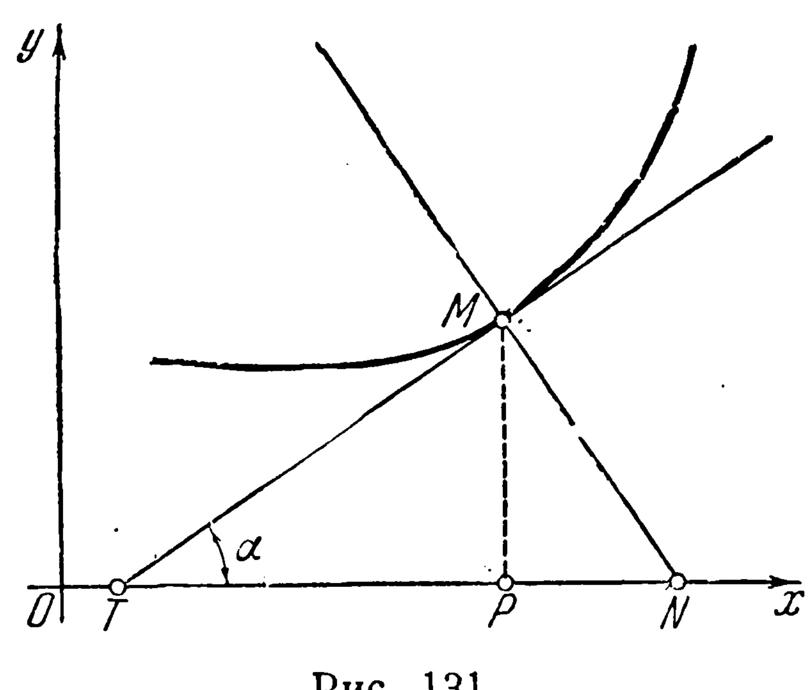


Рис. 131.

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

подставляя, после простых преобразований получим вполне симметричное относительно x и y уравнение касательной

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \tag{5}$$

К тому же результату придем и в случае, если $F'_y = 0$ в точке M, но $F'_x \neq 0$. Лишь в особой точке это уравнение теряет смысл, и относительно касательной, без дополнительного исследования [**236**], здесь ничего сказать нельзя.

Уравнение нормали для рассматриваемого случая, очевидно, будет таково:

$$F'_y(x, y)(X - x) - F'_x(x, y)(Y - y) = 0.$$

Наконец, предположим, что кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Мы видели, что если $\varphi'(t) \neq 0$, касательная к кривой существует и имеет угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (6)$$

[106 (11)]. Уравнение касательной может быть написано так:

$$Y - y = \frac{y'_x}{x'_t}(X - x) \quad \text{или} \quad \frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t}.$$

В последней форме уравнение годится и для случая, когда $x'_t = 0$, но $y'_t \neq 0$ *). Лишь в особой точке, где и $x'_t = 0$ и $y'_t = 0$, уравнение теряет смысл, и вопрос о касательной остается открытым [237].

Иногда удобно, умножив оба знаменателя на множитель dt, писать уравнение касательной в виде

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}. \qquad (7)$$

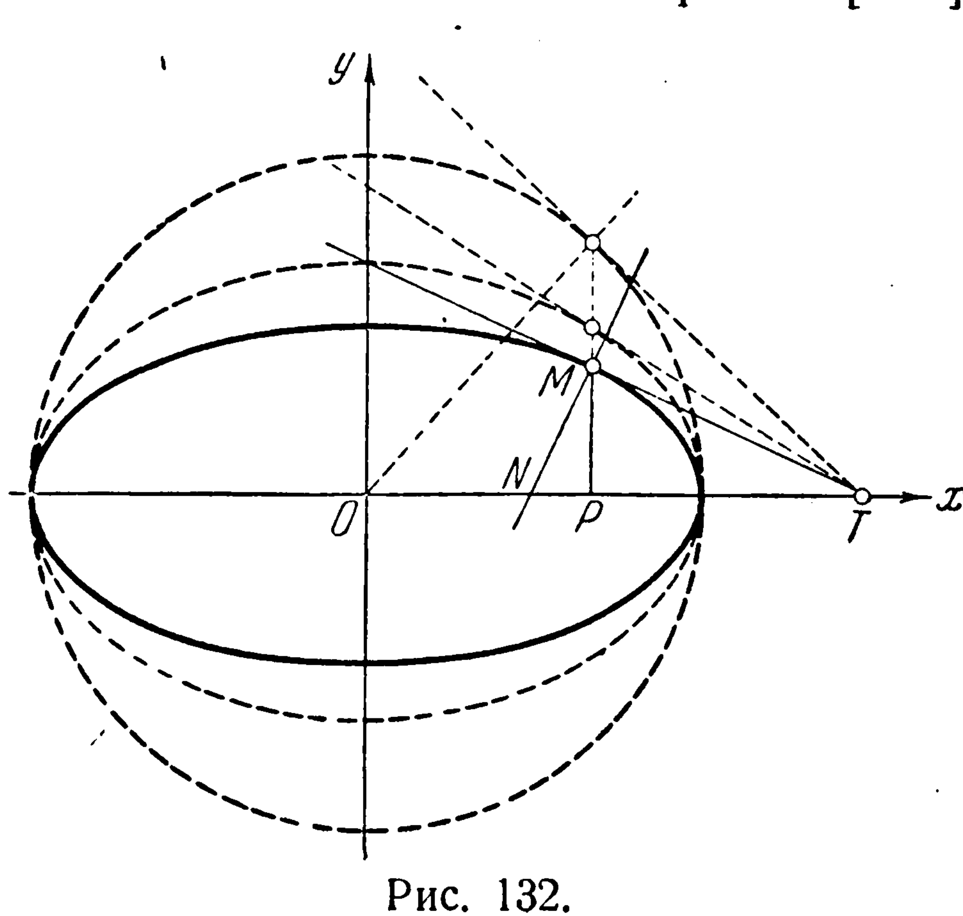


Рис. 132.

231. Примеры. 1) Парабола: $y^2 = 2px$. Дифференцируя это равенство (считая y функцией от x), получим $yy'_x = p$. Таким образом [см. (3)], поднормаль параболы есть постоянная величина. Отсюда вытекает простой способ построения нормали (а с ней и касательной) к параболе. По формуле (4), для отрезка нормали к параболе имеем выражение

$$n = \sqrt{y^2 + p^2}.$$

2) Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 132). По формуле (5) имеем такое уравнение касательной:

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0.$$

Учитывая само уравнение эллипса, можно последнее уравнение переписать в более простом виде

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

---

*) При этом, как всегда уславливаются в аналитической геометрии, если в пропорции

$$\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b}$$

один из последующих членов есть 0, то это означает просто, что равен 0 и соответствующий предыдущий член.

Полагая здесь $Y=0$, найдем $X=\frac{a^2}{x}$. Таким образом, точка T пересечения касательной с осью x не зависит ни от y, ни от b. Касательные к различным эллипсам, отвечающим различным значениям b, в их точках, имеющих абсциссу x, все проходят через одну и ту же точку T на оси x. Так как при $b=a$ получается окружность, для которой касательная строится просто, то точка T сразу определяется, и это приводит к простому способу построения касательной к эллипсу, ясному из рис. 132*).

Легко определить длину отрезка нормали для эллипса:

$$n=\sqrt{\frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^2}}.$$

Такое же выражение получается и в случае гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3) Астроида: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 116). Уравнение касательной

$$x^{-\frac{1}{3}}(X-x)+y^{-\frac{1}{3}}(Y-y)=0$$

с помощью самого уравнения кривой может быть преобразовано к виду

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}\quad\text{или}\quad\frac{X}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}=1.$$

Последнее уравнение есть «уравнение в отрезках». Следовательно, касательная отсекает на осях отрезки $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ и $a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. Отсюда легко получить одно интересное свойство астроиды. Обозначив через τ длину отрезка касательной между осями, имеем

$$\tau^2=a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=a^2$$

и

$$\tau=a=\text{const}.$$

Таким образом, оси симметрии астроиды на всех касательных отсекают равные отрезки.

4) Циклоида:

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

(рис. 118).

Мы имели уже [в 225, 6)] равенство $y'_x=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right),$$

и можно принять $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$.

---

*) Это свойство касательных к эллипсу непосредственно связано с тем фактом, что эллипс может быть рассматриваем как ортогональная проекция некоего круга (радиуса a), лежащего в наклонной плоскости.

Вспомним (рис. 118), что $t = \sphericalangle MDN$, так что $\sphericalangle MEN = \frac{t}{2}$. Если продолжить прямую EM до пересечения в T с осью x, то $\sphericalangle ETx = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} = \alpha$. Следовательно, прямая ME, соединяющая точку циклоиды с высшей точкой катящегося круга (в соответствующем положении), и будет касательной. Отсюда ясно, что прямая MN будет нормалью.

Впоследствии нам полезно будет выражение для отрезка n нормали, которое легко получить из прямоугольного треугольника $\triangle MEN$. Именно,

$$n = MN = 2a \sin\frac{t}{2},$$

5) Эпициклоида:

$$x = a\,[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)\,t],$$
$$y = a\,[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)\,t]$$

(рис. 119).

Написав выражения для производных x'_t и y'_t в виде

$$x'_t = 2am\,(1+m)\sin\frac{t}{2}\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t,$$
$$y'_t = 2am\,(1+m)\sin\frac{t}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t,$$

найдем, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg}\left(m+\frac{1}{2}\right)t.$$

Отсюда $\alpha = \left(m+\frac{1}{2}\right)t$.

Если соединить (рис. 119) точку D с M, то эта прямая составит с осью x как раз такой угол:

$$\sphericalangle xTD = \sphericalangle DOT + \sphericalangle ODT = mt + \frac{t}{2}.$$

Следовательно, DT есть касательная в точке M, а MB будет нормалью.

6) Эвольвента круга:

$$x = a\,(t\sin t + \cos t), \qquad y = a\,(\sin t - t\cos t)$$

(рис. 121).

Здесь

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t, \quad \text{откуда} \quad \alpha = t.$$

Таким образом, касательная MT параллельна радиусу OB, и BM есть нормаль к нашей кривой.

Замечание. Результаты примеров 4), 5), 6) можно было бы получить без всяких выкладок, исходя из кинематических соображений. При качении одной кривой по другой точка касания служит всякий раз мгновенным центром для движущейся фигуры, так что нормаль к траектории любой ее точки проходит через эту точку касания.

232. Касательная в полярных координатах. Если кривая задана полярным уравнением $r = f(\theta)$, то, переходя обычным образом к прямоугольным координатам, получаем параметрическое представление кривой в виде

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta,$$

причем роль параметра здесь играет θ.

В таком случае, по общей формуле (6),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta}.$$

Однако, если кривая исследуется в полярных координатах, обычно положение касательной определяют не углом α с полярной осью, а углом ω с продолженным радиусом-вектором (рис. 114 и 133). Мы имели уже [**218**, 4)] простую формулу

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta}. \tag{8}$$

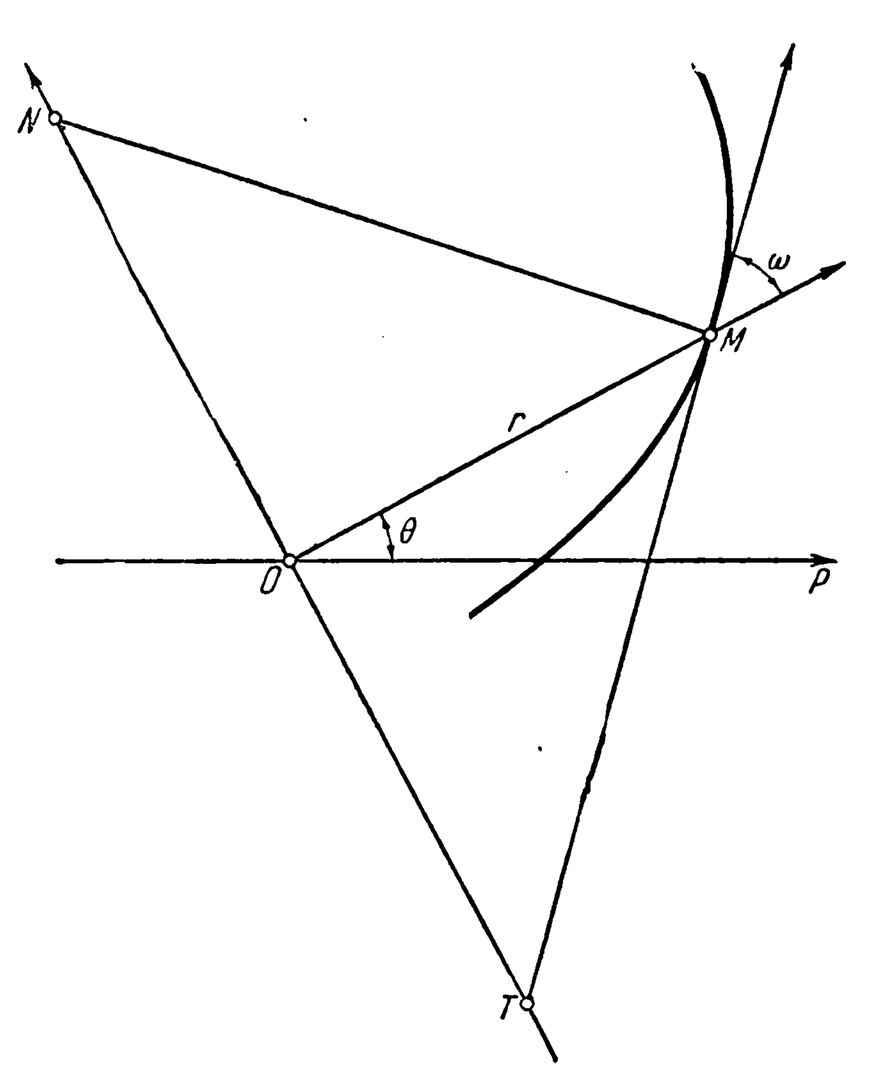


Рис. 133.

Точно так же вместо отрезков t, n, sbt, sbn, о которых была речь в **230**, здесь рассматривают другие отрезки. Проведя через полюс O ось, перпендикулярную к радиусу-вектору (эта ось вращается при перемещении точки), продолжают касательную и нормаль до пересечения с ней, соответственно, в точках T и N. Тогда отрезки TM и MN называются полярными отрезками касательной и нормали, а их проекции TO и ON на упомянутую ось — полярными подкасательной и поднормалью. Обозначать их будем, как и прежде, но помещая внизу в виде значка букву p. Легко получить, используя формулу (8):

$$sbt_p = TO = r\operatorname{tg}\omega = \frac{r^2}{r'_\theta}, \quad sbn_p = ON = r\operatorname{ctg}\omega = r'_\theta,$$

а отсюда уже

$$t_p = TM = \frac{r}{r'_\theta}\left|\sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\right|, \qquad n_p = MN = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}.$$

233. Примеры. 1) Архимедова спираль: $r = a\theta$ (рис. 122).

Так как $r'_\theta = a$, то $sbn_p = a = \text{const}$. Это позволяет сразу устанавливать положение точки N, а с ней — нормали и касательной.

Заметим, что $\operatorname{tg}\omega = \theta$, так что при $\theta \to \infty$ и $\operatorname{tg}\omega \to \infty$, т. е. угол ω стремится к прямому.

2) Гиперболическая спираль: $r = \frac{a}{\theta}$ (рис. 123).

На этот раз $r'_\theta = -\frac{a}{\theta^2}$, $sbt_p = -a = \text{const}$, что также облегчает очевидным образом построение касательной.

3) Логарифмическая спираль: $r = ae^{m\theta}$ (рис. 134).

Имеем $r'_\theta = mae^{m\theta}$, так что $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m} = \text{const}$, и сам угол $\omega = \text{const}$. Таким образом, логарифмическая спираль обладает тем замечательным свойством, что угол между радиусом-вектором и касательной сохраняет постоянную величину. Иными словами, логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под постоянным

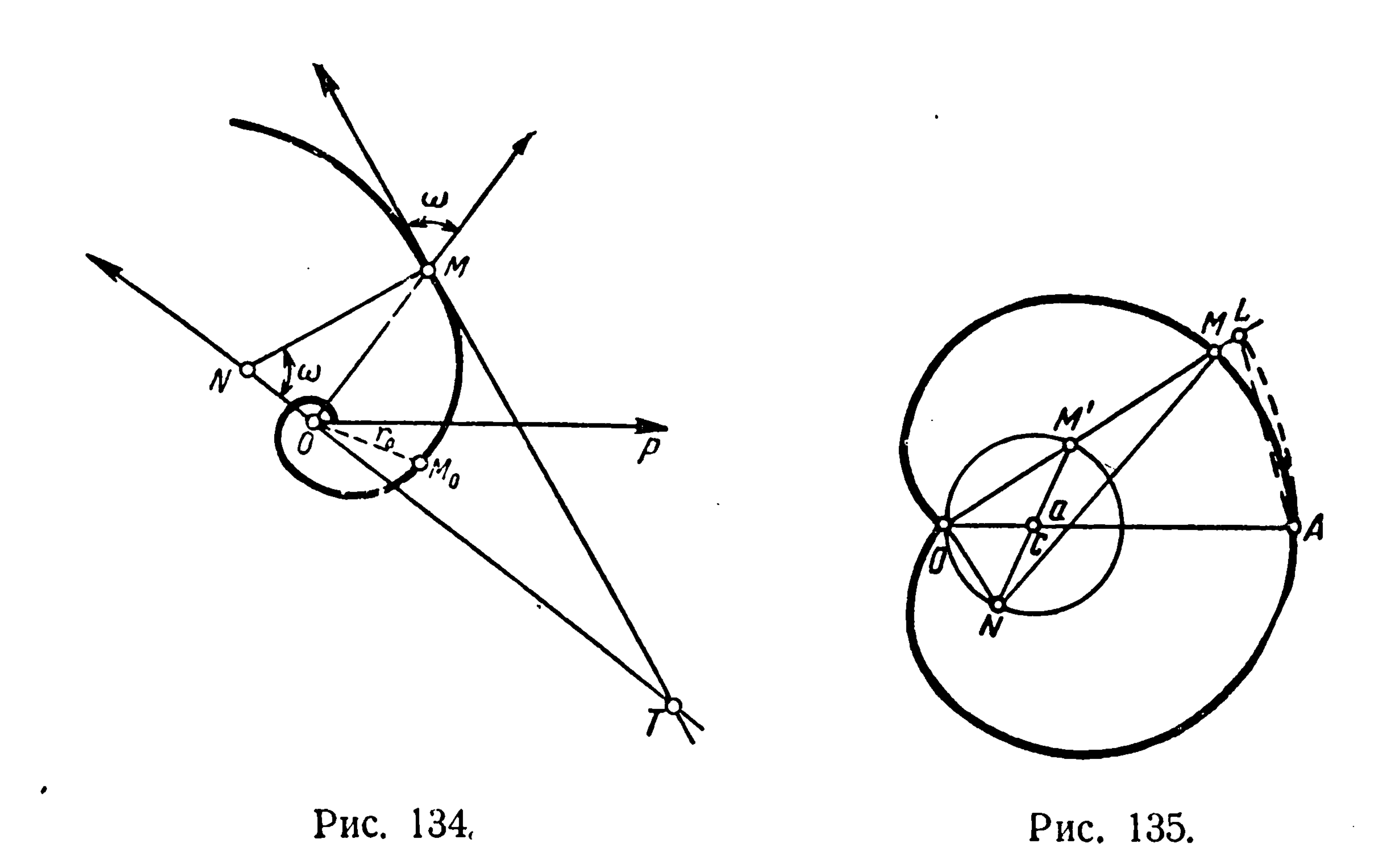


Рис. 134. Рис. 135.

углом. Этим свойством она напоминает окружность, которая также пересекает радиусы-векторы, исходящие из центра, под постоянным (именно под прямым) углом. [Впрочем, и окружность можно рассматривать как частный случай логарифмической спирали, отвечающий $m = 0$.]

4) Улитки: $r = a\cos\theta + b$ (рис. 135).

Отметим, что $sbn_p = r'_\theta = -a\sin\theta$ оказывается не зависящей от b. Таким образом, если взять лежащие на одном луче (из полюса) точки различных улиток, отвечающих различным значениям b, то для всех этих точек полярная поднормаль будет общая, т. е. точка N — одна и та же. Но при $b = 0$ получается окружность, для которой построение нормали очевидно; тогда легко построить нормаль и для любой из улиток (рис. 135). Из треугольника $\triangle MON$ вычисляется полярная нормаль:

$$n_p = \sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}.$$

Особенно просто выражение полярной нормали для кардиоиды *) ($b=a$):

$$n_\rho = 2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

5) Лемниската: $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ (рис. 126).

Дифференцируем это равенство, считая r функцией от θ; получим

$$rr'_\theta = -2a^2\sin 2\theta.$$

Разделив почленно эти два равенства, ввиду (8), найдем

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta} = -\operatorname{ctg} 2\theta,$$

откуда $\omega = 2\theta + \frac{\pi}{2}$. Обозначая через α и β углы наклона касательной и нормали, имеем

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \omega + \theta = 3\theta + \frac{\pi}{2},$$

следовательно, $\beta = 3\theta$: угол наклона нормали к лемнискате равен утроенному полярному углу точки касания. Это дает простой прием построения нормали.

234. Касательная к пространственной кривой. Касательная плоскость к поверхности. 1° В случае пространственной кривой, определение касательной остается буквально то же, что и для плоской кривой [91]. Ограничимся здесь предположением, что кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Возьмем определенное значение t и, тем самым, определенную точку $M(x, y, z)$ на кривой; пусть это будет обыкновенная и простая точка [223]. Придадим t приращение Δt, тогда наращенному значению $t + \Delta t$ параметра будет отвечать другая точка $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$. Уравнения секущей MM_1 будут иметь вид

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\Delta z},$$

где X, Y, Z — текущие координаты. Геометрический смысл этих уравнений не изменится, если мы все знаменатели разделим на Δt:

$$\frac{X-x}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z-z}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Если эти уравнения в пределе, при $\Delta t \to 0$, сохраняют определенный смысл, то этим будет установлено существование предель-

*) Именно этот частный случай и изображен на рис. 135.

ного положения секущей, т. е. касательной. Но в пределе мы получаем

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t}, \tag{9}$$

и эти уравнения, действительно, выражают прямую, поскольку не все знаменатели — нули. Таким образом, в каждой обыкновенной точке кривой касательная существует и выражается этими уравнениями. Для особой точки вопрос о касательной остается открытым.

Замечание. Мы переходили к пределу в уравнениях секущей при $\Delta t \to 0$; покажем, что это равносильно предположению, что $MM_1 \to 0$. Ввиду непрерывности функций φ, ψ, χ, из $\Delta t \to 0$ следует, что и

$$\overline{MM_1}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\to 0.$$

Для доказательства обратного заключения зададимся произвольным числом $\varepsilon>0$. Так как $\overline{MM_1}$ есть непрерывная функция от Δt, то при $|\Delta t|\geqslant\varepsilon$ эта функция имеет наименьшее значение δ, очевидно, положительное (так как взятая точка предположена простой, т. е. не получается ни при каком значении параметра, отличном от t). В таком случае

при $\overline{MM_1}<\delta$ необходимо $|\Delta t|<\varepsilon$, ч. и тр. д.

Иногда уравнения (9) удобно писать в виде

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

который получается из (9) умножением всех знаменателей на dt.

Если через α, β, γ обозначать углы, составленные касательной с осями координат, то направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ выразятся так:

$$\cos\alpha=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}},\qquad \cos\beta=\frac{y'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}}.$$

Выбор определенного знака перед радикалом отвечает выбору определенного направления касательной.

Вопрос о касательной к кривой, заданной неявными уравнениями $F(x, y, z)=0$ и $G(x, y, z)=0$, мы рассмотрим ниже, в 3°.

2°. Пусть поверхность задана явным уравнением $z=f(x, y)$. Мы в **180** дали определение касательной плоскости и,

в предположении дифференцируемости функции $f(x, y)$ *), нашли уравнение этой плоскости [180 (6)]:

$$Z - z = f'_x(x, y)(X - x) + f'_y(x, y)(Y - y),$$

Обыкновенно обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = q$$

и пишут уравнение касательной плоскости так:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{10}$$

Если $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ суть направляющие косинусы нормали к поверхности (так называют перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания), то для них имеем выражения

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}; \tag{11}$$

двойной знак перед радикалом отвечает двум противоположным направлениям нормали.

Проведем теперь по поверхности через рассматриваемую точку произвольную кривую

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

так что тождественно относительно t будет

$$\chi(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Дифференцируем это тождество по t [181]:

$$\chi'(t) = p\varphi'(t) + q\psi'(t).$$

Возьмем касательную к кривой в рассматриваемой неособой точке в форме (9). Если, наконец, в предыдущем равенстве заменить производные φ', ψ', χ' пропорциональными им, в силу (9), разностями $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, то придем к (10). Таким образом, касательная (9) всеми точками лежит в касательной плоскости (10). Мы можем, следовательно, теперь *определить касательную плоскость к поверхности в заданной на ней точке, как такую плоскость, в которой лежат касательные ко всем кривым, проведенным по поверхности через эту точку* **).

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то, предполагая $F'_z \neq 0$ в рассматриваемой точке, в окрестности ее

*) Мы здесь предполагаем существование и непрерывность частных производных, следовательно, дифференцируемость налицо [179].

**) Частично об этом уже была речь в 180.

можно выразить поверхность и явным уравнением $z=f(x, y)$, так что существование касательной плоскости обеспечено. Так как в этом случае

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},$$

то, подставляя эти значения p и q в уравнение (10), легко преобразуем его к виду

$$F'_x(x, y, z)(X-x)+F'_y(x, y, z)(Y-y)+ \\ +F'_z(x, y, z)(Z-z)=0. \tag{12}$$

Очевидно, в таком же виде представится уравнение касательной плоскости и в случае, если $F'_z=0$, но какая-нибудь из двух других производных F'_x, F'_y отлична от 0. Лишь в особой точке это уравнение теряет смысл (и вопрос о касательной плоскости остается открытым).

3° Теперь легко сообразить, как найти касательную к кривой, заданной двумя неявными уравнениями:

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0,$$

т. е. представляющей пересечение двух соответствующих поверхностей. Если рассматриваемая на кривой точка — обыкновенная, то в ее окрестности кривая может быть выражена и явными уравнениями [**227**], так что существование касательной обеспечено. Эта касательная, очевидно, лежит в пересечении касательных плоскостей к упомянутым двум поверхностям и, следовательно, выражается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0, \\ G'_x(X-x)+G'_y(Y-y)+G'_z(Z-z)=0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

[Так как в обыкновенной точке для матрицы коэффициентов хоть один из определителей отличен от 0, то этими уравнениями, действительно, определится прямая.]

4° Возвращаясь к поверхности, перейдем, наконец, к случаю, когда она выражается параметрическими уравнениями:

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v).$$

Снова ограничиваемся обыкновенной (и простой) точкой; так как [**228**] в ее окрестности поверхность может быть выражена и явным уравнением, то существование касательной плоскости обеспечено. Уравнение ее может быть написано в виде

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{14}$$

где коэффициенты A, B, C еще подлежат определению.

Если в уравнениях поверхности закрепить за v значение, отвечающее выбранной точке, то получатся уравнения координатной линии

[«кривой (v)»], проходящей через эту точку. Касательная к этой кривой в указанной точке выразится уравнениями [см. (9)]

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}.$$

Аналогично, фиксируя u, получим координатную линию другого семейства, проходящую через данную точку [«кривую (u)»] и имеющую в ней касательную

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}.$$

Так как обе эти касательные должны лежать в касательной плоскости (14), то выполняются условия

$$Ax'_u+By'_u+Cz'_u=0,$$
$$Ax'_v+By'_v+Cz'_v=0.$$

В таком случае коэффициенты A, B, C должны быть пропорциональны определителям матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}.$$

Обыкновенно полагают их равными этим определителям:

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Теперь уравнение касательной плоскости проще всего написать с помощью определителя:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0; \tag{16}$$

в обыкновенной точке оно, действительно выражает плоскость.

Направляющие косинусы нормали будут

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

235. Примеры. 1) Рассмотрим винтовую линию (рис. 128)

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=ct.$$

В этом случае

$$x'_t=-a\sin t, \quad y'_t=a\cos t, \quad z'_t=c,$$

и уравнения касательной имеют вид

$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}.$$

Направляющие косинусы касательной

$$\cos\alpha = -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Отметим, что $\cos\gamma = \text{const.}$, следовательно, и $\gamma = \text{const.}$ Если представить себе винтовую линию навернутой на прямой круглый цилиндр, то можно сказать, что винтовая линия пересекает все образующие этого цилиндра под постоянным углом *).

2) Эллипсоид: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Касательная плоскость получается по формуле (12), с учетом самого уравнения эллипсоида:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

3) Конус (второго порядка): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

Касательная плоскость:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 0.$$

В вершине (0, 0, 0) конуса, которая является особой точкой, это уравнение теряет смысл, и касательной плоскости нет.

4) Кривая Вивиани (рис. 127):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = Rx.$$

Касательная выражается уравнениями [см. (13)]

$$xX + yY + zZ = R^2, \quad (2x - R)X + 2yY = Rx.$$

Эти уравнения перестают выражать прямую лишь в особой точке $(R, 0, 0)$.

5) Винтовая поверхность:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv.$$

По формуле (16) уравнение касательной плоскости будет

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix} = 0.$$

С учетом уравнений поверхности это уравнение может быть упрощено так:

$$\sin v\cdot X - \cos v\cdot Y + \frac{u}{c}\cdot Z = uv.$$

236. Особые точки плоских кривых. Здесь мы остановимся подробнее на поведении кривой, заданной неявным уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

вблизи ее особой точки (x_0, y_0). Не имея в виду исчерпать этот вопрос, мы хотим лишь познакомить читателя с главными типами

---

*) Если поверхность цилиндра разрезать по образующей и развернуть, то винтовая линия превратится в прямую, которая все вертикали, естественно, пересекает под одним и тем же углом. Это соображение делает предыдущий результат совершенно очевидным.

особых точек. При этом функцию F мы предполагаем непрерывной и имеющей непрерывные производные первых двух порядков. Без умаления общности, можно считать $x_0=0$, $y_0=0$; это отвечает просто переносу начала координат в испытуемую точку. Итак, имеем

$$F(0,\ 0)=0, \quad F'_x(0,\ 0)=0, \quad F'_y(0,\ 0)=0.$$

Введем обозначения

$$a_{11}=F''_{x^2}(0,\ 0), \quad a_{12}=F''_{xy}(0,\ 0), \quad a_{22}=F''_{y^2}(0,\ 0).$$

Предполагая, что из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} хоть одно — не нуль, мы станем классифицировать представляющиеся возможности в зависимости от знака выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Исследования настоящего n° теснейшим образом примыкают к исследованиям n° **197**

1° $\boldsymbol{a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0}$.

В этом случае, как мы знаем, функция $F(x,\ y)$ имеет в начальной точке экстремум. Значит, в достаточно малой окрестности этой точки $F>0$ или $F<0$ (исключая самую начальную точку, где функция обращается в 0). Иначе говоря, в упомянутой окрестности нет ни одной точки нашей кривой, кроме начальной: эта последняя оказывается *изолированной точкой* кривой.

Примеры, иллюстрирующие рассматриваемый случай:

$$x^2+y^2=0 \text{ или } (x^2+y^2)(x+y-1)=0.$$

Начальная точка принадлежит обеим кривым и для обеих является изолированной. Но, в то время как первая вся состоит из одной точки, вторая, кроме нее, содержит еще прямую $x+y=1$, не проходящую через начало.

2° $\boldsymbol{a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0}$.

Как и в **197**, в окрестности начальной точки можно представить $F(x,\ y)$ в следующем виде:

$$F(x,\ y)=\frac{1}{2}\{a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2\},$$

где

$$\text{все } \alpha\to 0 \text{ при } x\to 0,\ y\to 0,$$

или, если ввести полярные координаты ρ, φ:

$$F(x,\ y)=\frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+ \\ +\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\}.$$

В рассматриваемом случае, если предположить еще $a_{22}\neq 0$, трехчлен $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2$ имеет различные вещественные корни t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ и разлагается на множители $a_{22}(t-t_1)(t-t_2)$. Положим, $\varphi_1=\operatorname{arctg} t_1$, $\varphi_2=\operatorname{arctg} t_2$, так что $t_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $t_2=\operatorname{tg}\varphi_2$. Теперь легко преобразовать первый трехчлен в скобках $\{\ldots\}$ к виду

$$a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi= \\ =a_{22}\cos^2\varphi(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_2). \qquad (18)$$

Отсюда становится ясным, что прямые, проведенные через начало под углами φ_1 и φ_2 к оси x, — будем для краткости называть их прямыми (φ_1) и (φ_2) — делят плоскость на две угловых области, в одной из которых упомянутый трехчлен сохраняет знак плюс, а в другой знак минус *) (рис. 136).

Заключим теперь прямые (φ_1) и (φ_2) внутрь двух сколь угодно узких угловых областей — двух пар вертикальных углов, содержащихся, соответственно, между прямыми ($\varphi_1 - \varepsilon$) и ($\varphi_1 + \varepsilon$) или ($\varphi_2 - \varepsilon$) и ($\varphi_2 + \varepsilon$) (эти углы на рис. 132 заштрихованы). Взяв круг достаточно малого радиуса r_ε вокруг начала, можно утверждать, что — по выделении упомянутых углов — он разобьется на две угловых области, в каждой из которых уже сама функция $F(x, y)$ сохраняет определенный знак: в одной плюс, а в другой минус (см. рис.). Действительно, так как при изменении угла вне промежутков ($\varphi_1 - \varepsilon$, $\varphi_1 + \varepsilon$) и ($\varphi_2 - \varepsilon$, $\varphi_2 + \varepsilon$) трехчлен (18) не обращается в 0, то он остается по абсолютной величине бо́льшим некоторого положительного числа m_ε. С другой стороны, при достаточно малом ρ выражение $\alpha_{11} \cos^2 \varphi + 2\alpha_{12} \cos \varphi \sin \varphi + \alpha_{22} \sin^2 \varphi$ по абсолютной величине будет меньше m_ε. Отсюда и следует наше утверждение (ср. рассуждение в **197**, 1°).

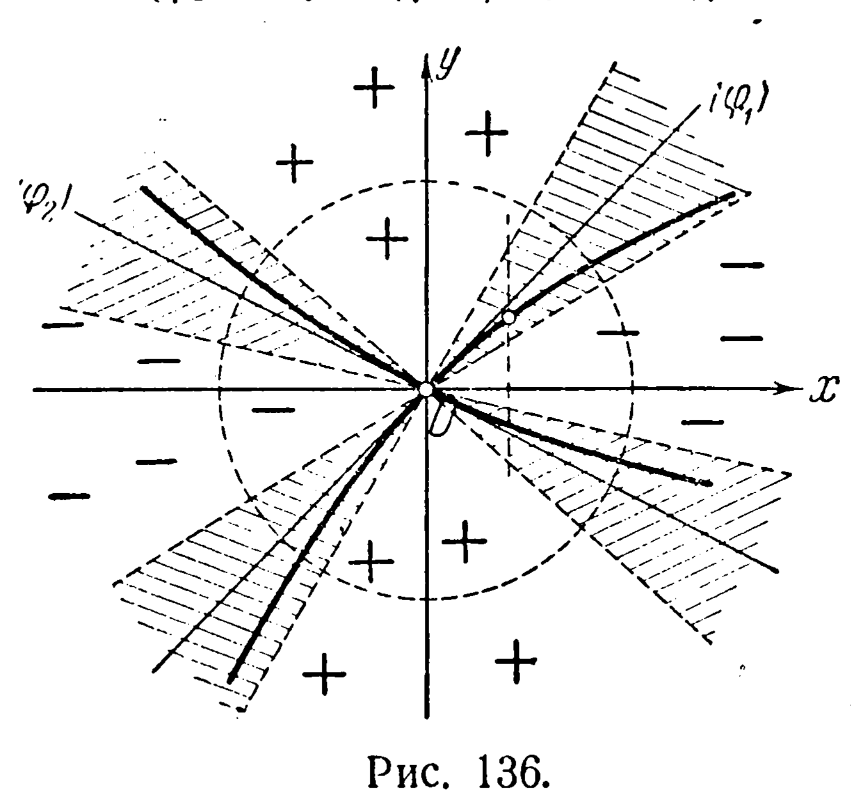


Рис. 136.

Рассмотрим теперь два заштрихованных вертикально расположенных сектора круга, например, те, которые ограничены прямыми ($\varphi_1 - \varepsilon$) и ($\varphi_1 + \varepsilon$). Так как на этих прямых функция имеет противоположные знаки, то *на каждой вертикали, пересекающей упомянутые секторы, найдется точка, в которой $F(x, y)$ обращается в* 0, т. е. точка нашей кривой. Это следует из известного свойства непрерывной функции [**80**], если применить его к функции $F(x, y)$ от y (при фиксированном x) **).

Таким образом, внутри каждой пары заштрихованных секторов расположена ветвь кривой, проходящая через начало, в то время как вне их, в пределах круга, точек кривой нет. Ввиду произвольности ε ясно, что в начале эти ветви касаются, соответственно, прямых (φ_1) и (φ_2).

---

*) Этим мы несколько углубляем сказанное в **197**, 2°: там нам достаточно было констатировать наличие двух прямых, на которых трехчлен имеет разные знаки.

) Ср. доказательство теоремы I n° **206 о существовании неявной функции.

Правда, остался открытым еще вопрос, единственна ли та точка на упомянутой вертикали, в которой $F(x, y)=0$. Если бы их нашлось две, то, по теореме Ролля [**111**], между ними на той же вертикали нашлась бы точка, в которой было бы $F'_y(x, y)=0$. Итак, единственность будет установлена, если мы докажем, что, по крайней мере, в достаточной близости к началу такое равенство невозможно.

Допустим противное. Тогда будем иметь $F'_y(x_n, y_n)=0$ для некоторой последовательности точек $\{(x_n, y_n)\}$, где $x_n \to 0$ и $\frac{y_n}{x_n} \to$ $\to \operatorname{tg} \varphi_1 = t_1$. Применим к функции $F'_y(x, y)$ формулу конечных приращений [**183**, (9)]:

$$0=F'_y(x_n, y_n)-F'_v(0, 0)=$$
$$=F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot x_n + F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot y_n \quad (0<\theta_n<1)$$

или

$$F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)+F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot\frac{y_n}{x_n}=0.$$

Переходя здесь к пределу, получим окончательно $a_{12}+a_{22}t_1=0$ или $t_1=-\frac{a_{12}}{a_{22}}$, что неверно: такое значение t_1 могло бы иметь лишь в том случае, если бы корни трехчлена $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2$ были равными.

Из сказанного попутно вытекает, что, в достаточной близости к началу, ни одна точка упомянутых двух ветвей, кроме самой начальной, уже не будет особой.

Аналогично исчерпывается и случай, когда $a_{22}=0$, но $a_{11}\neq 0$ или $a_{11}=a_{22}=0$, но $a_{12}\neq 0$; отметим, лишь, что в последнем случае роль прямых (φ_1) и (φ_2) играют оси координат.

Итак, при сделанном предположении $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ точка $(0, 0)$ оказывается *двойной точкой* кривой: в ней пересекаются две ветви кривой, каждая из которых в этой точке имеет свою касательную. Угловые коэффициенты этих касательных определяются всегда из уравнения $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2=0$; лишь если $a_{22}=0$, следует считать, что, кроме конечного корня, оно имеет корнем и бесконечность.

Примерами могут служить уже знакомые нам кривые

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0 \text{ [лемниската, рис. 126]},$$
$$x^3+y^3-3axy=0 \text{ [декартов лист, рис. 117]},$$

для которых начало и будет двойной точкой. В первом случае имеем $a_{11}=-4a^2$, $a_{12}=0$, $a_{22}=4a^2$, $t_1=1$, $t_2=-1$, так что касательными в начале служат биссектрисы координатных углов. Во втором: $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=-3a$, $t_1=0$, $t_2=\infty$, и касательными служат оси координат.

3° $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$.

Допустим и здесь, что $a_{22}\neq 0$. Квадратный трехчлен $a_{11}+2a_{12}t+$ $+a_{22}t^2$ в этом случае имеет **двойной** корень $t_1=-a_{12}/a_{22}$. Полагая, как и выше, $\varphi_1=\operatorname{arctg} t_1$, проведем через начало прямую под этим углом φ_1 и оси x. Заключим ее в угловую область между прямыми $(\varphi_1-\varepsilon)$ и $(\varphi_1+\varepsilon)$ (на рис. 137 она заштрихована). С помощью соображений, сходных с примененными выше, можно установить, что вне заштрихованной области, но в достаточной близости к началу, функция $F(x, y)$ сохраняет **определенный** знак, один и тот же с обеих сторон: плюс или минус, в зависимости от того, будет ли $a_{22}>0$ или $a_{22}<0$. Теперь на прямых $(\varphi_1\pm\varepsilon)$ функция имеет **одинаковые** знаки, и применять теорему **Коши** нельзя.

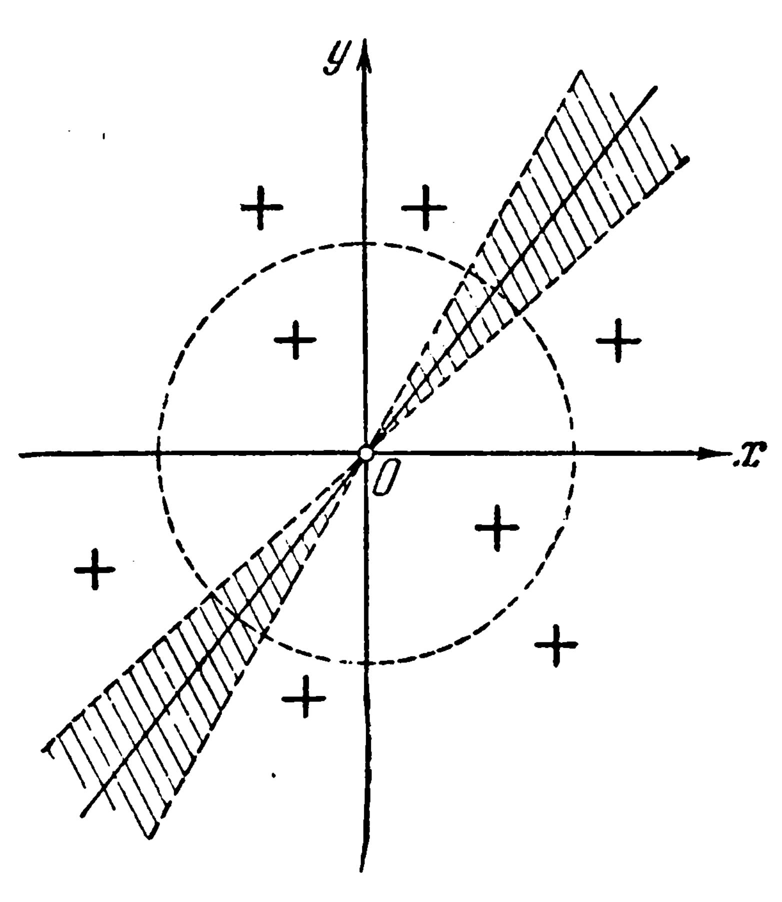


Рис. 137.

Мы не будем углубляться в исследование этого случая, требующего более сложных рассуждений, с привлечением высших производных. Ограничимся указанием на основные возможности, которые здесь представляются.

а) Вблизи начальной точки, кроме нее самой, нет точек кривой: *изолированная точка* (как в случае 1°).

ПРИМЕРЫ:

$$x^4+y^2=0 \quad \text{или} \quad (x^4+y^2)(x+y-1)=0.$$

Для обеих «кривых» начало является **изолированной** точкой.

б) В обоих заштрихованных вертикальных углах (в достаточной близости к началу) на каждой вертикали лежат по **две** точки нашей кривой, через начало проходят две ветви кривой, имеющие в ней общую касательную (φ_1): *двойная точка* (как и в случае 2°).

ПРИМЕР:

$$x^4-y^2=0, \quad \text{т. е.} \quad y=\pm x^2$$

— две параболы, в начальной точке касающиеся оси x.

в) В одном из заштрихованных углов вовсе нет точек кривой, а в другом — две ветви, которые как бы заканчиваются в начальной точке, имея в ней общую касательную (φ_1). Здесь мы имеем дело с новым типом особой точки — с *точкой возврата* (или *точкой заострения*). В зависимости от того, лежат ли обе встречающиеся в ней ветви по разные стороны от общей касательной или по одну сторону, различают точки возврата **первого** и **второго** рода.

Примером кривой, имеющей в начале точку возврата первого рода, может служить кривая

$$y^2 - x^2 = 0$$

(полукубическая парабола, рис. 115).

Более редкий случай точки возврата второго рода проиллюстрируем таким примером:

$$x^5 - (y - x^2)^2 = 0$$

или

$$y = x^2 \pm x^2 \sqrt{x} \quad (x \geqslant 0).$$

Обе ветви в начальной точке касаются оси x, располагаясь по крайней мере, вблизи начала) над нею (рис. 138).

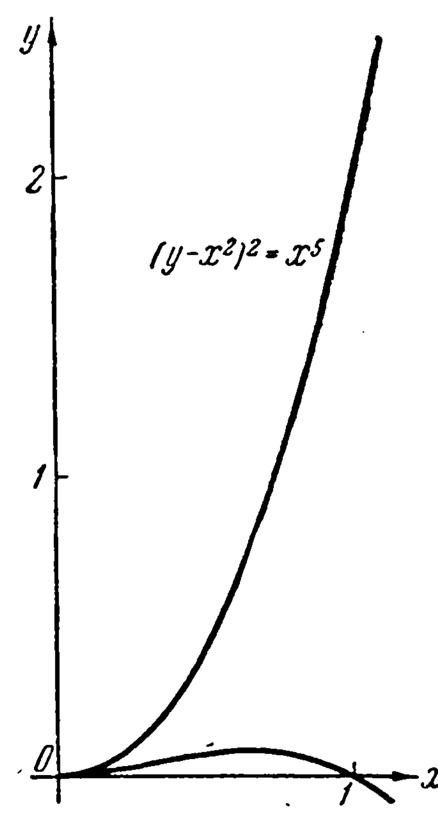


Рис. 138.

Если $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, то приходится рассматривать производные высших порядков. В этом случае возможны и более сложные типы особых точек (*тройные* или, вообще, *n-кратные* точки, и т. д.).

237. Случай параметрического задания кривой. Скажем еще несколько слов об особых точках плоских кривых, заданных параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Пусть при $t = t_0$ имеем

$$x'_0 = \varphi'(t_0) = 0 \text{ и } y'_0 = \psi'(t_0) = 0,$$

но из производных второго порядка x''_0 и y''_0 пусть хоть одна, например x''_0, отлична от нуля.

Проведем секущую через точки (x_0, y_0) и (x, y) кривой, отвечающие значениям t_0 и t параметра. Ее уравнение может быть написано так:

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0}.$$

Но по формуле Тейлора [с дополнительным членом в форме Пеано, **124** (10а)], так как $x'_0 = y'_0 = 0$, имеем

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(x''_0 + \alpha)(t - t_0)^2,$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(y''_0 + \beta)(t - t_0)^2,$$

где α и β стремятся к 0 при $t \to t_0$. Подставляя, перепишем уравнение секущей, после сокращения обоих знаменателей на $\frac{1}{2}(t-t_0)^2$, в следующем виде:

$$\frac{X-x_0}{x_0''+\alpha}=\frac{Y-y_0}{y_0''+\beta}.$$

Здесь можно перейти к пределу при $t \to t_0$ *), и таким путем получается уравнение касательной:

$$\frac{X-x_0}{x_0''}=\frac{Y-y_0}{y_0''} \quad \text{или} \quad Y-y_0=\frac{y_0''}{x_0''}(X-x_0). \tag{19}$$

Мы предположили $x_0'' \neq 0$; пусть, например, $x_0''>0$. Тогда функция $x=\varphi(t)$ при $t=t_0$ имеет (собственный) минимум [**137**], т. е. $x>x_0$ при значениях t, близких к t_0 (как при $t<t_0$, так и при $t>t_0$). Таким образом, в точке (x_0, y_0) смыкаются две ветви кривой, отвечающие $t<t_0$ и $t>t_0$; они имеют общую (наклонную или горизонтальную) касательную и обе расположены вправо от вертикали $x=x_0$. Иными словами, налицо *точка возврата* (рис. 139). Это — основной случай особой точки для кривой, заданной параметрически.

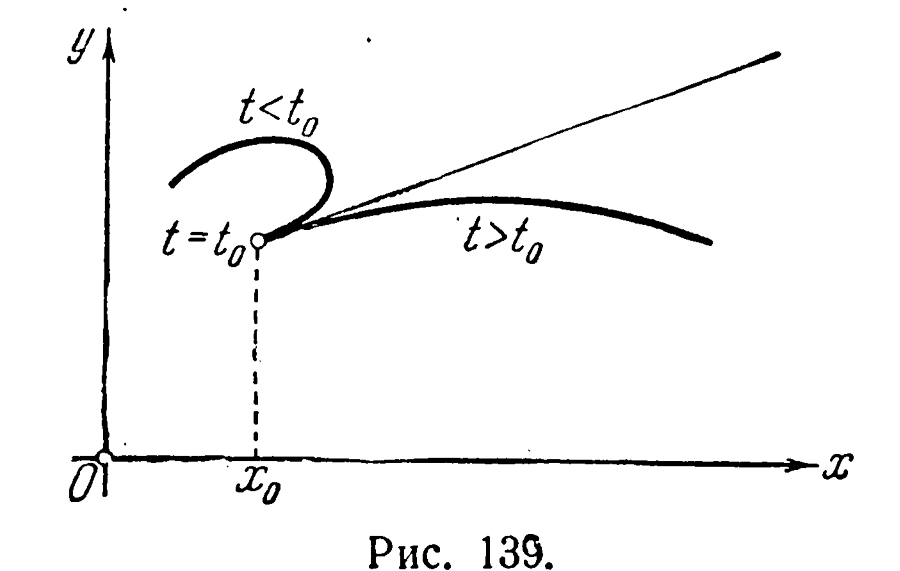


Рис. 139.

Легко пойти несколько дальше в этом исследовании, чтобы установить, какого рода будет эта точка возврата. С этой целью привлечем третьи производные, и приращения $x-x_0$ и $y-y_0$ напишем в виде

$$x-x_0=\frac{1}{2}x_0''(t-t_0)^2+\frac{1}{6}(x_0'''+\tilde{\alpha})(t-t_0)^3$$
$$y-y_0=\frac{1}{2}y_0''(t-t_0)^2+\frac{1}{6}(y_0'''+\tilde{\beta})(t-t_0)^3,$$

где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ снова стремятся к 0 при $t \to t_0$.

Вычислим, пользуясь уравнением (19), ординату Y точки касательной с абсциссой x; мы получим

$$Y-y_0=\frac{y_0''}{x_0''}(x-x_0)=$$
$$=\frac{1}{2}y_0''(t-t_0)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{y_0''}{x_0''}(x_0'''+\tilde{\alpha})(t-t_0)^3.$$

*) См. замечание в **234**, которое приложимо и здесь, если рассматриваемую точку считать простой.

Составим, наконец, разность ординат Y и y, отвечающих одной и той же абсциссе x:

$$Y-y=\frac{1}{6}\left(\frac{x_0'''y_0''-x_0''y_0'''}{x_0''}+\tilde{\gamma}\right)(t-t_0)^3,$$

где через $\tilde{\gamma}$ обозначена снова некоторая бесконечно малая при $t\to t_0$.

Теперь если только $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''\neq 0$ (что обыкновенно и выполняется), ясно, что разность $Y-y$ будет разных знаков при $t<t_0$ и $t>t_0$, т. е. для тех двух ветвей кривой, которые встречаются в точке (x_0, y_0) (в предположении, конечно, что мы ограничиваемся значениями t, достаточно близкими к t_0). Ветви располагаются по разные стороны от касательной, и мы устанавливаем точку возврата *первого рода*.

Примеры подобных особенностей встречались нам уже не раз: циклоида, эпи- или гипоциклоида, эвольвента круга — все имеют такие точки возврата (рис. 118 — 121).

Может оказаться, в исключительном случае, что $x_0'''y_0''-x_0''y_0'''=0$; тогда разложение $Y-y$ по степеням $t-t_0$ начнется с четвертой или более высокой степени этого двучлена. Если степень эта *четная*, то рассматриваемая особая точка будет точкой возврата *второго рода*.

§ 3. Касание кривых между собой

238. Огибающая семейства кривых. Если две кривые имеют общую точку M_0 и — в этой точке — общую касательную, то говорят, что *кривые касаются в точке* M_0. Настоящий параграф посвящен некоторым вопросам, связанным с касанием плоских кривых.

Приступая к рассмотрению *огибающей семейства* кривых, остановимся сначала на самом понятии *семейства* кривых. Нам уже не раз приходилось встречаться с уравнениями кривых, в которые, кроме текущих координат x и y переменной точки, входит еще один или несколько *параметров*. В случае одного параметра, скажем a, уравнение имеет вид

$$F(x, y, a)=0. \qquad (1)$$

Левая часть является функцией трех переменных, из которых переменную a мы иначе называем лишь потому, что она играет особую роль: для получения конкретной кривой значение параметра a должно быть фиксировано. При изменении этого значения, обычно в пределах некоторого промежутка, будут получаться, вообще говоря, различные (по форме или расположению) кривые.

Совокупность всех этих кривых и называют *семейством кривых* с одним параметром, а уравнение (1) — *уравнением семейства*.

Иногда случается, что для подобного семейства кривых существует *кривая, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и притом вся состоит из этих точек касания* (рис. 140). Такая кривая носит название огибающей данного семейства. Мы покажем сейчас, как установить, существует ли огибающая, и как найти ее в случае существования.

С этой целью допустим сначала, что огибающая существует.

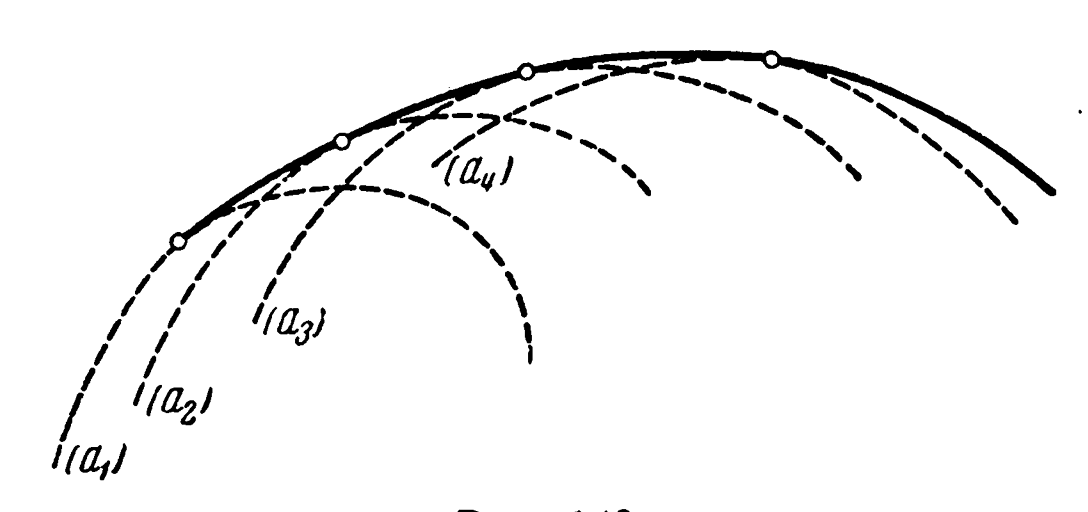


Рис. 140.

Для простоты предположим, что речь идет об огибающей (точнее — ветви огибающей), которая каждой кривой семейства касается в одной точке. Тогда координаты этой точки касания однозначно определяются указанием кривой семейства, т. е. значением параметра a:

$$x = \varphi(a), \quad y = \psi(a). \tag{2}$$

Поскольку огибающая вся состоит из точек касания, эти уравнения и дают параметрическое представление огибающей.

Мы предполагаем существование и непрерывность частных производных функции F и производных функций φ и ψ.

Точка (2) лежит на кривой (1), определяемой тем же значением параметра a, так что имеет место такое тождество относительно a:

$$F(\varphi(a), \quad \psi(a), \ a) = 0. \tag{3}$$

Продифференцировав его полным образом по a, получим [**181, 185**] *)

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_a da = 0, \tag{4}$$

причем производные вычислены при указанных в (3) значениях аргументов, а dx и dy означают дифференциалы функций (2).

Теперь постараемся аналитически выразить тот факт, что огибающая касается в точке (2) кривой (1). Касательная к кривой (1) [см. **230**, (5)]

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) = 0 \tag{5}$$

и к кривой (2) [**230** (7)]

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} \tag{6}$$

*) Здесь, между прочим, мы используем и непрерывность частных производных функции F.

должны совпасть. Условие совпадения этих прямых можно написать в виде

$$F'_x dx + F'_y dy = 0. \tag{7}$$

При этом, как и выше, под x и y мы разумеем их значения (2), а под dx и dy — дифференциалы функций (2).

Заметим, что уравнения (5) и (6) действительно выражают касательные к кривым лишь в предположении, что рассматриваемая точка не будет для них особой. Тем не менее, равенство (7) имеет место даже в том случае, если эта точка будет особой для той или другой кривой.

Сопоставляя (7) с (4) и учитывая, что da — произвольное число, найдем, что $F'_a = 0$ или в развернутом виде:

$$F'_a(\varphi(a),\ \psi(a),\ a) = 0. \tag{8}$$

Тождества (3) и (8) показывают, что функции (2), нам неизвестные, должны тождественно относительно a удовлетворять системе уравнений

$$F(x,\ y,\ a) = 0, \quad F'_a(x,\ y,\ a) = 0. \tag{9}$$

Итак, если огибающая существует, ее параметрические уравнения (2) получаются как решения относительно x и y системы (9).

В том случае, когда эта система при переменном a вообще не допускает решений в виде функций от a, положение вещей ясно; огибающей вовсе нет. Предположим же теперь, что в результате решения системы (9) получены уравнения (2), выражающие кривую без особых точек *). Будет ли эта кривая огибающей нашего семейства кривых?

Так как функции (2) удовлетворяют уравнениям (9), то выполняются тождества (3) и (8). Дифференцируя первое из них, получим (4), а сопоставляя это с (8), придем к равенству (7). Если точка (2) (ни при одном a) не будет особой на соответствующей кривой (1), так что уравнение (5) действительно выражает касательную к названной кривой, то равенство (7) обусловливает совпадение этой касательной с касательной (6) к кривой (2). В этом случае кривая (2) на самом деле будет огибающей семейства.

В частности, это можно гарантировать, если, например, кривые данного семейства вовсе лишены особых точек.

Наоборот, если такие особые точки имеются и при изменении a геометрическое место их образует кривую (2), то соответствующие ей функции φ и ψ необходимо удовлетворяют системе (9) **), хотя в этом случае кривая может не быть огибающей.

---

*) При наличии отдельных особых точек ограничимся промежутком изменения параметра, не содержащим критических его значений.

**) Для них выполняется (3), значит и (4). Затем, имеет место (7) как выше упоминалось в тексте; сопоставляя с (4), приходим к (8).

Итак, при наличии особых точек кривая (2), полученная в результате решения системы (9), подлежит еще проверке: она может быть огибающей, может быть геометрическим местом особых точек на кривых семейства или, наконец, частью — огибающей, частью же — таким геометрическим местом.

Обыкновенно при разыскании огибающей не останавливаются на системе уравнений (9), но идут дальше — исключают из них a. Иными словами, получают соотношение вида

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{10}$$

уже не содержащее a и представляющее собой условие, необходимое и достаточное для того, чтобы для пары значений x, y нашлось такое значение a, которое совместно с ними удовлетворяло обоим уравнениям (9).

Все точки кривой (2), полученной решением системы (9), должны удовлетворять уравнению (10). Поэтому, если это последнее уравнение не выражает никакой кривой, то сразу ясно, что огибающей нет. Если же уравнение (10) выражает кривую (ее называют *дискриминантной кривой* семейства), то она как выше, подлежит проверке. В ее составе должна оказаться огибающая (если она существует), но должно быть и геометрическое место особых точек (если таковые налицо). Кроме того, здесь есть еще одна неприятная возможность, которую следует исключить проверкой: именно, в состав дискриминантной кривой может попросту входить одна или несколько частных кривых семейства. Так будет в том случае, когда *бесконечному множеству* точек дискриминантной кривой отвечает *одно и то же* значение a, совместно с ними удовлетворяющее уравнениям (9) *).

Все сказанное всего лучше выяснится на примерах.

239. Примеры. 1) Найти огибающую для семейства окружностей

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \text{const})$$

(рис. 141).

Дифференцируем по a: $-2(x-a) = 0$. Исключая a, получим $y^2 - r^2 = 0$ или $y = \pm r$: *две прямые*, параллельные оси x, которые, очевидно, составляют огибающую **).

---

*) Если оперировать непосредственно уравнениями (9), то такая возможность исключается, потому что уравнения пытаются решить при заведомо переменном a.

**) Если уравнение семейства взять в виде

$$x - a \pm \sqrt{r^2 - y^2} = 0,$$

то результат дифференцирования по a будет $-1 = 0$; из невозможности этого равенства, казалось бы, вытекает заключение об отсутствии огибающей. Такое заключение, однако, было бы неверно, так как вся изложенная теория предполагает существование и непрерывность частных производных от левой части уравнения семейства, а здесь (именно при $y = \pm r$) конечной производной по y нет.

2) Найти огибающую различных положений прямой, скользящей двумя точками, находящимися друг от друга на постоянном расстоянии a, по осям координат (рис. 142).

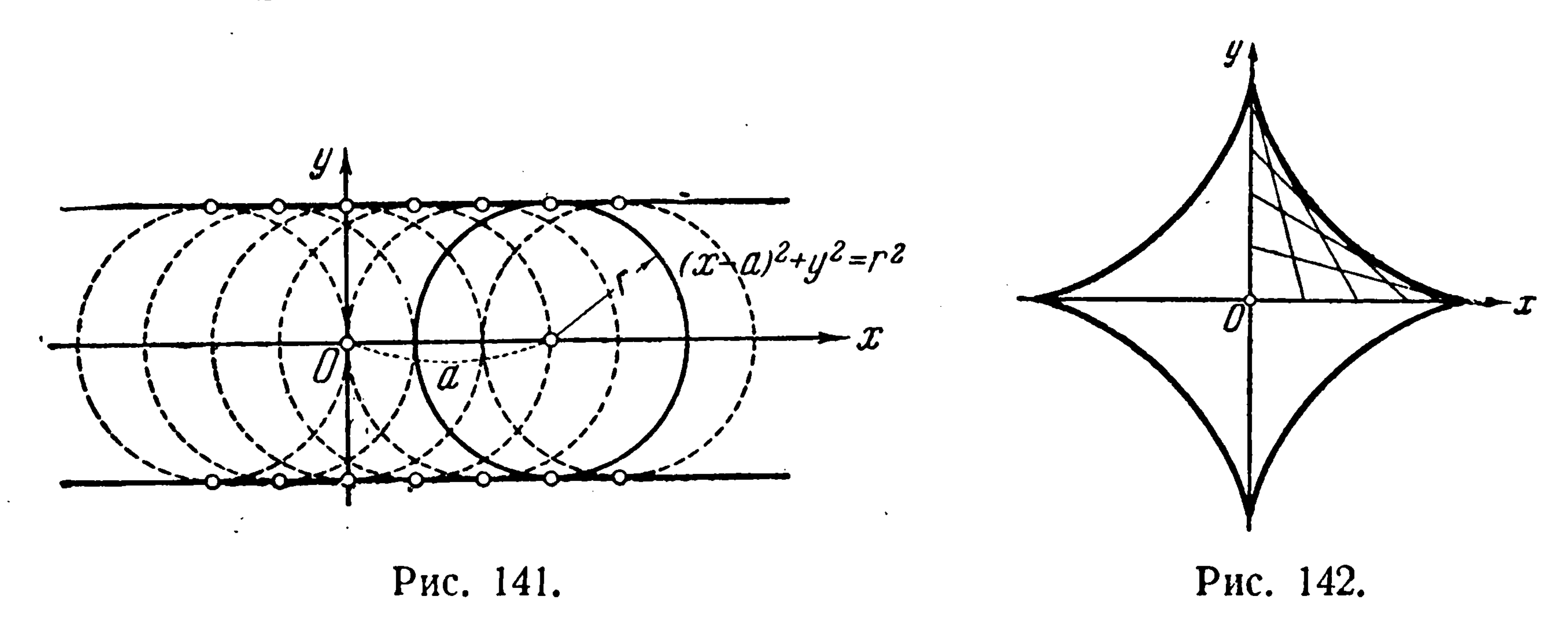


Рис. 141. Рис. 142.

Взяв за параметр угол θ, составленный перпендикуляром к движущейся прямой с осью x, уравнение прямой можно написать в виде

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=a.$$

Дифференцируем по θ

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}.$$

Иначе это можно написать так:

$$\frac{\dfrac{x}{\sin\theta}}{\sin^2\theta}=\frac{\dfrac{y}{\cos\theta}}{\cos^2\theta}=\frac{\dfrac{x}{\sin\theta}+\dfrac{y}{\cos\theta}}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=a,$$

откуда $x=a\sin^3\theta$, $y=a\cos^3\theta$.

Читатель узнает в этих уравнениях параметрическое представление астроиды [224, 4): $t=\frac{\pi}{2}-\theta$], которая в данном случае и является огибающей.

С этим свойством астроиды мы уже однажды сталкивались [231, 3)].

3) Во многих случаях огибающая как бы ограничивает («огибает») часть плоскости, занятую кривыми семейства. Что это не всегда так, показывает пример:

$$y=(x-a)^3$$

(рис. 143).

Здесь огибающей служит ось x, пересекающая все кривые семейства. Аналогичное обстоятельство проявляется и в следующем, более сложном примере.

4) Найти огибающую семейства $y=a^2(x-a)^2$ (параболы).

Сопоставляя это уравнение с уравнением

$$2a(x-a)^2-2a^2(x-a)=2a(x-a)(x-2a)=0,$$

получим либо $x=a\ (y=0)$, либо $x=2a\ (y=a^4)$, так что дискриминантная кривая состоит из прямой $y=0$ и кривой $16y=x^4$. Первая касается всех

парабол в вершинах. Вторая имеет с каждой параболой три общие точки: касается ее при $x=2a$ и пересекает при $x=-2a\pm 2a\sqrt{2}$.

5) Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Станем искать огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах эллипса, параллельных оси y (рис. 144).

Рис. 143.

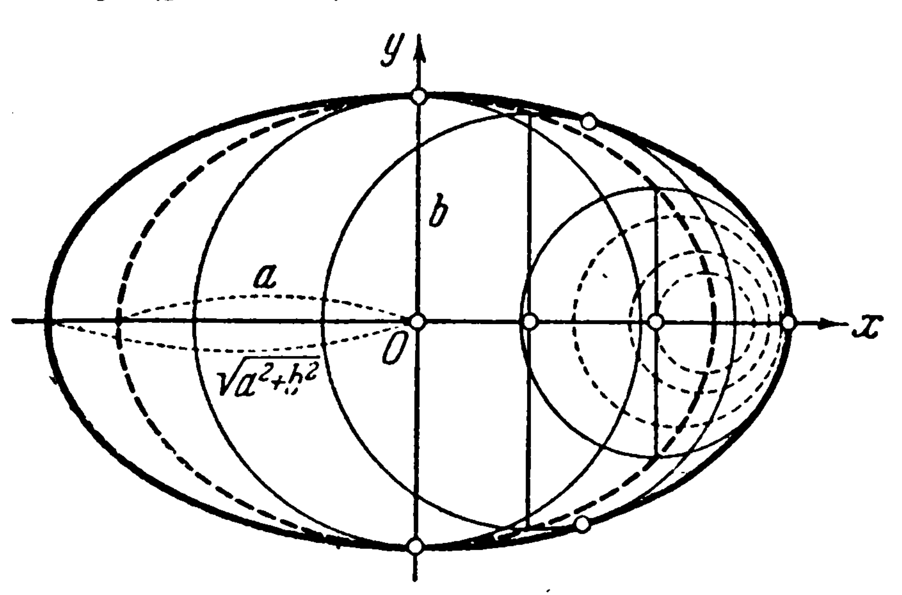


Рис. 144.

Приняв за параметр абсциссу t центра окружности, напишем уравнение этого семейства в виде:

$$F(x, y, t)=(x-t)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-t^2)=0,$$

причем t изменяется в промежутке $[-a, a]$. Имеем

$$F_t'=-2(x-t)+\frac{2b^2}{a^2}t=0, \text{ откуда } t=\frac{a^2}{a^2+b^2}x.$$

Подставив это значение t в уравнение $F=0$, мы получим уравнение огибающей в следующем виде:

$$\left(x-\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)+y^2-\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\frac{a^4x^2}{(a^2+b^2)^2}\right)=0$$

или, после преобразований:

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Мы пришли к эллипсу с теми же осями симметрии, что и данный.

Любопытно отметить, что этот эллипс касается не всех окружностей семейства. Это обстоятельство легко усмотреть, если не исключать t из уравнений $F=0$ и $F_t'=0$, а выразить из них x и y через t:

$$x=\frac{a^2+b^2}{a^2}t, \quad y=\pm\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2+b^2)t^2}.$$

Действительно, отсюда сразу видно, что выражение для y может быть вещественным лишь при $|t|\leqslant\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значит, только для части семейства окружностей, соответствующей указанным значениям t, существует огибающая.

Этот поучительный пример показывает, что параметрическое задание огибающей может оказаться более выгодным, потому что из него легче усмотреть, для какой части данного семейства огибающая действительно существует.

6) Для семейства концентрических окружностей

$$x^2+y^2=a\ (a\geqslant 0)$$

огибающей нет: дифференцирование по a сразу приводит к невозможному равенству $0=1$.

7) Рассмотрим два семейства полукубических парабол

$$\text{(а)}\ (y-a)^2-x^3=0$$

и

$$\text{(б)}\ y^2-(x-a)^3=0$$

(рис. 145). Дискриминантная кривая будет

$$\text{(а)}\ x=0,\quad \text{(б)}\ y=0,$$

и в обоих случаях является носительницей особых точек. Но в случае (б) она все же одновременно будет огибающей; в случае (а) огибающей нет.

8) Более сложный пример такого же типа дает другое семейство полукубических парабол:

$$(y-a)^2-(x-a)^3=0$$

(рис. 146). Здесь дискриминантная кривая распадается на две прямые: $y=x$ и

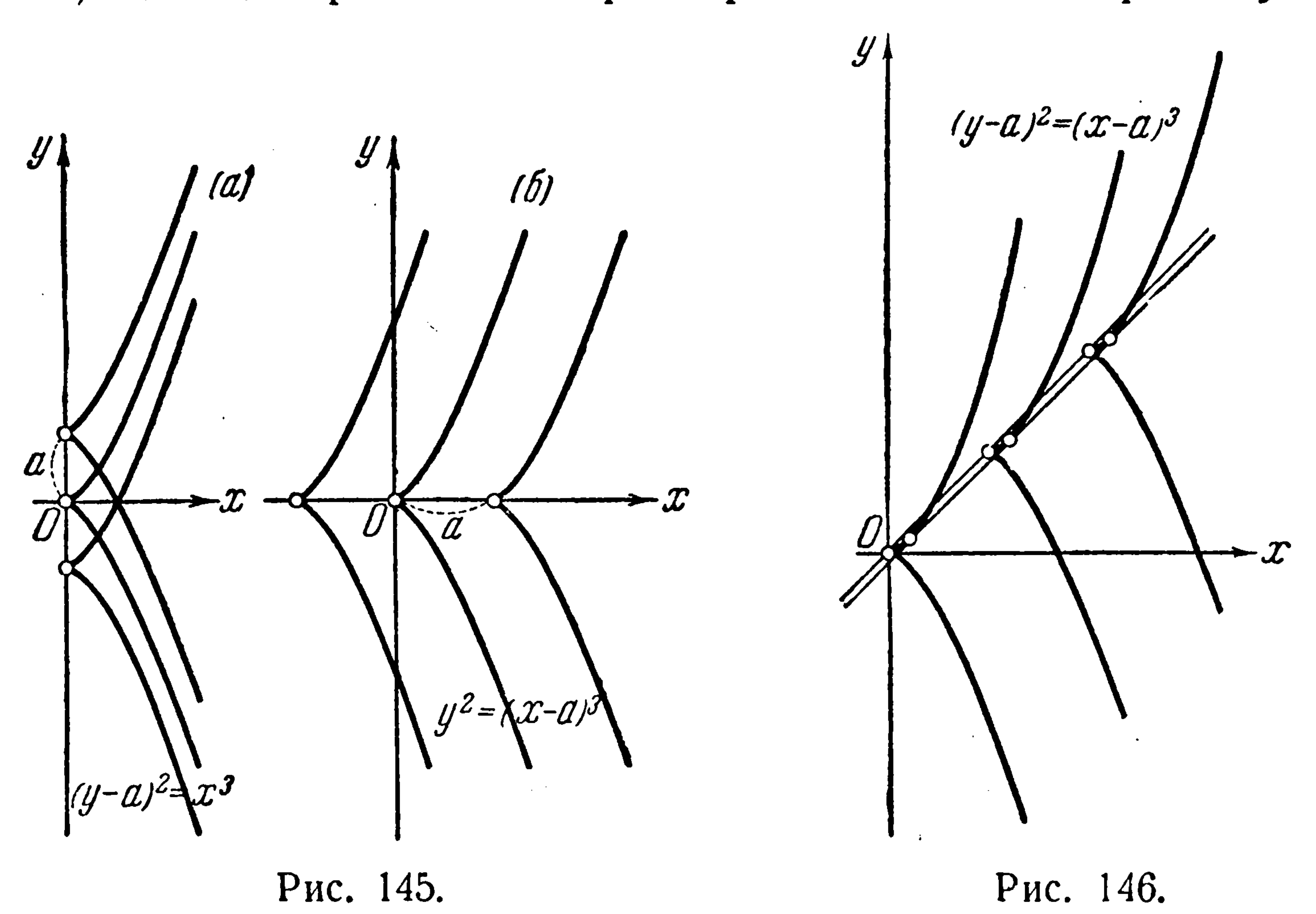


Рис. 145. Рис. 146.

$y=x-\frac{4}{27}$. Первая является лишь геометрическим местом особых точек, а вторая будет огибающей.

9) Наконец, рассмотрим семейство прямых

$$4(1+t)\,x=t^2y.$$

Если продифференцировать по t: $4x=2ty$ и исключить t из обоих уравнений, то получим, как результат исключения:

$$x\,(x+y)=0.$$

Это уравнение представляет две прямые: $x=0$ и $y=-x$, которые входят в состав данного пучка (при $t=0$ и $t=-2$). Ни одна из них не является ни огибающей, ни носительницей особых точек. Огибающей в этом случае нет.

Этот пример иллюстрирует указанную нами ранее возможность того, что уравнение (10) представит не огибающую, а одну или несколько кривых семейства. Если бы мы, не исключая t, попытались выразить x и y через t при переменном t, то это оказалось бы невозможным.

240. Характеристические точки. С понятием огибающей тесно связано другое интересное геометрическое понятие — характеристических точек.

Возьмем одну из кривых семейства

$$F(x, y, a)=0,$$

определяемую значением a параметра. Придадим a некоторое приращение Δa; значению $a+\Delta a$ параметра будет отвечать другая кривая семейства

$$F(x, y, a+\Delta a)=0,$$

«близкая» к первой.

Может случиться, что при достаточно малом Δa обе кривые пересекаются в одной или в нескольких точках. При стремлении

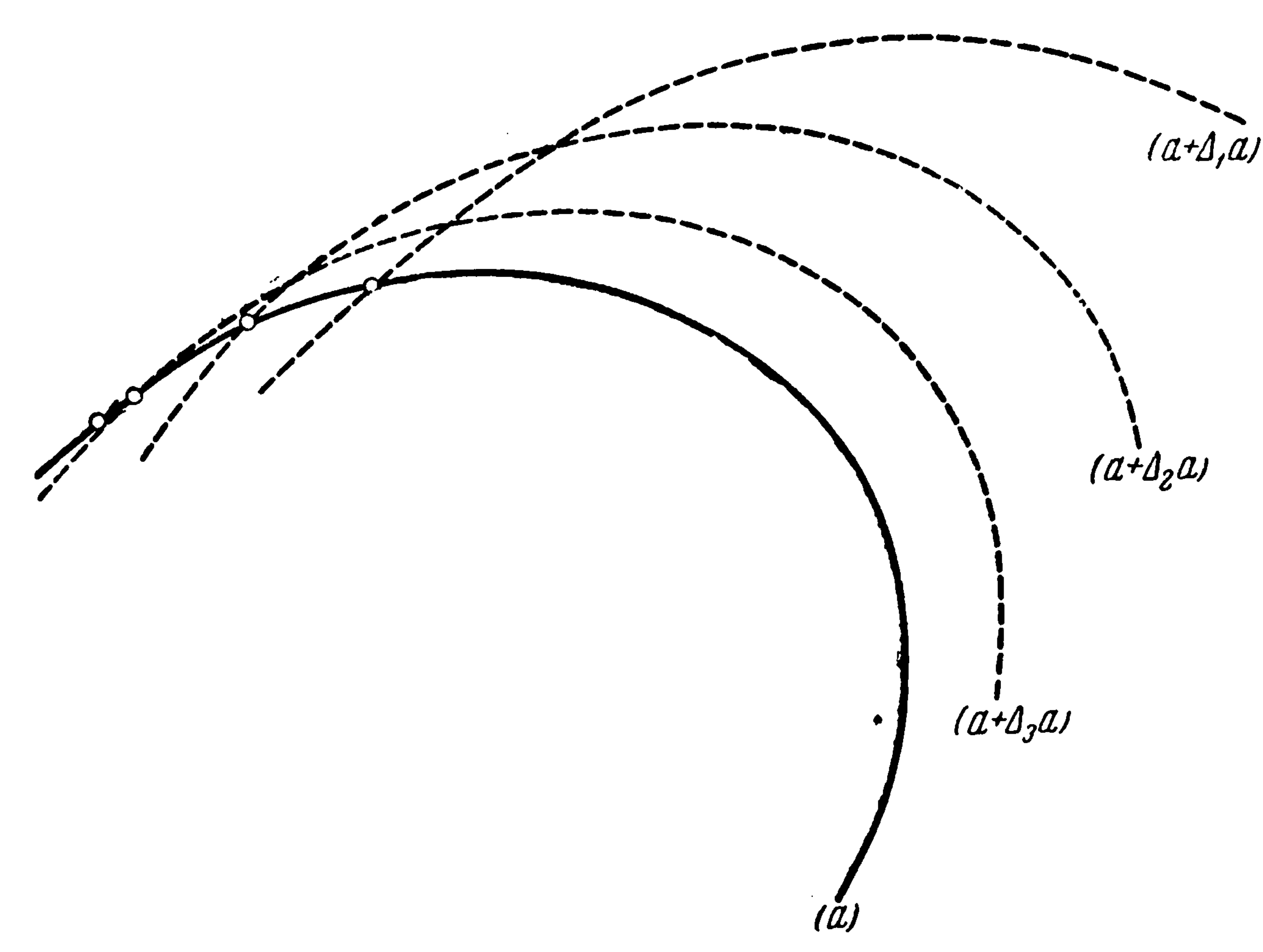


Рис. 147.

Δa к нулю эти точки пересечения будут каким-то образом перемещаться по первой кривой. Если при этом какая-либо из точек пересечения стремится к определенному предельному положению, то эту предельную точку называют характеристической точкой на исходной кривой (рис. 147). [Обращаем внимание читателя на то, что характеристическая точка связана не только с той кривой,

на которой лежит, но и со всем семейством. Говорить о характеристической точке для отдельно заданной кривой было бы лишено смысла.]

Точка пересечения упомянутых выше кривых должна удовлетворять системе уравнений

$$F(x, y, a)=0, \quad F(x, y, a+\Delta a)=0$$

или равносильной ей системе

$$F(x, y, a)=0, \quad \frac{F(x, y, a+\Delta a)-F(x, y, a)}{\Delta a}=0. \tag{11}$$

Устремив здесь Δa к нулю, мы придем к уже знакомой нам системе (9):

$$F(x, y, a)=0, \quad F'_a(x, y, a)=0,$$

которой, таким образом, при заданном a, и должны удовлетворять координаты характеристической точки.

Точнее говоря, если сохранить за x и y значения координат точки пересечения, то вместо (11) (применяя формулу Лагранжа) можно написать:

$$F(x, y, a)=0, \quad F'_a(x, y, a+\theta\Delta a)=0 \quad (0<\theta<1).$$

Если при $\Delta a \to 0$ координаты x, y имеют соответственно пределы $\bar{x}$, $\bar{y}$, то, переходя в написанных равенствах к пределу, ввиду непрерывности функций F и F'_a, легко убедиться в том, что координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ характеристической точки, действительно, удовлетворяют системе уравнений (9).

Допустим теперь, что характеристические точки существуют на каждой кривой семейства. Тогда можно поставить вопрос о *геометрическом месте характеристических точек*. Если это место представляет собой кривую вида (2), то функции $\varphi(a)$, $\psi(a)$, фигурирующие в ее уравнениях, должны удовлетворять системе (9), а значит — получаться в числе решений этой системы относительно x, y. Точно так же все точки упомянутого геометрического места удовлетворяют и уравнению (10), т. е. это место необходимо входит в состав *дискриминантной кривой*.

Из сказанного ясно, что геометрическое место характеристических точек, если существует, представляет собой (полностью или по частям) либо огибающую, либо носительницу особых точек.

Легко убедиться в том, что в примерах 1), 2), 4), 5) предыдущего n° геометрическое место характеристических точек совпадает с огибающей. Это в некотором смысле, — общий случай. Но вот в примере 7) (а) это геометрическое место служит лишь носительницей особых точек, а в примерах 3) и 7) (б) вовсе нет пересечения между кривыми (хотя огибающая существует).

241. Порядок касания двух кривых. Рассмотрим две кривые, касающиеся в точке M_0.

Если кривые заданы явными уравнениями $y=f(x)$ и $Y=g(x)$, и M_0 имеет абсциссу x_0, то совпадение ординат и угловых коэффициентов касательных может быть записано так:

$$f(x_0)=g(x_0), \quad f'(x_0)=g'(x_0).$$

Для характеристики близости рассматриваемых кривых в окрестности точки M_0 возьмем точки M и m на этих кривых (рис. 148) с абсциссой x и установим порядок бесконечно малого отрезка

$$mM=Y-y=$$
$$=g(x)-f(x)=\varphi(x)$$

относительно основной бесконечно малой $x-x_0$. *Если этот порядок равен $n+1$ (или больше, чем $n+1$), то говорят, что кривые в точке M_0 имеют порядок касания n (или выше, чем n).*

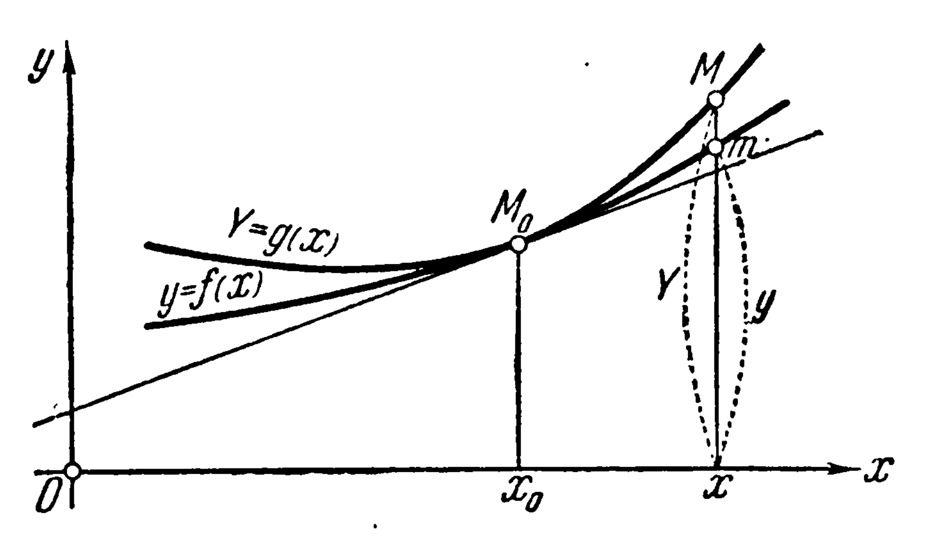


Рис. 148.

Мы видели, что при наличии касания всегда

$$\varphi(x_0)=g(x_0)-f(x_0)=0, \quad \varphi'(x_0)=g'(x_0)-f'(x_0)=0.$$

Пусть в точке x_0 для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно, причем

$$f''(x_0)=g''(x_0), \ \ldots, \ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0),$$

так что

$$\varphi''(x_0)=g''(x_0)-f''(x_0)=0, \ \ldots, \ \varphi^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)=0.$$

О величине производных $f^{(n+1)}(x_0)$ и $g^{(n+1)}(x_0)$ пока никаких предположений не делаем. Применяя к функции $\varphi(x)$ формулу Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано [**124** (10а)]:

$$mM=Y-y=\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)+\alpha}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{12}$$

видим, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{mM}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}=\frac{g^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}.$$

Таким образом, если $f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$, то кривые имеют касание n-го порядка, если же $f^{(n+1)}(x_0)=g^{(n+1)}(x_0)$, то порядок касания будет выше n. Отсюда (в предположении существования всех упоминаемых производных) следует:

Для того чтобы в точке с абсциссой x_0 кривые $y=f(x)$ и $Y=g(x)$ имели касание n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f(x_0)=g(x_0),\ f'(x_0)=g'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0), \tag{13}$$

$$f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0). \tag{14}$$

[Если последнее неравенство не установлено, то можно лишь утверждать, что порядок касания не ниже n].

Для случая, когда порядок касания точно равен n, из (12) непосредственно вытекает, что при n четном кривые, касаясь в точке M_0, взаимно пересекают одна другую, при n же нечетном этого нет.

Замечание. В свете выведенных условий мы вернемся вновь к самому определению порядка касания. Это определение кажущимся образом связано с выбором координатной системы. На деле же *порядок касания двух кривых от этого выбора не зависит* (лишь бы только ось y не была параллельна общей касательной), так что установленное понятие является действительно геометрическим.

Если повернуть координатную систему на произвольный угол α, то новые координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ выразятся через старые x, y с помощью известных формул преобразования:

$$\bar{x}=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad \bar{y}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Пусть в старой системе координат дана кривая $y=f(x)$; если в предыдущих уравнениях под y разуметь именно эту функцию, то они дадут параметрическое представление кривой в новой системе, с x в роли параметра. Очевидно, производные

$$\frac{d\bar{x}}{dx}=\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha,\quad \frac{d\bar{y}}{dx}=-\sin\alpha+\frac{dy}{dx}\cos\alpha$$

одновременно в 0 обратиться не могут, так что в новом представлении ни одна точка не будет особой, а тогда ясно, что первая из этих производных — не 0 в интересующей нас точке (ибо иначе касательная к кривой в этой точке была бы параллельна оси $\bar{y}$!). Следовательно, в ее окрестности кривая выразится и в новой системе явным уравнением $\bar{y}=\bar{f}(\bar{x})$.

Теперь легко видеть, что [ср. **121**]

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{-\sin\alpha+\dfrac{dy}{dx}\cos\alpha}{\cos\alpha+\dfrac{dy}{dx}\sin\alpha},\quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\cos\alpha+\dfrac{dy}{dx}\sin\alpha\right)^3},$$

и вообще

$$\frac{d^k\bar{y}}{d\bar{x}^k}=R_k\left(\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ky}{dx^k}\right),$$

где R_k есть знак рациональной функции. Отсюда ясно, что как только для двух функций y от x выполняются равенства (13), то для двух соответствующих функций $\bar{y}$ от $\bar{x}$ выполняются аналогичные равенства. Точно так же — при наличии (13) — из неравенства (14) вытекает такое же неравенство для новых функций, ибо — в противном случае — обратное преобразование привело бы нас, взамен неравенства (14), тоже к равенству.

Этим и завершается доказательство высказанного утверждения.

242. Случай неявного задания одной из кривых. Рассмотрим теперь случай, когда вторая кривая задана неявным уравнением

$$G(x, y) = 0. \tag{15}$$

Пусть рассматриваемая точка $M_0(x_0, y_0)$ не является для этой кривой особой, а именно пусть $G'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда в окрестности этой точки уравнение (15) определяет однозначную функцию $y = g(x)$, и для установления порядка касания могут быть использованы уже известные условия (13) [и (14)].

Но так как явного выражения функции $g(x)$ в этом случае мы не имеем, то было бы удобнее выразить эти условия в такой форме, которая использовала бы лишь данную функцию G.

С этой целью вспоминаем, что значения функции $g(x)$ и ее производных $g'(x)$, $g''(x)$, ..., $g^{(n)}(x)$ последовательно и притом однозначно определяются уравнением (15) и теми уравнениями, которые получаются из него дифференцированием по x, если под y разуметь $g(x)$ [**209**]:

$$G(x, \underline{g(x)}) = 0, \quad G'_x(x, g(x)) + G'_y(x, g(x))\underline{g'(x)} = 0,$$
$$G''_{x^2} + 2G''_{xy}g'(x) + G''_{y^2}[g'(x)]^2 + G'_y\underline{g''(x)} = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G^{(n)}_{x^n} + \ldots + G'_y\underline{g^{(n)}(x)} = 0\ ^{*)}.$$

Поэтому, если (при $x = x_0$) в этих равенствах везде вместо $g(x_0)$, $g'(x_0)$, ..., $g^{(n)}(x_0)$ подставить, соответственно, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$, то получатся условия

$$G(x_0, \underline{f(x_0)}) = 0, \quad G'_x(x_0, f(x_0)) + G'_y(x_0, f(x_0))\underline{f'(x_0)} = 0,$$
$$G''_{x^2} + 2G''_{xy}f'(x_0) + G''_{y^2}[f'(x_0)]^2 + G'_y\underline{f''(x_0)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G^{(n)}_{x^n} + \ldots + G'_y\underline{f^{(n)}(x_0)} = 0,$$

которые совершенно равносильны условиям (13).

*) В каждом уравнении подчеркнута та именно величина, которая из него однозначно определяется, если уже определены предшествующие ей величины. Это относится и к приводимой ниже системе уравнений.

Для того чтобы представить их в более обозримой форме, введем обозначение

$$\Phi(x) = G(x, f(x)). \tag{16}$$

Тогда условия эти перепишутся так:

$$\Phi(x_0) = 0, \quad \Phi'(x_0) = 0, \ \ldots, \ \Phi^{(n)}(x_0) = 0. \tag{17}$$

Итак, *при соблюдении условий* (17) *(в точке с абсциссой x_0) кривая* (15) *будет иметь с кривой $y = f(x)$ касание порядка не ниже n.* Нетрудно сообразить, что этот *порядок точно n, если сверх того*

$$\Phi^{(n+1)}(x_0) \neq 0. \tag{18}$$

243. Соприкасающаяся кривая. Предположим теперь, что вместо кривой (15) нам дано семейство кривых с $n+1$ параметрами

$$G(x, y, \overbrace{a, b, \ldots, l}^{n+1}) = 0. \tag{19}$$

Теперь естественно поставить вопрос, можно ли, распоряжаясь значениями параметров, выбрать из этого семейства такую кривую, которая с данной кривой $y = f(x)$ в определенной ее точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имела бы наивысший возможный (для данного семейства) порядок касания.

Подобная кривая и носит название соприкасающейся к данной кривой в точке M_0. [Точнее было бы сказать: соприкасающейся кривой из такого-то семейства, ибо для отдельно взятой кривой (15) этот термин не имеет смысла].

Для разыскания соприкасающейся кривой введем обозначение, аналогичное (16):

$$\Phi(x, a, b, \ldots, l) = G(x, f(x), a, b, \ldots, l),$$

и напишем ряд условий, вроде (17):

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x_0, a, b, \ldots, l) = 0 \quad \Phi'_x(x_0, a, b, \ldots, l) = 0, \ \ldots \\ \qquad\qquad \ldots, \ \Phi^{(n)}_{x^n}(x_0, a, b, \ldots, l) = 0. \end{array} \right\} \tag{20}$$

Мы имеем здесь систему из $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $a, b, \ldots, l$. Обычно эта система однозначно определяет систему значений параметров, и таким путем находится соприкасающаяся кривая, имеющая порядок касания не ниже n.

При этом обычно оказывается, что

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0, a, b, \ldots, l) \neq 0,$$

так что порядок точно равен n. Такое положение вещей (при $n+1$ параметрах) считается нормальным.

В тех же исключительных точках, где дополнительно выполняется и равенство

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{(n+1)}}(x_0, a, b, \ldots, l) = 0, \tag{21}$$

говорят о пересоприкасании. Эти точки можно найти, если равенства (20) и (21) вместе рассматривать как систему из $n+2$ уравнений с $n+2$ неизвестными x_0, a, b, ..., l.

Примеры. 1) *Соприкасающаяся прямая.* Семейство прямых выражается уравнением

$$y = ax + b$$

с двумя параметрами. Поэтому наибольший порядок касания, который удается установить в общем случае, будет первый.

Здесь имеем:

$$\Phi(x, a, b) = y - ax - b, \quad \Phi'_x(x, a, b) = y' - a,$$
$$\Phi''_{x^2}(x, a, b) = y'',$$

если под y разуметь $f(x)$. Отмечая нуликами значения y, y', y'', отвечающие выбранному значению $x = x_0$, для определения параметров a и b получим уравнения

$$y_0 - ax_0 - b = 0, \qquad y'_0 - a = 0.$$

Отсюда $a = y'_0$ и $b = y_0 - y'_0 x_0$. Подставляя эти значения в уравнение прямой, придем к уравнению

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0),$$

в котором читатель без труда узнает уравнение касательной.

Итак, соприкасающейся прямой является касательная. Порядок касания, вообще говоря, как указывалось, будет первый. Он повышается в тех отдельных точках, где выполняется дополнительное условие $y''_0 = 0$ (например, в точках перегиба).

2) *Соприкасающийся круг* *). Семейство окружностей выражается уравнением

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

с тремя параметрами ξ, η, и R. Наивысший порядок касания вообще будет второй.

Так как здесь, если снова под y разуметь $f(x)$,

$$\Phi(x, \xi, \eta, R) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2,$$
$$\frac{1}{2}\Phi'_x(x, \xi, \eta, R) = x - \xi + (y - \eta)y',$$
$$\frac{1}{2}\Phi''_{x^2}(x, \xi, \eta, R) = 1 + y'^2 + (y - \eta)y'',$$

то параметры определяются из уравнений

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 = R^2,$$
$$x_0 - \xi + (y_0 - \eta)y'_0 = 0,$$
$$1 + y_0'^2 + (y_0 - \eta)y''_0 = 0.$$

Из двух последних (в предположении, что $y''_0 \neq 0$) находим координаты центра:

$$\xi = x_0 - y'_0 \frac{1 + y_0'^2}{y''_0}, \quad \eta = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y''_0}, \tag{22}$$

---

*) В этом контексте слово круг привычным образом употребляется в смысле окружность.

а тогда из первого получится радиус

$$R=\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}. \tag{23}$$

По этим элементам и устанавливается соприкасающийся круг.

По сказанному в п° **241**, как правило, касательная не пересекает кривой, а соприкасающийся круг, наоборот, пересекает ее. Исключение может представиться лишь в точках, где порядок касания повышается против нормального.

244. Другой подход к соприкасающимся кривым. Пусть даны кривая $y=f(x)$ и семейство кривых (19) с $n+1$ параметрами. Возьмем на кривой произвольные $n+1$ точек с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Для того чтобы кривая семейства через эти точки проходила, должны выполняться $n+1$ условий:

$$\Phi(x_1, a, b, \ldots, l)=0, \quad \Phi(x_2, a, b, \ldots, l)=0, \ldots$$
$$\ldots, \Phi(x_{n+1}, a, b, \ldots, l)=0.$$

Обычно отсюда значения параметров определяются однозначно; обозначим их через $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}$.

Предположим теперь, что когда взятые $n+1$ точек по произвольному закону стремятся к некоторой определенной точке кривой с абсциссой x_0, то и значения параметров $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}$ стремятся к определенным пределам $a, b, \ldots, l$. Можно считать, что проходящая через упомянутые точки кривая семейства, перемещаясь или деформируясь, стремится к предельной кривой.

Для того чтобы ее найти, станем рассуждать так. Функция от x

$$\Phi(x, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})$$

обращается в 0 для $n+1$ значений x: $x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}$. Тогда, по теореме Ролля [**111**], первая производная обратится в 0 для n значений $x_1'<x_2'<\ldots<x_n'$, вторая — для $n-1$ значений: $x_1''<x_2''<\ldots<x_{n-1}''$, ..., $(n-1)$-я — для двух значений: $x_1^{(n-1)}<x_2^{(n-1)}$ и, наконец, n-я — для некоторого значения $x_1^{(n)}$; при этом все упомянутые значения лежат между x_1 и x_{n+1}.

Таким образом, имеет место $n+1$ равенств:

$$\Phi(x_1, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})=0 \quad \Phi_x'(x_1', \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})=0,$$
$$\Phi_{x^2}''(x_1'', \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})=0, \ldots, \Phi_{x^n}^{(n)}(x_1^{(n)}, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})=0.$$

Если теперь одновременно $x_1 \to x_0, x_2 \to x_0, \ldots, x_{n+1} \to x_0$, то $\tilde{a} \to a$, $\tilde{b} \to b, \ldots, \tilde{l} \to l$ и, очевидно, также $x_1' \to x_0, x_1'' \to x_0, \ldots, x_1^{(n)} \to x_0$. Переходя к пределу в написанных выше равенствах, мы вернемся к уже знакомой нам системе (20), определявшей соприкасающуюся кривую.

Итак, *если существует предельное положение для кривой семейства, проходящей через $n+1$ точек данной кривой, то эта предельная кривая и будет соприкасающейся.*

В связи с этим иногда говорят (не слишком строго, но образно), что соприкасающаяся кривая — из семейства с $n+1$ параметрами — есть «кривая, проходящая через $n+1$ бесконечно близких точек» данной кривой. В частности, касательная проходит через две бесконечно близкие точки кривой, а соприкасающийся круг — через три.

§ 4. Длина плоской кривой *)

245. Леммы. Рассмотрим (незамкнутую или замкнутую) плоскую кривую $\widehat{AB}$, заданную параметрически уравнениями:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

где функции φ и ψ здесь пока предполагаются лишь непрерывными. Пусть кратных точек на кривой нет, так что каждая точка получается лишь при одном значении параметра t (за исключением — если кривая замкнута — совпадающих концов кривой **)). При этих предположениях кривую будем называть *непрерывной простой кривой.*

Имея в виду установить для такой кривой понятие длины, мы начнем с некоторых вспомогательных предложений. Пусть $t_0 \leqslant t' < t'' \leqslant T$, и значениям параметра t' и t'' отвечают точки M' и M''.

Лемма 1. Для любого $\delta>0$ найдется такое $\eta>0$, что при $t''-t'<\eta$ длина хорды $\overline{M'M''}<\delta$.

Действительно, ввиду (равномерной) непрерывности функций φ и ψ из (1), по δ найдется такое $\eta>0$, что при $|t''-t'|<\eta$ будет одновременно

$$|\varphi(t'')-\varphi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\psi(t'')-\psi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

а тем самым

$$\overline{M'M''}=\sqrt{[\varphi(t'')-\varphi(t')]^2+[\psi(t'')-\psi(t')]^2}<\delta.$$

Имеет место также

Лемма 2. В случае незамкнутой кривой для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что лишь только длина хорды $\overline{M'M''}>\delta$, тотчас же разность $t''-t'$ значений параметра, соответствующих ее концам, будет $<\varepsilon$.

---

*) Хотя этот вопрос по существу относится к интегральному исчислению, но мы в некоторой части начинаем его изложение уже здесь, так как в следующем § нам понадобятся и понятие длины дуги кривой и его свойства. Самое вычисление длины дуги кривой мы откладываем до второго тома.

**) См. сноску на стр. 505.

Допустим противное; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$, при любом $\delta > 0$, найдутся такие две точки $M'(t')$ и $M''(t'')$, что $\overline{M'M''} < \delta$ и в то же время $t'' - t' \geqslant \varepsilon$. Взяв последовательность $\{\delta_n\}$, сходящуюся к 0, и полагая поочередно $\delta = \delta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, придем к двум последовательностям точек $\{M'_n(t'_n)\}$ и $\{M''_n(t''_n)\}$, для которых

$$\overline{M'_nM''_n} < \delta_n, \text{ но } t''_n - t'_n \geqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

По лемме Больцано—Вейерштрасса [41], без умаления общности, можно предположить, что при этом

$$t'_n \to t^*, \quad t''_n \to t^{**}$$

(этого легко добиться, переходя — в случае надобности — к частичным последовательностям). Очевидно,

$$t^{**} - t^* \geqslant \varepsilon,$$

так что $t^* \neq t^{**}$. В то же время для соответствующих точек M^* и M^{**} имеем $\overline{M^*M^{**}} = 0$, т. е. эти точки должны совпасть, что невозможно, так как кривая не имеет кратных точек и не замкнута. Полученное противоречие завершает доказательство.

Для замкнутой кривой утверждение леммы оказывается неверным: хорда $M'M''$ может быть сколь угодно малой и при достаточной близости t' к t_0, а t'' к T.

246. Направление на кривой. Будем считать, что точка A отвечает значению параметра $t = t_0$, а точка B — значению $t = T$, и называть A начальной, а B — конечной точкой кривой. Вообще, расположим точки M кривой по возрастанию параметра t, т. е. из двух отличных от A и B точек ту будем считать следующей, которая отвечает бо́льшему значению параметра. Таким образом определяется «направление на кривой». Однако, формально это определение поставлено в зависимость от частного параметрического представления (1). Покажем, что на деле понятие направления на кривой не зависит от конкретного способа задания кривой.

Начнем с более простого случая незамкнутой кривой.

Если незамкнутая кривая $\breve{AB}$, наряду с представлением (1), *имеет и представление* (*также без кратных точек*)

$$x = \varphi^*(u), \quad y = \psi^*(u), \qquad (1^*)$$
$$(u_0 \leqslant u \leqslant U)$$

где функции φ^* и ψ^* по-прежнему непрерывны, и значению $u = u_0$ отвечает точка A, а значению $u = U$ — точка B, то оба представления определяют на кривой одно и то же направление.

Каждому значению t отвечает некоторая точка кривой, которая в свою очередь однозначно определяет значение u; обратно, каждому u отвечает одно определенное значение t. Таким образом, u оказывается однозначной функцией от t: $u=\omega(t)$, которая к тому же при изменении t между t_0 и T — принимает каждое свое значение лишь однажды. В частности, $\omega(t_0)=u_0$ и $\omega(T)=U$.

По лемме 1, двум достаточно близким значениям t отвечают сколь угодно близкие точки кривой, а тогда — по лемме 2 — им отвечают и сколь угодно близкие значения u, т. е. функция $u=$ $=\omega(t)$ оказывается непрерывной.

Отсюда можно заключить, что эта функция будет монотонно возрастающей (в узком смысле). Действительно, если бы при $t_0<t'<t''$ имели $u'=\omega(t')>u''=\omega(t'')>u_0=\omega(t_0)$, то — по известному свойству непрерывной функции [82] — между t_0 и t' нашлось бы значение t''', для которого $\omega(t''')=u''$, так что значение u'' принималось бы функцией $u=\omega(t)$ дважды (при $t=t''$ и $t=t'''$), вопреки тому, что было доказано выше.

Теперь, раз установлено, что $u=\omega(t)$ возрастает вместе с t, уже ясно, что расположение точек по возрастанию параметра t совершенно равносильно расположению их по возрастанию параметра u.

Это направление, которое можно было бы назвать *направлением на кривой от точки A к точке B*, оказывается, таким образом, вполне геометрическим понятием.

Аналогично, заменяя, скажем, t на $-t'$ и располагая точки по возрастанию параметра t', установим понятие о *направлении на кривой от точки B к точке A*; его очевидно, можно получить также, располагая точки по убыванию параметра t. Конечно, и это направление не зависит от частного выбора представления кривой.

Обратимся, наконец, к вопросу о направлении на замкнутой кривой. Возьмем на ней по произволу две (отличные от A) точки C и D, и пусть им соответствуют значения параметра $t=t_1$ и $t=t_2>t_1$, так что в том расположении, которое было выше установлено с помощью параметра t, точка D следует за C. Можно показать, что всякое направление на кривой, определенное любым параметрическим представлением, но сохраняющее этот порядок точек C и D, совпадает с прежним. Действительно, если значениям $t=t_0^*$ и $t=T^*$, где $t_0<t_0^*<t_1$ и $t_2<T^*<T$, отвечают точки A^* и B^*, то для (незамкнутой) дуги A^*B^* подобное заключение вытекает из предыдущего; но так как t_0^* может быть взято сколь угодно близко к t_0, а T^* — к T, то оно справедливо и для всей кривой.

Таким образом, можно говорить о *направлении от A через C и D к A*, как не зависящем от выбора параметрического представления кривой. Аналогично устанавливается понятие о *направлении от A через D и C к A*.

247. Длина кривой. Аддитивность длины дуги. Будем исходить из представления (1) кривой $\widehat{AB}$ и направления на ней, определяемого возрастанием параметра t. Возьмем на кривой ряд точек

$$A = M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_i,\ M_{i+1},\ \ldots,\ M_n = B, \tag{2}$$

так, чтобы *они шли в указанном направлении*, отвечая возрастающим значениям параметра

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n. \tag{3}$$

Соединяя эти точки последовательно прямолинейными отрезками (рис. 149), мы получим *ломаную* $M_0M_1 \ldots M_{n-1}M_n$, *вписанную в кривую* $\breve{AB}$. Напомним, что в предыдущем n° выяснена независимость понятия направления, а с ним и понятия *вписанной ломаной* — от частного выбора параметрического задания (1).

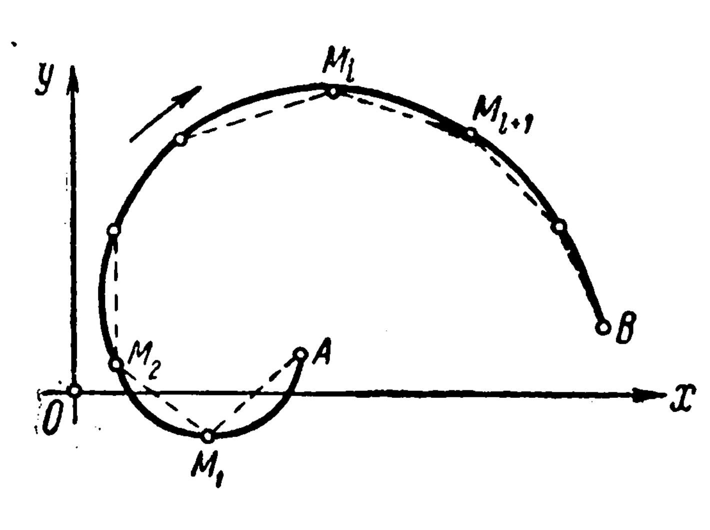


Рис. 149.

Длиной кривой $\breve{AB}$ называется точная верхняя граница S для множества периметров p всевозможных вписанных в кривую ломаных:

$$S = \sup\{p\}.$$

Если это число S конечно, то кривая называется спрямляемой *).

Из определения длины кривой следует, что *периметр любой вписанной в кривую $\breve{AB}$ ломаной не превосходит длины S кривой*: в частности, это относится и к длине хорды $\overline{AB}$, соединяющей начальную и конечную точки кривой.

Возьмем теперь на кривой $\breve{AB}$ точку C *между* A и B, так что она отвечает значению $t = \bar{t}$, промежуточному между t_0 и $T: t_0 < \bar{t} < T$.

Если кривая $\breve{AB}$ спрямляема, то спрямляемы порознь и дуги $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$. Обратно, из спрямляемости этих дуг вытекает спрямляемость всей кривой $\breve{AB}$. Обозначая длины дуг $\breve{AB}$, $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$, соответственно, через S, S' и S'', будем иметь при этом

$$S = S' + S''. \tag{4}$$

Для доказательства, предположим сначала спрямляемость кривой $\breve{AB}$ и впишем *произвольные* ломаные, с периметрами p' и p'', соот-

*) Обращаем внимание читателя на важность уточнения понятий *направления* на кривой и *вписанной ломаной*. Если бы точки M_i можно было брать где попало, то граница S *всегда* была бы $+\infty$.

ветственно в дуги $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$. Из этих ломаных, взятых вместе, составится ломаная, с периметром

$$p' + p'' = p,$$

вписанная в кривую $\breve{AB}$. Так как $p \leqslant S$, т. е.

$$p' + p'' \leqslant S, \tag{5}$$

то, очевидно, и порознь

$$p' \leqslant S \text{ и } p'' \leqslant S.$$

Таким образом, множества $\{p'\}$ и $\{p''\}$ ограничены сверху (S — конечно!), и дуги $\breve{AC}$, $\breve{CB}$ спрямляемы, ибо имеют конечные длины

$$S' = \sup\{p'\}, \quad S'' = \sup\{p''\}.$$

По свойству точных верхних границ [**11**] периметры p' и p'' — независимо один от другого — могут быть взяты сколь угодно близкими к своим границам S' и S''. Поэтому из (5) с помощью предельного перехода получаем:

$$S' + S'' \leqslant S. \tag{6}$$

Пусть теперь дано, что спрямляемы дуги $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$. Впишем произвольную ломаную, с периметром p, в кривую $\breve{AB}$. Если точка C входит в состав вершин ломаной, то последняя непосредственно распадается на две ломаные, с периметрами p' и p'', вписанные, соответственно, в дуги $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$. Если же C не оказалась вершиной взятой ломаной, то мы дополнительно введем эту точку в состав вершин, от чего периметр ломаной может лишь увеличиться (рис. 150); новая ломаная, как указано, распадется на две. Во всяком случае, имеем

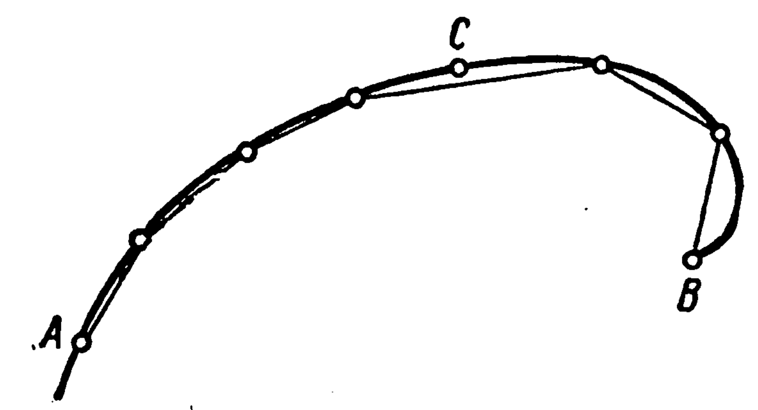


Рис. 150.

$$p \leqslant p' + p'' \leqslant S' + S''.$$

Множество $\{p\}$ ограничено сверху (S' и S'' конечны), и кривая $\breve{AB}$ спрямляема, причем ее длина

$$S = \sup\{p\} \leqslant S' + S''.$$

Наконец, из сопоставления этого неравенства с (6), приходим к требуемому равенству (4).

Таким образом, *введенное выше понятие длины дуги кривой обладает свойством аддитивности* [ср. **21**, 3)].

Доказанное предложение легко распространяется на случай любого числа частичных дуг.

248. Достаточные условия спрямляемости. Дифференциал дуги. До сих пор мы рассматривали общий случай непрерывной простой кривой (1). Желая дать удобные достаточные условия ее спрямляемости *) и изучить дальнейшие свойства длины дуги, мы вернемся к обычным в этой главе предположениям о существовании непрерывных производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Докажем, что *при сделанных предположениях кривая (1) спрямляема.*

Рассмотрим ломаную с вершинами в точках (2), определяемых значениями параметра (3). Координатами точки M_i будут

$$x_i = \varphi(t_i) \text{ и } y_i = \psi(t_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда периметр p ломаной запишется так:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Но по формуле конечных приращений [112]

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i),$$

$$y_{i+1} - y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) = \psi'(\bar{\tau}_i)(t_{i+1} - t_i),$$

$$(t_i < \tau_i, \; \tau_i < t_i + 1)$$

так что, окончательно,

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} \cdot (t_{i+1} - t_i). \tag{7}$$

Если через L и $\bar{L}$ обозначить, соответственно, наибольшие значения функций $|\varphi'(t)|$ и $|\psi'(t)|$ в промежутке $[t_0, T]$, то из (7) нетрудно получить оценку:

$$p \leqslant \sqrt{L^2 + \bar{L}^2} \cdot (T - t_0). \tag{8}$$

Множество $\{p\}$ оказывается ограниченным сверху, значит, кривая имеет конечную длину S, т. е. спрямляема, что и требовалось доказать.

Так как $S = \sup \{p\}$, то из (8) попутно получаем и оценку для S сверху:

$$S \leqslant \sqrt{L^2 + \bar{L}^2} \cdot (T - t_0) \tag{9}$$

которая нам сейчас понадобится. Впрочем, нам нужна будет и оценка снизу; если ввести наименьшие значения l и $\bar{l}$ функций $|\varphi'(t)|$ и $|\psi'(t)|$ в промежутке $[t_0, T]$, то из (7), аналогично (8), найдем, что

$$p \geqslant \sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot (T - t_0),$$

а тогда тем более

$$S \geqslant \sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot (T - t_0). \tag{9*}$$

---

*) Самые общие условия спрямляемости (необходимые и достаточные!) читатель найдет в третьем томе.

Если изменить t, а с ним вместе и положение точки $M(t)$ на кривой, то длина переменной дуги $\breve{AM}$ окажется функцией от параметра t; мы будем обозначать ее через

$$S = s(t).$$

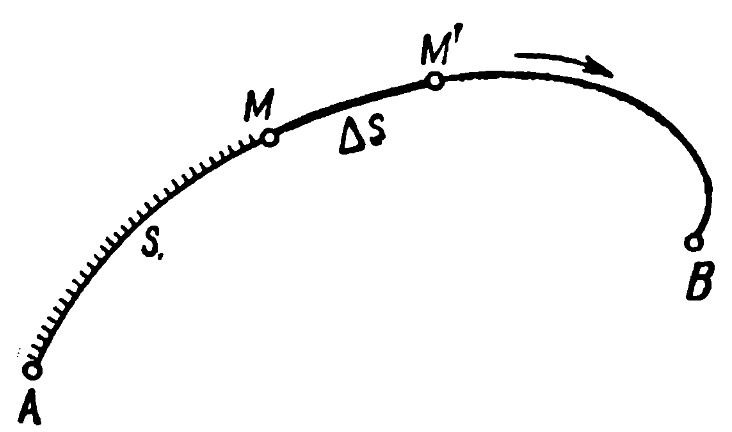


Рис. 151.

Придадим переменной t положительное приращение Δt: точка M переместится вдоль по кривой, по направлению к B, в положение M' (рис. 151). Величина S получит положительное же приращение Δs, равное длине дуги $\breve{MM'}$ (по аддитивности длины дуги, доказанной в предыдущем n°). Таким образом, функция $s(t)$ оказывается возрастающей.

Рассмотрим теперь, вместо промежутка $[t_0, T]$, промежуток $[t_0, t_0 + \Delta t]$ и применим к дуге $\breve{MM'}$, длины Δs, оценки (9) и (9*):

$$\sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot \Delta t \leqslant \Delta s \leqslant \sqrt{L^2 + \bar{L}^2} \cdot \Delta t,$$

но здесь под l и L ($\bar{l}$ и $\bar{L}$) мы вправе разуметь наименьшее и наибольшее значения функции $|\varphi'(t)|$ ($|\psi'(t)|$) уже в промежутке $[t, t + \Delta t]$. Отсюда

$$\sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant \sqrt{L^2 + \bar{L}^2}$$

и, так как — по непрерывности производных — при $\Delta t \to 0$ оба числа l и $L \to |\varphi'(t)|$, а оба числа $\bar{l}$ и $\bar{L} \to |\psi'(t)|$, то оба корня в предшествующем неравенстве стремятся к общему пределу

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}.$$

Следовательно, к тому же пределу стремится и отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; как легко видеть, это справедливо и для $\Delta t < 0$. Итак, имеем окончательно: *длина переменной дуги $s = s(t)$ оказывается дифференцируемой функцией от параметра t; ее производная по параметру выражается формулой:*

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

или, короче,

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}. \tag{10}$$

Если возвести это равенство в квадрат и умножить почленно на dt^2, то получим замечательную по простоте формулу

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{11}$$

которая к тому же обладает геометрической наглядностью. На рис. 152 в (криволинейном) прямоугольном треугольнике MNM_1, «катетами» служат приращения координат точки M: $MN = \Delta x$, $\overset{\frown}{NM_1} = \Delta y$, а «гипотенузой» — дуга $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$, которая является приращением дуги $\overset{\frown}{AM} = s$. Оказывается, что если не для самих приращений, то для их главных частей — дифференциалов — имеет место своеобразная «теорема Пифагора».

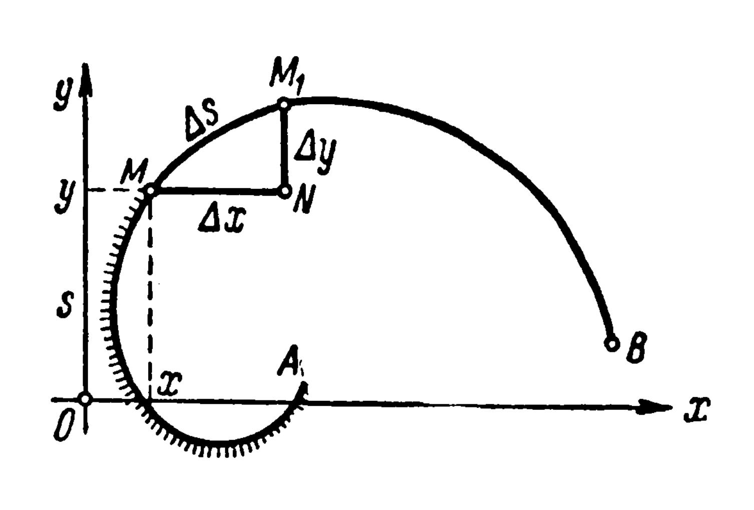


Рис. 152.

Полезно отметить частные случаи важной формулы (10), отвечающие различным частным типам задания кривой. Так, если кривая задана явным уравнением в декартовых координатах $y = f(x)$, то в роли «параметра» оказывается x, дуга s зависит от x: $s = s(x)$, и формула (10) принимает вид

$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2_x}. \tag{10a}$$

Если же кривая задана полярным уравнением $r = g(\theta)$, то это, как мы знаем, равносильно заданию ее параметрическими уравнениями

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta,$$

где параметром будет θ; дуга на этот раз будет функцией от θ: $s = s(\theta)$. Так как, очевидно,

$$x'_\theta = r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta,$$
$$y'_\theta = r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta,$$

то

$$x'^2_\theta + y'^2_\theta = r'^2_\theta + r^2,$$

и формула (10) преобразуется так:

$$s'_\theta = \sqrt{r'^2_\theta + r^2}. \tag{10б}$$

Часто представляется удобным взять в качестве начальной точки A для отсчета дуг не один из концов дуги, а какую-либо внутреннюю точку ее. В этом случае естественно дуги, откладываемые от нее в направлении возрастания параметра, считать положительными, а в другом — отрицательными и, соответственно этому, длину дуги в первом случае снабжать знаком плюс, а во втором — знаком минус. Вот эту величину s дуги со знаком мы для краткости будем называть просто дугой. Формулы (10), (11), (10а), (10б) имеют место во всех случаях.

[Заметим, что если положительное направление для отсчета дуг выбирать не в сторону возрастания периметра, как это делается

обычно, а в сторону его убывания, то в формулах (10), (10а), (10б) пришлось бы перед радикалом поставить знак минус.]

249. Дуга в роли параметра. Положительное направление касательной. Так как переменная дуга $s = s(t)$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией от параметра t, то и последний, в свою очередь, может быть рассматриваем как однозначная и непрерывная функция от s: $t = \omega(s)$, где s изменяется от 0 до длины S всей рассматриваемой кривой [**83**]. Подставляя это выражение t в уравнения (1), мы получим текущие координаты x и y выраженными в функции от s:

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s),$$
$$y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s).$$

Несомненно, дуга s, играющая роль «криволинейной абсциссы» точки M, является самым естественным параметром для определения ее положения.

Заметим, что начальная точка A для отсчета дуг может быть взята и не на одном из концов рассматриваемой дуги кривой; тогда, как это разъяснено выше, дуга s может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть точка M кривой — в представлении (1) — будет о б ы к н о в е н н о й, так что [см. (10)]

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} > 0;$$

тогда [**94**] для соответствующего значения s (и вблизи него) существует и непрерывная производная

$$t'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}},$$

а следовательно, существуют и непрерывные производные

$$x'_s = \Phi'(s), \quad y'_s = \Psi'(s).$$

Из основной формулы (11), считая, что все дифференциалы взяты, например, по s, получим,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \tag{12}$$

Таким образом, если точка M была обыкновенной в прежнем представлении (1) кривой, то она наверное будет обыкновенной и при переходе к параметру s. Формула (12), далее, позволяет установить следующее полезное утверждение:

Пусть M — о б ы к н о в е н н а я точка кривой. Если через M_1 обозначить переменную точку той же кривой, то при стремлении

M_1 к M отношение длины хорды MM_1 к длине дуги $\overset{\frown}{MM_1}$ будет стремиться к единице *):

$$\lim_{\overset{\frown}{MM_1} \to 0} \frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1. \tag{13}$$

Примем дугу за параметр, и пусть точка M отвечает значению s дуги, а точка M_1 — значению $s+\Delta s$. Их координаты пусть будут, соответственно, x, y и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$. Тогда

$$\overset{\frown}{MM_1} = |\Delta s|, \text{ а } MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

так что

$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta s|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

Переходя справа к пределу при $\Delta s \to 0$, в силу (12), получаем требуемый результат.

До сих пор мы определяли положение касательной к кривой в (обыкновенной) точке M — ее угловым коэффициентом $\operatorname{tg} \alpha$, не различая двух противоположных направлений на самой касательной: $\operatorname{tg} \alpha$ для обоих один и тот же. В некоторых исследованиях, однако, представляется необходимым фиксировать одно из этих направлений.

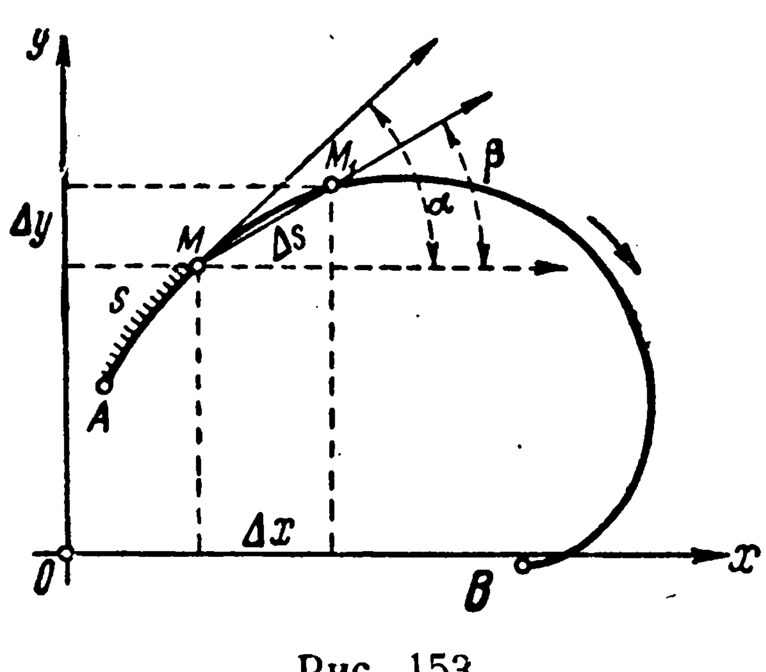


Рис. 153.

Представим себе, что на кривой выбраны начальная точка и определенное направление для отсчета дуг; возьмем именно дугу за параметр, определяющий положение точки на кривой.

Пусть точке M, о которой была речь, отвечает дуга s. Если придать s положительное приращение Δs, то дуга $s+\Delta s$ определит новую точку M_1, лежащую от M в сторону возрастания дуг. Секущую направим от M к M_1, и угол, составленный именно этим направлением секущей с положительным направлением оси x, обозначим через β. Проектируя отрезок MM_1 на оси координат (рис. 153), по известной теореме из теории проекций, получим

$$\text{пр.}_x MM_1 = \Delta x = MM_1 \cos \beta,$$
$$\text{пр.}_y MM_1 = \Delta y = MM_1 \sin \beta,$$

*) Для простоты мы пишем MM_1 — вместо «длина отрезка MM_1», и $\overset{\frown}{MM_1}$ — вместо «длина дуги $\overset{\frown}{MM_1}$».

откуда

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{MM_1}.$$

Так как $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$, то эти равенства можно переписать так:

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}. \tag{14}$$

Будем называть *положительным* *то направление касательной, которое идет в* *сторону возрастания* *дуг;* точнее говоря, оно определяется как предельное положение при $\Delta s \to 0$ для луча MM_1, направленного так, как это разъяснено выше. Если угол положительного направления касательной с положительным направлением оси x обозначить через α, то из (14) получим в пределе, с учетом (13),

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{15}$$

Эти формулы определяют угол α уже с точностью до $2k\pi$ (k — целое), следовательно, действительно фиксируют одно из двух возможных направлений касательной, именно — положительное.

Замечание. Все сказанное в nn° **245 — 249** по поводу плоских кривых переносится без существенных изменений на случай пространственной кривой:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{1*}$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T).$$

Понятие длины кривой устанавливается в тех же терминах, что и в n° **247**. При наличии у функций φ, ψ, χ непрерывных производных — длина конечна, и кривая спрямляема. Длина переменной дуги (от начальной точки кривой до переменной точки, отвечающей параметру t)

$$s = s(t)$$

дифференцируема по t, причем ее производная по t выражается формулой

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}. \tag{10*}$$

Отсюда получается формула для дифференциала дуги:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{11*}$$

В случае отсутствия особых точек **[228]**, можно перейти к такому параметрическому представлению кривой, в котором роль параметра играет сама дуга s. Наконец, устанавливается понятие положительного направления касательной, направляющие косинусы которого даются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{15*}$$

§ 5. Кривизна плоской кривой

250. Понятие кривизны. Пусть снова дана простая кривая

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T),\tag{1}$$

где на этот раз функции φ и ψ предполагаются непрерывными вместе со своими производными первого и второго порядка. Рассмотрим дугу этой кривой, без особых точек.

Если в каждой ее точке провести касательную (скажем, в положительном направлении), то вследствие «искривленности» кривой эта касательная с перемещением точки касания будет вращаться; этим кривая существенно отличается от прямой; для которой касательная (совпадающая с ней) сохраняет одно и то же направление для всех точек.

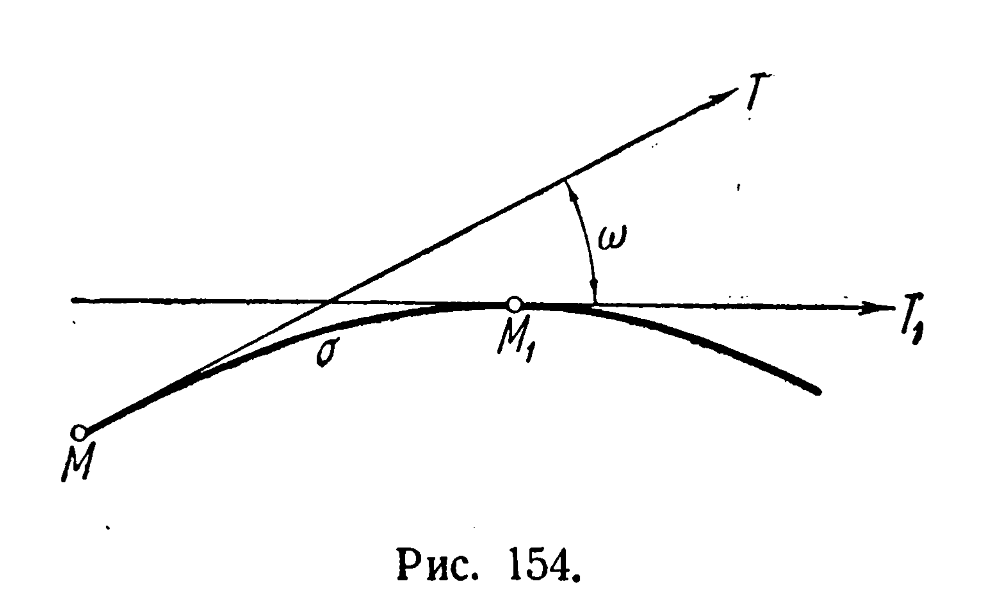


Рис. 154.

Важным элементом, характеризующим течение кривой, является «степень искривленности» или «кривизна» ее в различных точках; эту кривизну можно выразить числом.

Пусть $\overset{\frown}{MM_1}$ (рис. 154) есть дуга кривой; рассмотрим касательные MT и M_1T_1, проведенные (в положительном направлении) в конечных точках этой дуги.

Естественно кривизну кривой характеризовать углом поворота касательной, рассчитанным на единицу длины дуги, т. е. отношением $\frac{\omega}{\sigma}$, где угол ω измеряется в радианах, а длина σ — в выбранных единицах длины. *Это отношение называют средней кривизной дуги кривой.*

На различных участках кривой средняя кривизна ее будет, вообще говоря, различной. Существует впрочем (единственная) кривая, для которой средняя кривизна везде одинакова: это окружность*).

Действительно, для нее имеем (рис. 155)

$$\frac{\omega}{\sigma}=\frac{\omega}{R_\omega}=\frac{1}{R},$$

о какой бы дуге окружности ни шла речь.

От понятия средней кривизны дуги $\overset{\frown}{MM_1}$ перейдем к понятию кривизны в точке.

Кривизной кривой в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к M.

*) Не считая, разумеется, прямой, для которой кривизна всегда нуль.

Обозначив кривизну кривой в данной точке буквой k, будем иметь

$$k = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\omega}{\sigma}.$$

Для окружности, очевидно, $k = \frac{1}{R}$, т. е. *кривизна окружности есть величина, обратная радиусу окружности.*

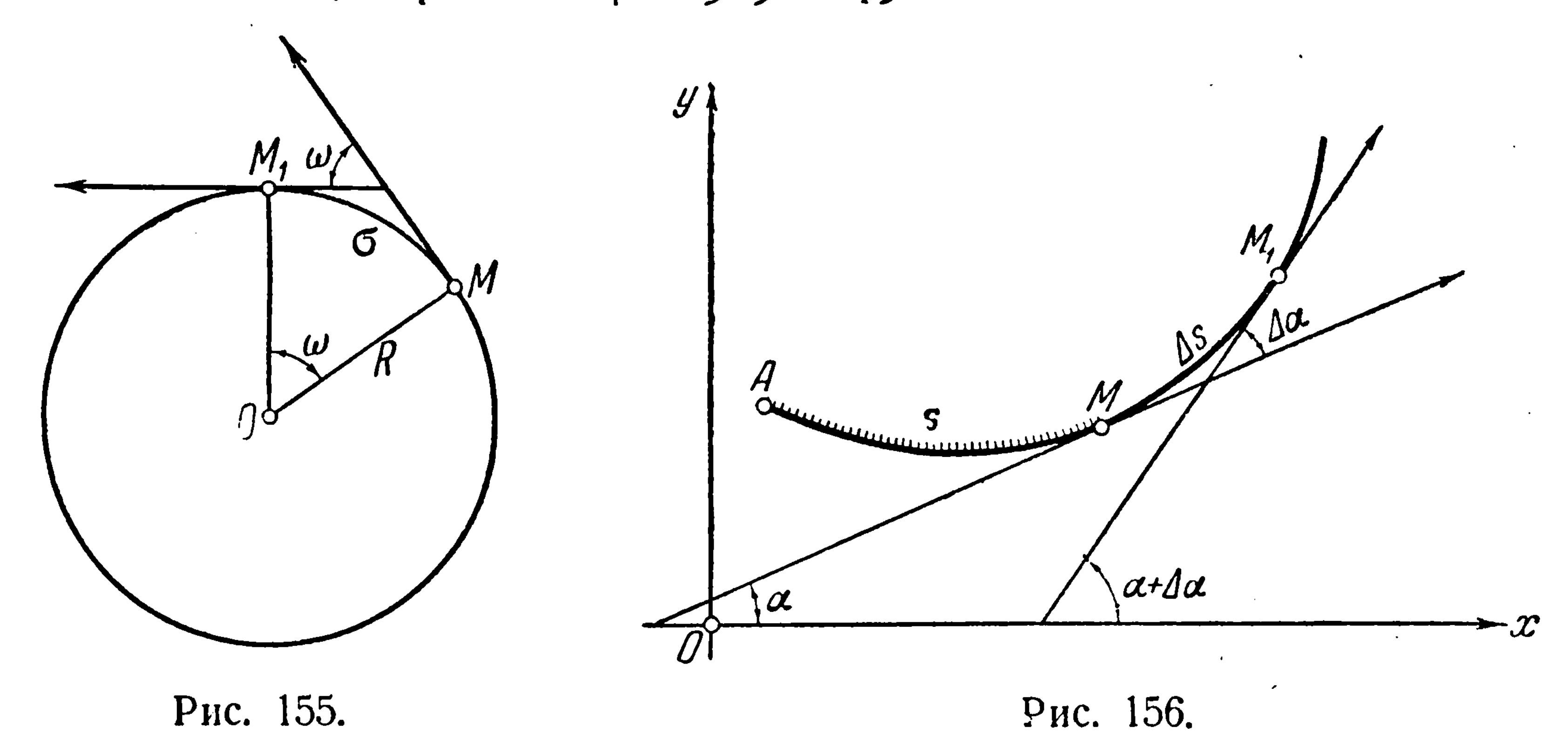


Рис. 155. Рис. 156.

Замечание. Понятия средней кривизны и кривизны в данной точке совершенно аналогичны понятиям средней скорости и скорости в данный момент для движущейся точки. Можно сказать, что средняя кривизна характеризует среднюю скорость изменения направление касательной на некоторой дуге, а кривизна в точке — истинную скорость изменения этого направления, приуроченную к данной точке.

Обратимся теперь к выводу аналитического выражения для кривизны, по которому ее можно было бы вычислять исходя из параметрического задания кривой.

Предположим сначала, что в роли параметра фигурирует дуга. Как мы знаем [**249**], такое представление всегда осуществимо, если ограничиться дугой кривой, где нет особых точек.

Возьмем на этом участке кривой точку M (заведомо не особую), и пусть ей отвечает значение s дуги. Придав s произвольное приращение Δs, получим другую точку $M_1(s+\Delta s)$ (рис. 156). Приращение $\Delta\alpha$ угла наклона касательной при переходе от M к M_1 даст угол ω между обеими касательными: $\omega = \Delta\alpha$.

Так как $\sigma = \Delta s$, то средняя кривизна будет равна $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Устремив $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$ к нулю, для кривизны кривой в точке M получим выражение

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{2}$$

Важно отметить, впрочем, что эта формула верна лишь с точностью до знака, так как кривизна, по нашему определению, есть число неотрицательное, а справа может получиться и отрицательный результат.

Дело в том, что как $\Delta\alpha$, так и Δs могут быть отрицательными, так что, строго говоря, следовало бы писать: $\omega = |\Delta\alpha|$, $\sigma = |\Delta s|$ и, наконец,

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

Это замечание следует иметь в виду и впредь.

Для того чтобы придать формуле (2) вид, удобный для непосредственного вычисления (а вместе с тем установить самое существование кривизны), обратимся к произвольному параметрическому заданию кривой (1).

Так как рассматриваемая точка $M(t)$ не является особой, и $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$, то без умаления общности, можно считать, что именно $x_t' = \varphi'(t) \neq 0$.

Перепишем теперь формулу (2) иначе:

$$k = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha_t'}{s_t'}. \tag{3}$$

Но $s_t' = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}$ [248 (10)], остается лишь найти α_t'. Так как [106 (11)]

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_t'}{x_t'} \quad \text{и} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y_t'}{x_t'},$$

то

$$\alpha_t' = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2} \frac{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}{x_t'^2} = \frac{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}{x_t'^2 + y_t'^2}. \tag{4}$$

Подставив в (3) значения s_t' и α_t' придем к окончательной формуле:

$$k = \frac{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}{(x_t'^2 + y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

Эта формула вполне пригодна для вычисления, ибо все фигурирующие в ней производные легко вычисляются по параметрическим уравнениям кривой.

Если кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, то эта формула принимает вид

$$k = \frac{y_{x^2}''}{(1 + y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5a}$$

Наконец, если дано полярное уравнение кривой: $r = g(\theta)$, то, как обычно, можно перейти к параметрическому представлению в прямоугольных координатах, принимая за параметр θ. Тогда с помощью (5) получим

$$k = \frac{r^2 + 2r_\theta'^2 - rr_{\theta^2}''}{(r^2 + r_\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5б}$$

251. Круг кривизны и радиус кривизны. Во многих исследованиях представляется удобным приближенно заменить кривую вблизи рассматриваемой точки — окружностью, имеющей ту же кривизну, что и кривая в этой точке.

Мы будем называть кругом) кривизны кривой в данной на ней точке M — круг, который*

1) *касается кривой в точке M;*

2) *направлен выпуклостью вблизи этой точки в ту же сторону, что и кривая;*

3) *имеет ту же кривизну, что и кривая в точке M* (рис. 157).

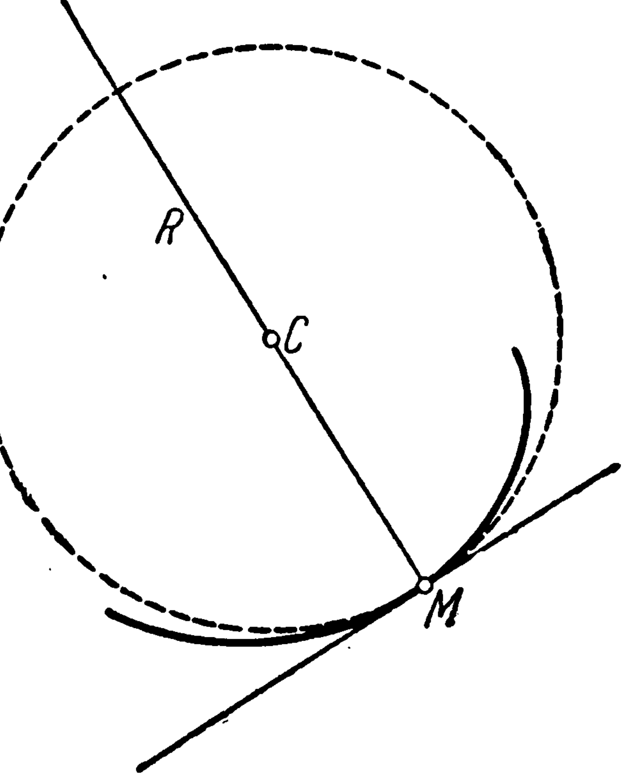


Рис. 157.

Центр C круга кривизны называется просто центром кривизны, а радиус этого круга — радиусом кривизны (кривой в данной точке).

Из определения круга кривизны явствует, что центр кривизны всегда лежит на нормали к кривой в рассматриваемой точке со стороны вогнутости (т. е. со стороны, обратной той, куда направлена выпуклость кривой). Если кривизну кривой в данной точке обозначить через k, то, вспоминая [250], что для окружности имели формулу:

$$k = \frac{1}{R},$$

теперь для радиуса кривизны, очевидно, будем иметь

$$R = \frac{1}{k}.$$

Пользуясь различными выражениями, введенными в предыдущем n° для кривизны, мы можем сразу же написать ряд формул для

---

*) Сюда также относится замечание, сделанное в сноске на стр. 555.

радиуса кривизны:

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \tag{6}$$

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}, \tag{7}$$

$$R = \frac{(1 + y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_{x^2}''}, \tag{7а}$$

$$R = \frac{(r^2 + r_\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_\theta'^2 - r r_{\theta^2}''}, \tag{7б}$$

которые и применяются в соответственных случаях.

Из всёх этих формул радиус кривизны получается со **знаком**, как и выше — кривизна. Однако здесь мы знака не станем отбрасывать, а постараемся установить его геометрический смысл.

С этой целью введем понятие о положительном направлении нормали к кривой. Мы разъяснили уже в **249**, что на касательной положительным считается направление в сторону возрастания дуг. На нормали же мы за положительное выберем такое направление, чтобы оно относительно (положительно направленной) касательной было так же ориентировано, как ось y относительно оси x. Например, при обычном расположении этих осей нормаль должна составлять с касательной угол $+\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Теперь, рассматривая радиус кривизны $R = MC$ как направленный отрезок, лежащий на нормали, естественно приписывать ему знак плюс, если он откладывается по нормали в положительном направлении, и знак минус в противном случае. Так, на рис. 158 в случае кривой (I) радиус кривизны будет иметь знак плюс, а в случае кривой (II) знак минус.

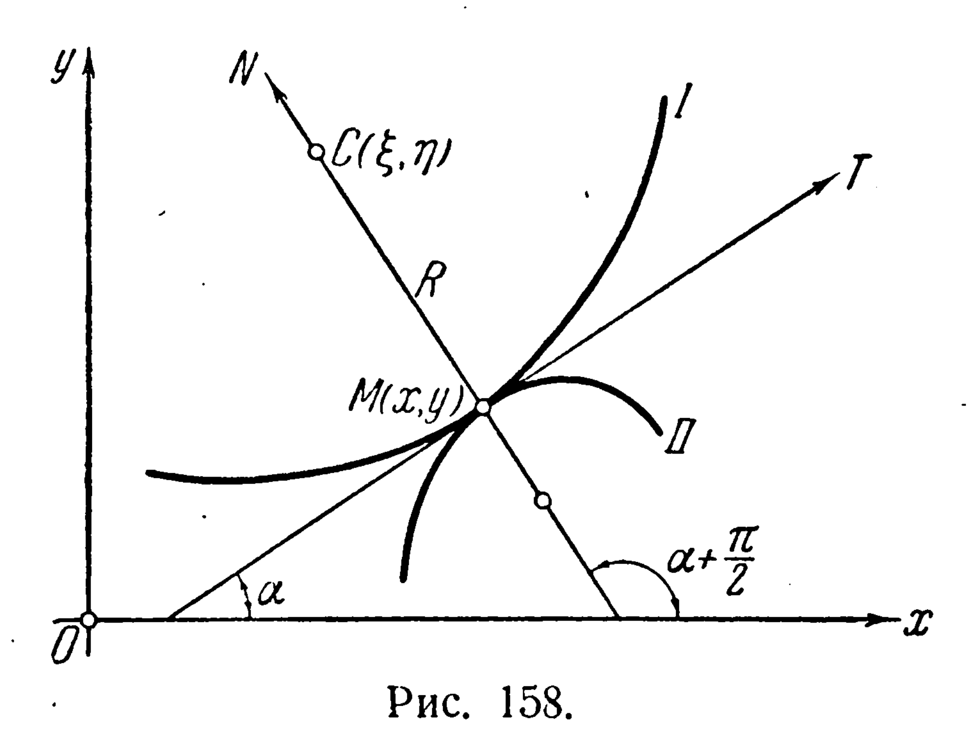


Рис. 158.

Мы утверждаем, что знак радиуса кривизны, получаемый по любой из выведенных выше формул, в точности соответствует только что данному определению. При этом, однако, важно подчеркнуть, что во всех случаях положительное направление отсчета дуг предполагается соответствующим возрастанию параметра (t, x или θ).

Убедиться в сказанном выше проще для случая явного задания кривой: здесь (рис. 158) касательная направлена направо, следовательно, нормаль — вверх. Если $y''_{x^2} > 0$, (как в рассматриваемой точке, так и — по непрерывности — вблизи нее), то кривая здесь выпукла вниз [**143**], и радиус кривизны R положителен; таким он и получается по формуле (7а). Наоборот, при $y''_{x^2} < 0$ кривая выпукла вверх, радиус R отрицателен, что и в этом случае вполне соответствует формуле (7а).

То же можно показать и для других формул.

252. Примеры. 1) Цепная линия: (рис. 41)

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

В этом случае [ср. **99**, 28)]

$$\sqrt{1+y'^2_x} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = \frac{y}{a};$$

с другой стороны,

$$y''_{x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}.$$

Поэтому [см. (7а)]

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Так как то же выражение, как нетрудно видеть, имеет и отрезок нормали $n = MN$, то приходим к такому способу построения центра кривизны C: отрезок нормали MN (см. рис.) нужно отложить по нормали же, но в обратную (положительную) сторону.

2) Астроида: (рис. 116)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Производные y'_x и y''_{x^2} можно найти, не разрешая уравнения, по методу дифференцирования неявных функций:

$$x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \quad \text{или} \quad x^{\frac{1}{3}}y' + y^{\frac{1}{3}} = 0,$$

откуда

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}};$$

затем:

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y' + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' + x^{\frac{1}{3}}y'' = 0,$$

откуда

$$y'' = -\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3xy^{\frac{2}{3}}}y' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

Подставляя значения y' и y'' в формулу (7а), получим

$$R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

3) Циклоида:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

(рис. 118).

Так как [**231**, 4)] $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, то $d\alpha = -\frac{1}{2}dt$; с другой же стороны, как легко вычислить,

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

так что

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 2a \sin \frac{t}{2}, \quad \text{т. е.} \quad ds = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt.$$

В таком случае для вычисления R можно воспользоваться основной формулой (6):

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a \sin \frac{t}{2}\, dt}{-\frac{1}{2}\, dt} = -4a \sin \frac{t}{2}.$$

Если вспомнить выведенное нами в **231**, 4) выражение для отрезка нормали n, то окажется, что

$$R = -2n.$$

Отсюда — построение центра кривизны C, ясное из чертежа.

4) Эвольвента круга:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

(рис. 121).

Здесь $\alpha = t$ [**231**, 6)], так что $d\alpha = dt$. С другой стороны,

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = a^2t^2;$$

отсюда

$$s'_t = at, \quad ds = at\, dt.$$

Поэтому также получаем просто

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = at = MB.$$

Таким образом, точка касания B (точка схода нити с круга) и будет центром кривизны для траектории конца M нити. Геометрическим местом центров кривизны нашей кривой оказывается исходный круг.

[Здесь мы сталкиваемся с частным осуществлением одного факта, который в общем виде будет рассмотрен нами ниже, в **255**.]

5) Логарифмическая спираль: $r = ae^{m\theta}$ (рис. 134).

Имеем $r'_\theta = mr$, $r''_{\theta^2} = m^2r$. Подставляя это в формулу (7б), найдем:

$$R = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2r^2 - m^2r^2} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Но $m=\operatorname{ctg}\omega$ [233, 3)], так что выражение для R можно написать в виде

$$R=\frac{r}{\sin\omega},$$

а тогда непосредственно из чертежа ясно, что полярный отрезок нормали $n_p=NM$. Следовательно, центром кривизны будет точка N; это дает легкий способ построения центра кривизны для логарифмической спирали.

6) Кардиоида: $r=a(1+\cos\theta)$ (рис. 135).

Здесь $r'_\theta=-a\sin\theta$, $r''_{\theta^2}=-a\cos\theta$. Легко подсчитать, что

$$r^2+r'^2_\theta=4a^2\cos^2\frac{\theta}{2};$$

остается еще вычислить

$$r'^2_\theta-rr''_{\theta^2}=a^2(1+\cos\theta)=2a^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

а тогда, по формуле (7а), сразу получаем

$$R=\frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2}.$$

Вспоминая [233, 4)] выражение полярного отрезка нормали для кардиоиды, видим, что

$$R=\frac{2}{3}n_p.$$

7) Лемниската: $r^2=2a^2\cos^2 2\theta$ (рис. 126).

Мы видели в 233, 5), что в этом случае $\alpha=3\theta+\frac{\pi}{2}$, так что $d\alpha=3d\theta$. Но тогда по формуле (6) сразу получаем

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{1}{3}s'_\theta=\frac{1}{3}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}=\frac{1}{3}n_p=\frac{2a^2}{3r}.$$

Так как нормаль к лемнискате мы строить умеем, то отсюда получается и способ построения центра кривизны.

8) Парабола: $y^2=2px$.

Пользуясь здесь методами дифференцирования неявных функций, найдем последовательно

$$yy'_x=p,\quad yy''_{x^2}+y'^2_x=0,\quad \text{откуда}\quad y^3y''_{x^2}=-p^2.$$

Теперь, по формуле (7а),

$$R=\frac{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}=\frac{[y^2+(yy'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y^3y''_{x^2}}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p^2}\qquad (y>0).$$

Вспоминая [231, 1)], что отрезок нормали $n=\sqrt{y^2+p^2}$, получаем

$$R=-\frac{n^3}{p^2}.$$

9) Эллипс и гипербола: $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$.

Дифференцируем это равенство дважды:

$$\frac{x}{a^2}\pm\frac{yy'_x}{b^2}=0,\quad \text{откуда}\quad yy'_x=\mp\frac{b^2x}{a^2};$$

далее,

$$yy''_{x^2}=\mp\frac{b^2}{a^2}y'^2_x,\quad \text{или}\quad y^3y''_{x^2}=-\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\right)=-\frac{b^4}{a^2}.$$

Как и только что, отсюда

$$R=-\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}\quad (y>0).$$

Мы имели уже [231, 2)] для этого случая выражение отрезка нормали

$$n=\frac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{a^2},$$

так что

$$R=-\frac{a^2}{b^4}n^3.$$

Известно, что как для эллипса, так и для гиперболы полупараметр p выражается так: $p=\frac{b^2}{a}$. Поэтому и здесь для R получается то же окончательное выражение, что и для параболы.

Для всех трех конических сечений радиус кривизны оказывается пропорционален кубу отрезка нормали.

10) В заключение скажем несколько слов об одном практическом вопросе, в котором как раз и используется существенно *изменение* кривизны вдоль кривой: речь идет о так называемых *переходных кривых*, применяемых при разбивке железнодорожных закруглений.

Как устанавливается в механике, при движении материальной точки по кривой развивается центробежная сила, величина которой определяется формулой

$$F=\frac{mv^2}{R},$$

где m — масса точки, v — ее скорость, а R — радиус кривизны кривой в рассматриваемой ее точке.

Если бы прямолинейная часть железнодорожного пути непосредственно примыкала к закруглению, разбитому по дуге круга (рис. 159а), то при переходе на это закругление центробежная сила возникала бы мгновенно, создавая

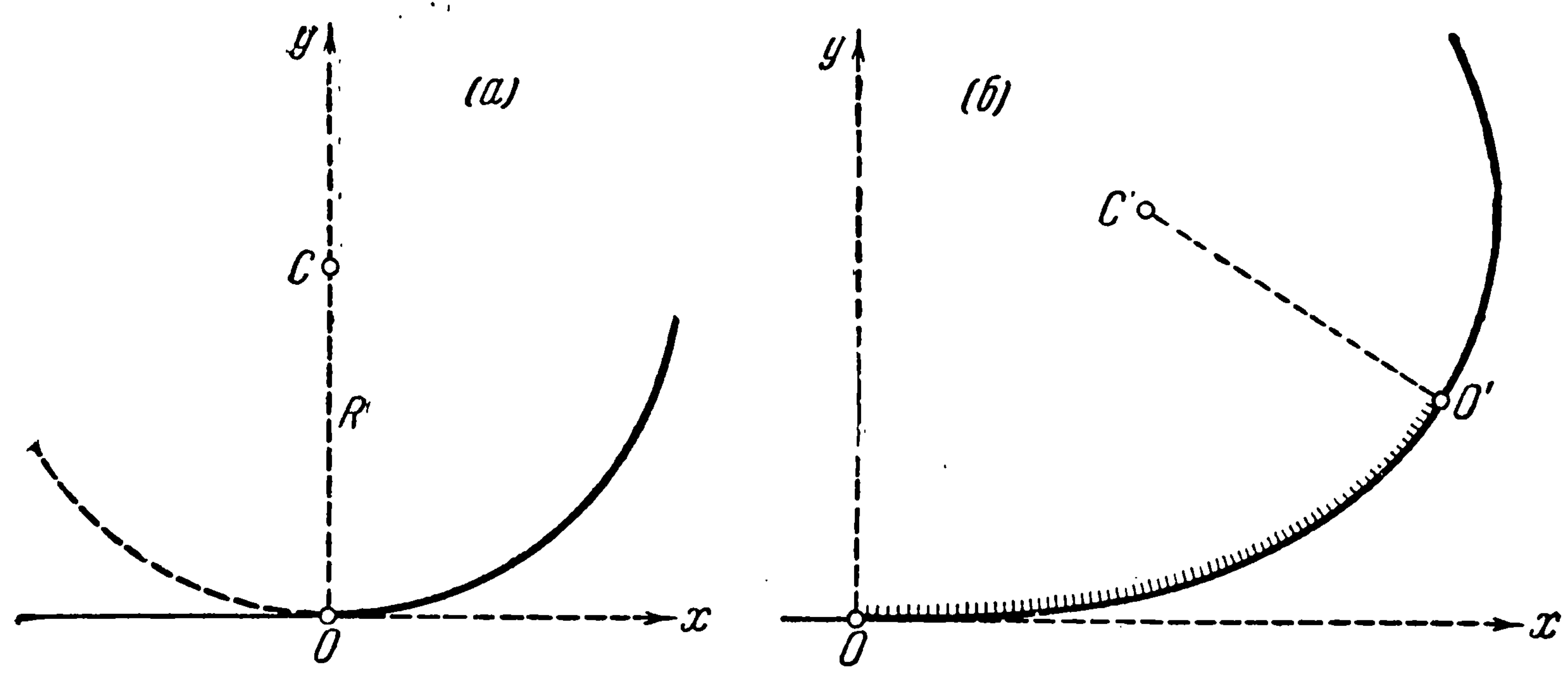


Рис. 159.

резкий и сильный толчок, вредный для подвижного состава и для верхнего строения пути. Для избежания этого прямолинейную часть пути сопрягают с круговой с помощью некоей *переходной* кривой (рис. 159 б). Вдоль нее радиус кривизны *постепенно* убывает от бесконечного значения —

в точке стыка с прямолинейной частью — до величины радиуса круга — в точке стыка с круговой дугой, и соответственно этому постепенно нарастает центробежная сила.

В качестве переходной кривой чаще всего используется кубическая парабола $y=\frac{x^3}{6q}$. В этом случае, очевидно, имеем

$$y'=\frac{x^2}{2q}, \quad y''=\frac{x}{q},$$

так что для радиуса кривизны получается выражение

$$R=\frac{q}{x}\left(1+\frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

При $x=0$ имеем $y'=0$ и $R=\infty$, наша кривая в начале координат касается оси x и имеет нулевую кривизну *).

Иногда в роли переходной кривой применяется и лемниската.

253. Координаты центра кривизны. Выведем теперь формулы для координат центра кривизны. Будем обозначать координаты рассматриваемой точки M кривой через x и y, а координаты отвечающего ей центра кривизны C — через ξ и η.

Радиус кривизны $R=MC$ (рис. 158) лежит на оси — именно на направленной нормали, которая с осью x составляет угол $\alpha+\frac{\pi}{2}$. Проектируя отрезок MC поочередно на ось x и на ось y, по основной теореме теории проекций, будем иметь

$$\xi-x=R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-R\sin\alpha,$$
$$h-y=R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=R\cos\alpha.$$

Отсюда для координат центра кривизны получаем:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x-R\sin\alpha,\\ \eta&=y+R\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Используя выведенные нами раньше формулы [**251** (6); **249** (15)]

$$R=\frac{ds}{d\alpha}, \quad \cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds},$$

только что полученные выражения можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x-\frac{dy}{d\alpha},\\ \eta&=y+\frac{dx}{d\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

*) Методами дифференциального исчисления [**134**, **135**] легко установить, что выражение для R убывает лишь до $x=0{,}946\sqrt{q}$, где оно имеет минимум $1{,}390\sqrt{q}$. Только эта часть кривой и используется на практике.

Если кривая задана параметрическими уравнениями (1), то, вспомнив выражение (4) для α'_t, легко преобразовать формулы (9) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t} y'_t,\\ \eta &= y + \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t} x'_t.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Как видим, ξ и η здесь выражены в функции от того же параметра t, что и x, y.

В случае кривой, заданной явным уравнением $y=f(x)$, формулы (10) принимают частный вид:

$$\xi = x - \frac{1+y_x'^2}{y''_{x^2}} y'_x, \quad \eta = y + \frac{1+y_x'^2}{y''_{x^2}}. \qquad (10а)$$

Формулы (10) можно применить и в том случае, если кривая задана полярным уравнением $r=g(\theta)$, выбирая, как обычно, за параметр угол θ.

Если сопоставить только что полученные формулы (10а) с формулами для пограничной точки на нормали, найденными при решении задачи n° **137** (рис. 62), то убедимся в том, что упомянутая пограничная точка совпадает с центром кривизны.

Еще более важный результат получится, если сопоставить формулы (10а) и (7а) с формулами (22) и (23) n° **243**: *круг кривизны кривой в данной точке есть не что иное, как соприкасающийся круг.* Иными словами [**244**], *круг кривизны представляет собой предельное положение круга, проходящего через три точки кривой, которые стремятся к совпадению с данной.*

Этот результат, конечно, можно было предвидеть: в случае касания второго порядка между данной кривой и окружностью, ордината y и две ее производные y'_x и y''_{x^2} имеют в данной точке одни и те же значения для обеих кривых, так что для них совпадают в этой точке направления выпуклости и величины кривизны, зависящие только от упомянутых производных.

254. Определение эволюты и эвольвенты; разыскание эволюты. Если точка $M(x, y)$ перемещается вдоль данной кривой, то соответствующий ей центр кривизны $C(\xi, \eta)$, вообще говоря, также описывает некоторую кривую. *Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее* ***эволютой.*** Обратно, *исходная кривая по отношению к своей эволюте называется ее* ***эвольвентой.***

Формулы (10) или (10а) предыдущего n°, выражающие координаты ξ, η центра кривизны C через параметр t (или x), можно рассматривать как уже готовые **параметрические уравнения эволюты**. Иногда представляется выгодным исключить из них параметр и выразить эволюту неявным уравнением

$$F(\xi, \eta)=0.$$

Примеры. 1) Найти эволюту параболы $y^2=2px$. Пользуясь полученными выше [252, 8)] результатами:

$$yy'_x=p, \quad y^3y''_{x^2}=-p^2,$$

по формулам (10а) находим координаты центра кривизны:

$$\xi=x-yy'_x\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=3x+p=\frac{3y^2}{2p}+p,$$

$$\eta=y+y\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=y-\frac{y}{p^2}(y^2+p^2)=-\frac{y^3}{p^2}.$$

Итак, параметрические уравнения эволюты параболы (где y — в роли параметра) будут

$$\xi=\frac{3y^2}{2p}+p, \quad \eta=-\frac{y^3}{p^2}.$$

Исключая из этих уравнений y, получим

$$y^2=\frac{2p}{3}(\xi-p), \quad y^3=-p^2\eta,$$

откуда, наконец,

$$\eta^2=\frac{8}{27p}(\xi-p)^3.$$

Мы видим, что эволютой параболы является полукубическая парабола (рис. 160).

2) Найти эволюту эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Имеем

$$x'_t=-a\sin t, \quad x''_{t^2}=-a\cos t, \quad y'_t=b\cos t, \quad y''_{t^2}=-b\sin t.$$

Подставляя это в формулу (10), получим

$$\xi=a\cos t-\frac{b\cos t\,(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

Таково параметрическое представление эволюты эллипса. Исключив t, получим уравнение этой кривой в неявном виде:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}} \quad (\text{где } c^2=a^2-b^2).$$

Кривая напоминает собой астроиду и получается из нее путем вытягивания по вертикальному направлению (рис. 161).

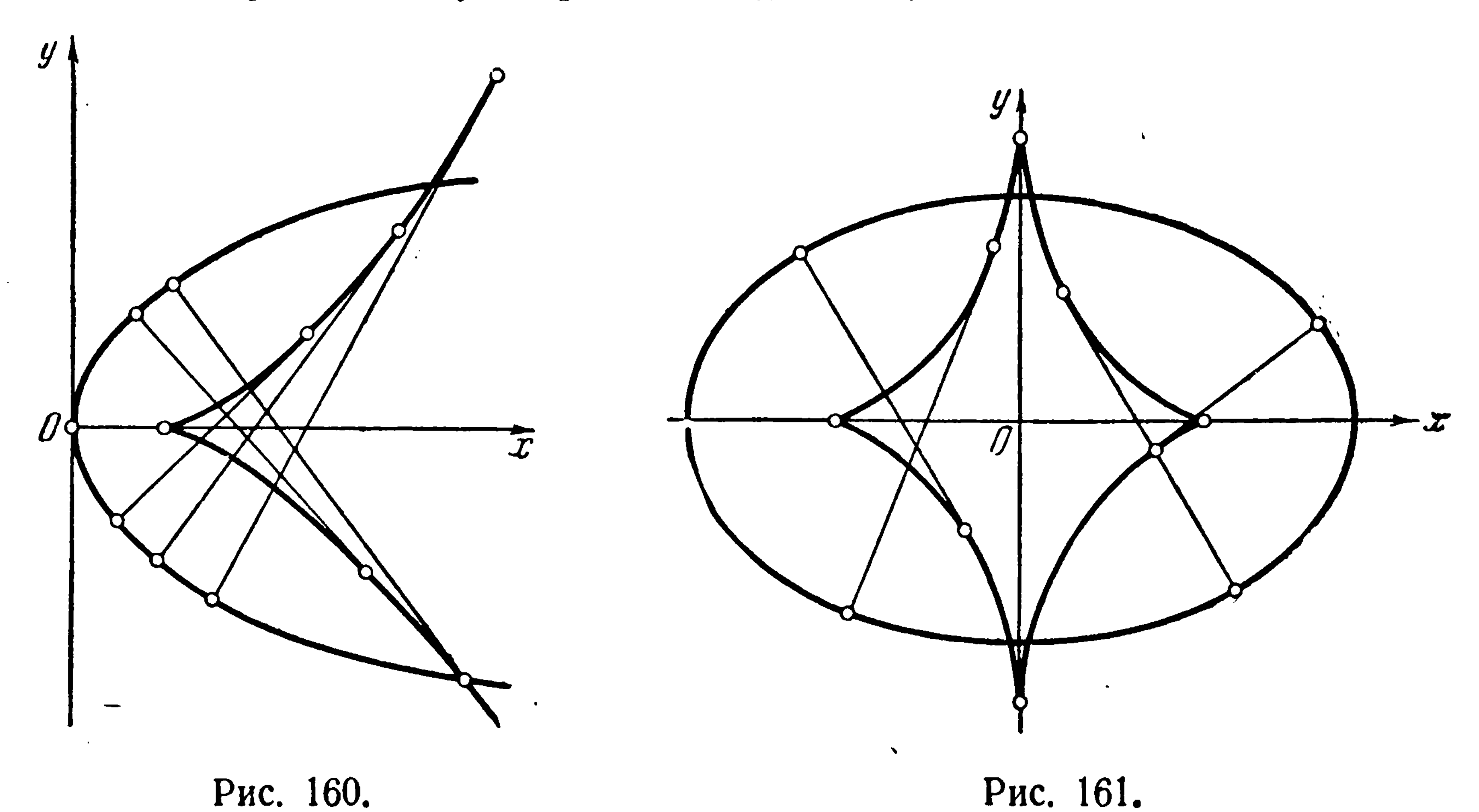


Рис. 160. Рис. 161.

Аналогично, но лишь с помощью гиперболических функций (вместо тригонометрических), и для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ получается эволюта

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}} \quad (\text{где } c^2=a^2+b^2).$$

3) Найти эволюту астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Мы имели уже в n° 252, 2):

$$y'_x=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y''_{x^2}=\left(\frac{a^2}{3x^4y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Подставив это в формулы (10а), после упрощений получим

$$\xi=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \qquad \eta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

Из этих уравнений, совместно с уравнением самой астроиды, следующим образом можно исключить x и y:

$$\xi+\eta=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3, \qquad \xi-\eta=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3,$$

$$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{2}{3}}.$$

Если повернуть оси координат на 45°, то новые координаты ξ_1, η_1 выразятся через старые ξ, η по формулам

$$\xi_1=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_1=-\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}},$$

так что в новой координатной системе уравнение искомой эволюты получит вид

$$\xi_1^{\frac{2}{3}} + \eta_1^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Мы узнаем в этом снова уравнение астроиды. Таким образом, эволютой астроиды служит астроида же вдвое больших размеров, с осями, повернутыми по сравнению с прежним на 45° (рис. 162).

4) Найти эволюту циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Так как мы знаем [231, 4)], что для циклоиды:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \qquad d\alpha = -\frac{1}{2}dt,$$

то удобнее воспользоваться формулами (9). Подставив в них это значение $d\alpha$, получим

$$\xi = x + 2y'_t, \quad \eta = y - 2x'_t$$

или

$$\xi = a(t + \sin t), \eta = -a(1 - \cos t).$$

Рис. 162.

Положив $t = \tau - \pi$, полученные параметрические уравнения перепишем в виде

$$\xi = -\pi a + a(\tau - \sin\tau), \quad \eta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

Отсюда ясно, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруентная с данной, но смещенная на отрезок πa влево (параллельно оси x, в отрицательном направлении) и на отрезок $2a$ вниз (параллельно оси y, тоже в отрицательном направлении).

Предоставляем читателю убедиться в том, что эволюта эпи- или гипоциклоиды также конгруентна с исходной кривой и получается из нее простым поворотом.

5) Найти эволюту логарифмической спирали $r = ae^{m\theta}$.

Геометрическое построение центра кривизны, указанное в 252, 5) позволяет с легкостью установить его полярные координаты r_1 и θ_1. Именно (см. рис. 134).

$$r_1 = n_p = r \operatorname{ctg} \omega = mr, \; \theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Исключая r и θ из этих уравнений и уравнения самой спирали, получим уравнение эволюты

$$r_1 = mae^{m\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = a_1 e^{m\theta_1}.$$

Повернув полярную ось на надлежащий угол, можно отождествить это уравнение с исходным; таким образом, эволюта логарифмической спирали есть такая же спираль, получающаяся из исходной поворотом вокруг полюса.

К построению эвольвент для заданной кривой мы вернемся после того, как изучим некоторые свойства эволют и эвольвент.

255. Свойства эволют и эвольвент. Мы имели параметрическое представление эволюты в виде **(8)**

$$\xi = x - R\sin\alpha, \quad \eta = y + R\cos\alpha,$$

считая x, y, R, α функциями от параметра. Предположим теперь существование (непрерывных) третьих производных от x и y по параметру *); тогда выражение (8) можно продифференцировать:

$$d\xi = dx - R\cos\alpha\, d\alpha - dR\sin\alpha,$$
$$d\eta = dy - R\sin\alpha\, d\alpha + dR\cos\alpha.$$

Принимая во внимание, что

$$R\cos\alpha\, d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dx}{ds}\,d\alpha = dx,$$
$$R\sin\alpha\, d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dy}{ds}\,d\alpha = dy,$$

окончательно получим

$$d\xi = -\sin\alpha\, dR, \quad d\eta = \cos\alpha\, dR. \tag{11}$$

Ограничимся теперь рассмотрением такого участка кривой, на котором R не обращается ни в нуль, ни в бесконечность и, кроме того, dR не обращается в нуль. Этим исключена возможность особых точек как на данной кривой, так и на ее эволюте. Так как $dR \neq 0$, то радиус кривизны R изменяется монотонно: либо возрастает, либо убывает.

Деля одну на другую формулы (11), найдем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

так что угловые коэффициенты касательных к эволюте и к эвольвенте обратны по величине и по знаку, а сами касательные — взаимно перпендикулярны. Итак:

1° *Нормаль к эвольвенте служит (в центре кривизны) касательной к эволюте.*

Возьмем семейство нормалей к эвольвенте; оно зависит от одного параметра (например, от того, которым определяется положение точки на данной кривой). Из доказанного ясно, что *эволюта является огибающей для этого семейства нормалей.*

Для упражнения предлагаем читателю убедиться в этом же другим путем: исходя из уравнения нормалей

$$(X - x)\,x'_t + (Y - y)\,y'_t = 0$$

(где параметр t содержится в x, y, x'_t, y'_t), методами n° **238** найти огибающую и установить ее совпадение с эволютой (10). Можно доказать также, что *центр кривизны есть характеристическая*

*) Напомним, что в R уже входят вторые производные.

точка на нормали, т. е. предельное положение точки пересечения данной нормали с бесконечно близкой к ней.

Перейдем теперь к рассмотрению дуги σ на эволюте. Возводя равенства (11) в квадрат и складывая, найдем — с учетом формулы (11) **248** для дифференциала дуги —

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2,$$

откуда

$$d\sigma = \pm dR \tag{12}$$

или (ведь $dR \neq 0$)

$$\frac{d\sigma}{dR} = \pm 1.$$

Так как это отношение есть непрерывная функция от параметра, которая не может перескакивать от значения -1 к значению $+1$ (не проходя промежуточных значений), то она на всем участке равна одному из этих чисел. Иными словами, в правой части равенства (12) на всем участке фигурирует один и тот же знак, плюс или минус.

Знак этот зависит от выбора направления для отсчета дуг на эволюте. Если выбрать его так, чтобы дуга σ возрастала вместе с радиусом кривизны R, то в формуле (12) нужно взять плюс; если же дуга σ возрастает в том направлении, которому отвечает убывание R, то будет минус.

Сделаем первое из этих допущений; тогда

$$dR = d\sigma, \text{ откуда } R - \sigma = c = \text{const}, \tag{13}$$

и мы получаем, что

2° *радиус кривизны разнится от дуги эволюты на величину постоянную.*

Таким образом, разность радиусов кривизны в двух точках эвольвенты равна дуге эволюты между соответствующими центрами кривизны. Отсюда, между прочим, вытекает любопытный способ спрямления дуги на эволюте.

Доказанное свойство эволюты допускает изящное механическое истолкование. Для того чтобы облегчить его изложение, допустим, что радиус кривизны R, который (не обращаясь в 0) сохраняет на всем рассматриваемом участке один и тот же знак, будет везде положительным; этого можно добиться выбором надлежащего направления для отсчета дуг на эвольвенте. Далее, отсчитывая дугу на эвольвенте от той точки P, которой отвечает наименьший радиус кривизны, будем иметь и $\sigma > 0$. В этих условиях и постоянная c, фигурирующая в равенстве (13), также положительна.

Представим себе теперь, что на эволюту навернута гибкая нерастяжимая нить, от конца Q (рис. 163) к началу P; она сходит с эволюты в начальной точке P по касательной и обрывается на расстоянии c от P в соответствующей точке A эвольвенты. Станем нить развертывать, сматывая с эволюты, но сохраняя ее в натянутом состоянии. Пусть QNM будет произвольное ее положение; так как NM больше $PA=c$ как раз на длину дуги $\smile{PN}=\sigma$, то NM и есть радиус кривизны R, т. е. точка M лежит на эвольвенте.

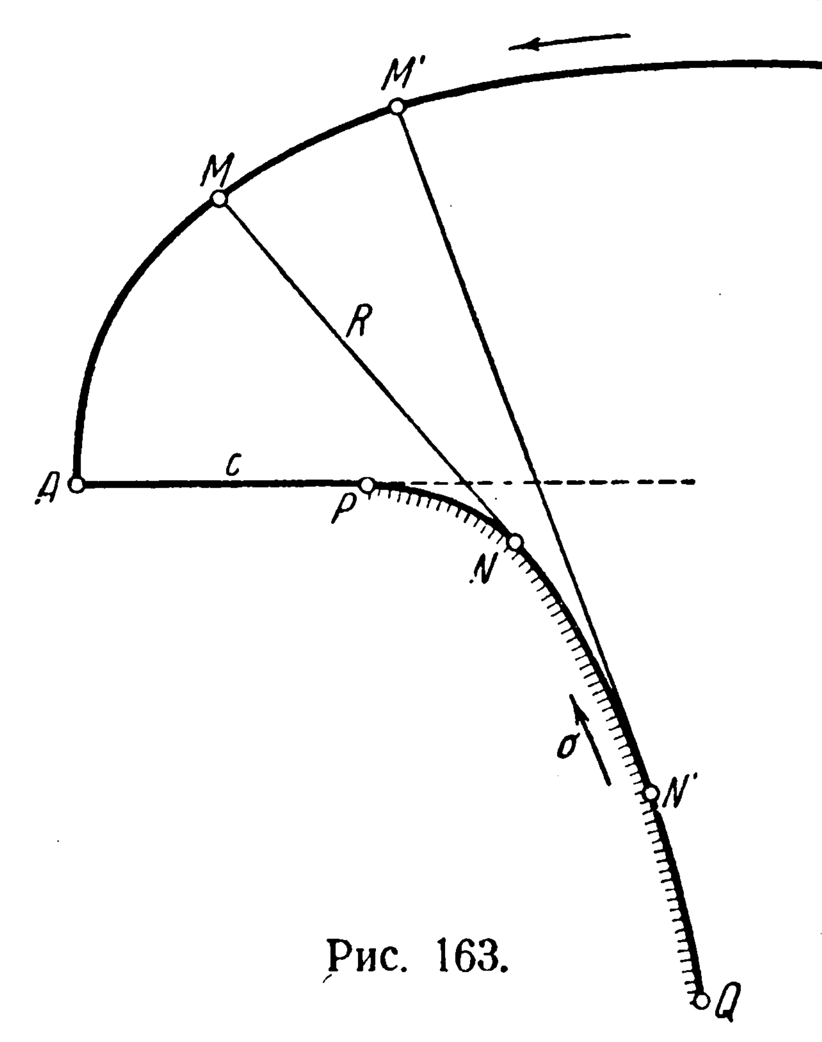


Рис. 163.

Итак: *эвольвента может быть описана путем разворачивания нити, предварительно навернутой на эволюту* *). Иначе можно сказать, что *эвольвента есть траектория точки A прямой AP, описываемая ею, когда прямая катится по эволюте без скольжения.*

В заключение, выведем еще формулу для радиуса кривизны ρ эволюты. Обозначив через β угол, составленный касательной к эволюте с осью x, имеем, очевидно:

$$\beta=\alpha\pm\frac{\pi}{2}, \text{ так что } d\beta=d\alpha. \tag{14}$$

Поэтому [см. (13) и (14)]

$$\rho=\frac{d\sigma}{d\beta}=\frac{dR}{d\alpha}=\frac{ds}{d\alpha}\,\frac{dR}{ds}=R\,\frac{dR}{ds}. \tag{15}$$

Нужно помнить, что эта формула предполагает, что σ растет вместе с R; в противном случае следовало бы в правой части поставить минус.

Если же считать, что σ растет вместе с s, то формулу можно написать в виде

$$\rho=R\left|\frac{dR}{ds}\right|, \tag{16}$$

объединяя, таким образом, случай $\frac{dR}{ds}>0$ (R возрастает вместе с s) и случай $\frac{dR}{ds}<0$ (R убывает с возрастанием s).

---

*) Отсюда, собственно, ведут свое происхождение и самые термины эволюта и эвольвента, означающие «развертка» и «развертывающая».

256. Разыскание эвольвент. Мы видим, что каждая эвольвента может быть восстановлена по своей эволюте с помощью разворачивания навернутой на эволюту нити или — что по существу то же — путем качения прямой по эволюте (без скольжения).

Докажем теперь обратное утверждение: *если прямая катится (без скольжения) по данной кривой, то траектория любой ее точки служит для данной кривой эвольвентой.* [Таким образом, каждая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент.]

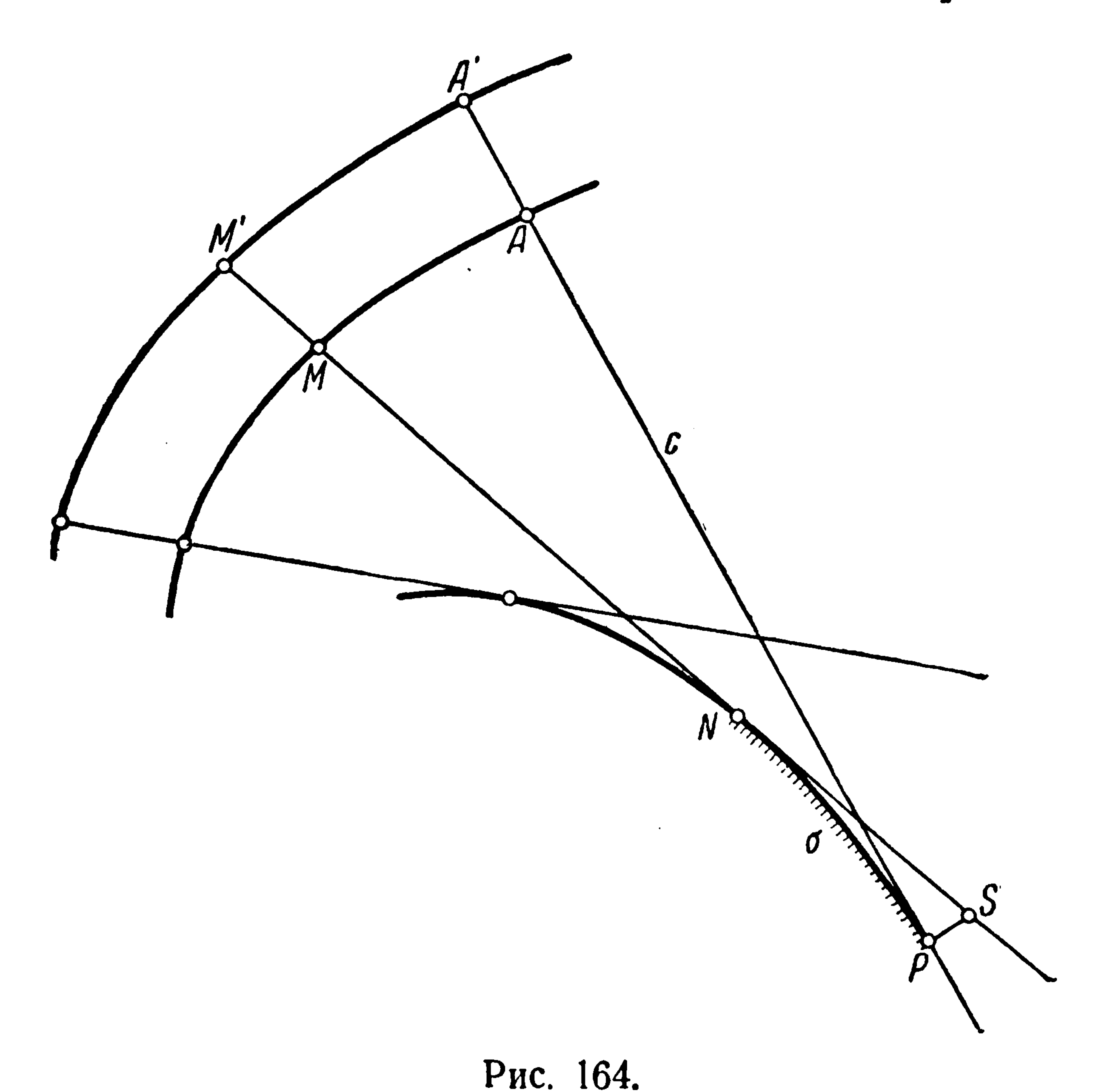


Рис. 164.

Пусть кривая PN (рис. 164) задана параметрически уравнениями

$$\xi=\varphi(t), \quad \eta=\psi(t),$$

причем φ и ψ имеют непрерывные производные до второго порядка; допустим также, что на рассматриваемом участке кривой нет кратных и вообще особых точек. Дугу σ кривой будем отсчитывать от точки P.

На касательной в точке P, направленной в сторону возрастания дуг, возьмем произвольную точку A, расстояние которой от P (с учетом знака) обозначим через c, и проследим ее траекторию при качении прямой PA (без скольжения) по данной кривой. При новом положении прямой, когда точкой касания станет N, точка P перейдет в S, а A — в M; очевидно,

$$SN=\breve{PN}=\sigma, \text{ так что } NM=c-\sigma.$$

Если координаты точек N и M обозначить, соответственно, через (ξ, η) и (x, y), а угол между прямой SN и осью x — через β, то, проектируя отрезок NM на оси, нетрудно получить:

$$x = \xi + (c - \sigma) \cos \beta, \quad y = \eta + (c - \sigma) \sin \beta. \tag{17}$$

Эти уравнения и дают параметрическое представление искомой траектории.

Дифференцируя их, найдем

$$dx = d\xi - \cos \beta \, d\sigma - (c - \sigma) \sin \beta \, d\beta,$$
$$dy = d\eta - \sin \beta \, d\sigma + (c - \sigma) \cos \beta \, d\beta.$$

Так как [см. **249** (15)]

$$\cos \beta = \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \sin \beta = \frac{d\eta}{d\sigma}, \tag{18}$$

то эти результаты упрощаются:

$$dx = -(c - \sigma) \sin \beta \, d\beta, \quad dy = (c - \sigma) \cos \beta \, d\beta.$$

Исключим случаи, когда $d\beta = 0$ или $\sigma = c$ *); тогда, разделив почленно эти формулы, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \beta = -\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

Отсюда уже ясно, что касательные к обеим кривым взаимно перпендикулярны, так что данная кривая действительно является огибающей для семейства нормалей к построенной кривой, т. е. ее эволютой. Значит, построенная кривая служит для данной эвольвентой, ч. и тр. д.

Примером получения эвольвенты указанным путем может служить уже рассмотренная выше эвольвента круга [**225**, 8); ср. **252**, 4)].

---

*) Им отвечают особые точки на построенной кривой.

ДОПОЛНЕНИЕ

ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФУНКЦИЙ

257. Случай функции одной переменной. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором (конечном или бесконечном) промежутке $\mathscr{X}$ или — более обще — в области $\mathscr{X}$, состоящей из конечного числа отдельных таких промежутков. *Если функция $f(x)$ непрерывна в $\mathscr{X}$ и имеет в этой области непрерывные же производные до n-го порядка включительно ($n \geqslant 1$), то говорят, что она в области $\mathscr{X}$ принадлежит классу $\mathscr{C}^n$.*

Отметим при этом, что если конец какого-либо из промежутков включен в его состав, то по отношению к этой точке имеются в виду односторонние производные*).

Пусть же функция $f(x)$ в некоторой области $\mathscr{X}$, не охватывающей всей числовой оси, принадлежит классу $\mathscr{C}^n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Предположим, что в какой-либо области $\mathscr{X}^*$, налегающей на $\mathscr{X}$, существует функция $f^*(x)$, тоже класса $\mathscr{C}^n$, которая в общей части областей $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}^*$ совпадает с $f(x)$; тогда эта функция f^* осуществляет *распространение функции f на $\mathscr{X}^*$ с сохранением класса.*

Всегда ли возможно такое распространение функций на более широкую область? На этот вопрос отвечает следующая

Теорема. *Любую функцию $f(x)$ класса $\mathscr{C}^n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) в замкнутой**) области $\mathscr{X}$ можно распространить на всю числовую ось $\mathscr{X}^*=(-\infty, +\infty)$ с сохранением класса.*

Покажем, что здесь распространение осуществляется просто с помощью целых многочленов. С этой целью сделаем предварительно следующие замечания.

Как мы видели в **123**, многочлен n-й степени

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-\alpha)+\frac{c_2}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{c_n}{n!}(x-\alpha)^n \qquad (1)$$

в точке $x=\alpha$, вместе со своими n производными, принимает, соответственно, именно значения $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$.

---

*) Или — что в данных условиях означает то же самое — предельные значения для производных, при приближении к названному концу со стороны самого промежутка.

**) То есть состоящей из одного или нескольких замкнутых промежутков вида $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$.

Пусть, далее, требуется построить такой многочлен, который, удовлетворяя по-прежнему условиям, относящимся к точке $x=\alpha$, кроме того, принимал бы, вместе со своими n производными, в некоторой другой точке $x=\beta$ наперед заданные значения $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n$. Возьмем искомый многочлен в виде

$$p(x)+(x-\alpha)^{n+1}q(x), \tag{2}$$

где $p(x)$ есть многочлен (1), а многочлен n-й степени $q(x)$ еще подлежит определению. Как бы ни выбирать $q(x)$, многочлен (2) в точке $x=\alpha$ во всяком случае удовлетворяет поставленным условиям. Продифференцируем многочлен (2) последовательно n раз и подставим в этот многочлен и его производные $x=\beta$; приравняв полученные выражения, соответственно, d_0, d_1, d_2, ..., d_n, мы придем к системе линейных уравнений относительно $q(\beta)$, $q'(\beta)$, $q''(\beta)$, ..., $q^{(n)}(\beta)$, из которых эти значения последовательно и определятся. По ним же, пользуясь формулой, аналогичной (1), уже нетрудно восстановить $q(x)$. [Ср. **130.**]

Обратимся теперь к доказательству высказанного утверждения. Пусть, в общем случае, область $\mathscr{X}$ состоит из замкнутых промежутков $\mathscr{X}_k$ ($k=1, 2, \ldots, m$), перенумерованных слева направо. Полагая в этих промежутках функцию $f^*=f$, дополним ее определение следующим образом. Если левый конец a_1 промежутка $\mathscr{X}_1$ есть конечное число, то для $x<a_1$ положим f^* равной многочлену вида (1), при

$$c_0=f(a_1),\quad c_1=f''(a_1),\quad \ldots,\quad c_n=f^{(n)}(a_1).$$

Аналогично распространяется функция f и направо от $\mathscr{X}_m$, если только правый конец b_m этого промежутка есть конечное число. Наконец, для промежутка (b_k, a_{k+1}) ($k=1, 2, \ldots, m-1$), отделяющего $\mathscr{X}_k$ от $\mathscr{X}_{k+1}$, отождествим f^* с таким многочленом, который вместе со своими n производными в обеих точках $x=b_k$ и $x=a_{k+1}$ принимает те же значения, что и функция f и ее производные. Нетрудно видеть, что определенная так функция f^* и осуществляет требуемое распространение на всю область $\mathscr{X}^*=(-\infty, +\infty)$.

258. Постановка задачи для двумерного случая. Положение вещей сразу усложняется при переходе к функциям нескольких переменных. Мы ограничимся в дальнейшем случаем функции двух переменных. Результаты, которые для этого случая будут установлены, переносятся и на общий случай любого числа переменных.

Мы будем рассматривать *области* $\mathscr{M}$ в двумерном пространстве, разумея под этим либо *открытую* область, либо же открытую с присоединением к ней части ее границы $\mathscr{L}$ или же всей границы (в последнем случае область будет *замкнутой*).

При распространении на рассматриваемый случай определения функций класса $\mathscr{C}^n$ ($n\geqslant 1$) мы сталкиваемся с своеобразным затруднением. Дело в том, что в точке, лежащей на границе $\mathscr{L}$ области,

может оказаться просто неприложимым самое определение частной производной того или иного типа. Например, если область $\mathscr{M}$ есть замкнутый круг $x^2+y^2\leqslant 1$, то в точках $(0, \pm 1)$ нельзя говорить о частной производной по x, ибо при $y=\pm 1$ значению $x=0$ нельзя придать никакого приращения, чтобы сразу же не выйти за пределы области, где задана функция; аналогично, в точках $(\pm 1, 0)$ не имеет смысла частная производная по y.

Говоря о частной производной (определенного порядка и типа), непрерывной в области $\mathscr{M}$, *мы условимся в граничной точке* M_0 *области разуметь под этой производной* *) *лишь предельное значение, к которому стремится одноименная производная, вычисленная во внутренней точке* M, *при стремлении* M *к* M_0 — независимо от того, будет ли оно на деле играть роль производной или нет.

Из дальнейшего изложения впоследствии выяснится, что упомянутое предельное значение — в широком классе случаев — будет вместе с тем и настоящей производной, если только положение точки M_0 относительно области позволяет вообще говорить о производной рассматриваемого типа. Впрочем, для простейшего случая прямоугольной области мы этот факт установим уже сейчас.

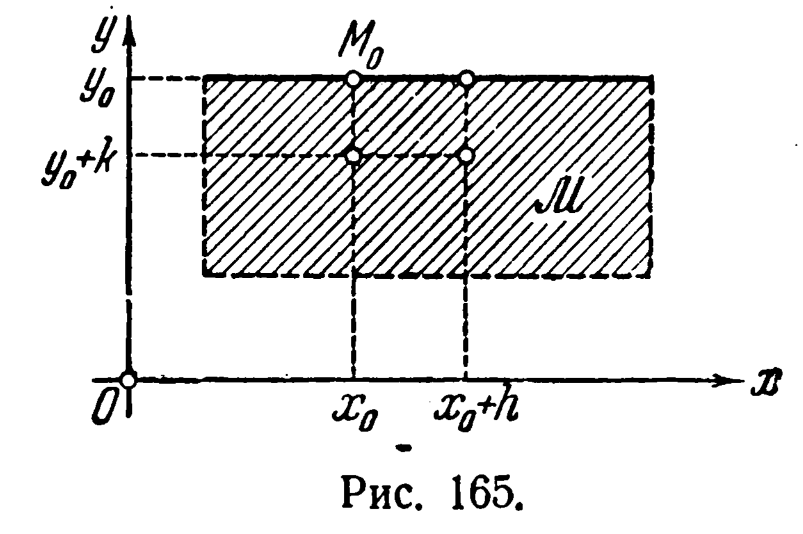


Рис. 165.

Итак, пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со всеми своими производными, до n-го ($n\geqslant 1$) порядка включительно, в некотором прямоугольнике $\mathscr{M}$, и точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на отрезке прямой $y=y_0$, служащем границей этого прямоугольника (рис. 165) и входящем в его состав.

Начнем с производной f'_y, для которой вопрос исчерпывается просто. По формуле Лагранжа [**112**] отношение приращений

$$\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}=f'_y(x_0, y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1),$$

и при $k\to 0$ стремится именно к предельному значению $f'_y(x_0, y_0)$, которое таким образом оказывается и производной в собственном смысле [ср. **113**]. Что же касается производной f'_x, то соответствующее ей отношение приращений само может быть рассмотрено как предел

$$\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}.$$

*) Сохраняя при этом для нее обычное обозначение.

Но последнее выражение, снова по формуле Лагранжа, преобразуется к виду

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}=f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)$$
$$(0<\theta<1).$$

При $h\to 0$, $k\to 0$ оно стремится к предельному значению $f'_x(x_0, y_0)$. По теореме же n° **168**, ввиду существования простого предела при $k\to 0$, этот двойной предел служит в то же время и повторным пределом:

$$f'_x(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h},$$

так что и здесь число $f'_x(x_0, y_0)$, определенное лишь как предельное значение производной, является настоящей производной. Сказанное последовательно переносится и на производные высших порядков.

Итак, заключенное выше условие позволяет теперь говорить о непрерывных производных в любой области $\mathcal{M}$, как бы ни были расположены по отношению к этой области ее граничные точки (включенные в ее состав). *Функция $f(x, y)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ в двумерной области $\mathcal{M}$, если она в $\mathcal{M}$ непрерывна и имеет непрерывные же производные всех типов и всех порядков до n-го включительно.* Пусть область $\mathcal{M}$ не охватывает всей плоскости; если в какой-либо области $\mathcal{M}^*$, налегающей на $\mathcal{M}$, существует функция f^*, тоже класса $\mathscr{C}^n$, которая в общей части областей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ совпадает с f, то мы будем говорить, что она дает *распространение функции f на $\mathcal{M}^*$, с сохранением класса.* Естественно и здесь поставить вопрос: всегда ли возможно такое распространение на более широкую область, в частности, на всю плоскость? Как мы покажем, на этот вопрос для замкнутой области $\mathcal{M}$ можно ответить утвердительно, если только ее контур удовлетворяет некоторым простым условиям. Впрочем, для облегчения изложения мы будем всегда предполагать область $\mathcal{M}$ ограниченной, хотя окончательное утверждение верно и для неограниченной области.

Излагаемые результаты в основном принадлежат Уитнею (H. Whitney) и Хестинсу (M. R. Hestenes).

259. Вспомогательные предложения. Для облегчения доказательства основной теоремы установим предварительно некоторые леммы.

Лемма I. Пусть функция $\varphi(u, v)$ будет класса $\mathscr{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ в области $\mathscr{P}$, определяемой неравенствами *)

$$a < u < b, \quad 0 \leqslant v < \Delta.$$

Тогда существует распространение φ^* функции φ, с сохранением класса, на весь прямоугольник

$$\mathscr{P}^* = (a, b; -\Delta, \Delta).$$

Определим $n+1$ чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ из следующей системы $n+1$ линейных уравнений:

$$(-1)^k\lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2 + \ldots + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1} = 1 \qquad (3)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Выполнить это можно, так как определителем системы является так называемый определитель Вандермонда для неравных между собою чисел $-1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{n+1}$, который, как известно, отличен от 0.

Определим теперь в $\mathscr{P}^*$ функцию $\varphi^*(u, v)$, полагая $\varphi^*(u, v) = \varphi(u, v)$ для $v \geqslant 0$ и

$$\varphi^*(u, v) = \lambda_1\varphi(u, -v) + \lambda_2\varphi\left(u, -\frac{1}{2}v\right) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_{n+1}\varphi\left(u, -\frac{1}{n+1}v\right) \qquad (4)$$

для $v < 0$. Если u_0 есть произвольное значение u из (a, b), то прежде всего

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to -0}} \varphi^*(u, v) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1})\,\varphi(u_0, 0) = \varphi(u_0, 0),$$

в силу первого из условий (3), отвечающего $k = 0$. Этим установлена непрерывность функции φ^* в тех точках прямоугольника $\mathscr{P}^*$, которые лежат на прямой $v = 0$; непрерывность ее в остальных точках $\mathscr{P}^*$ очевидна. Обратимся теперь к вопросу о существовании и непрерывности производных функции φ^* в $\mathscr{P}^*$; и здесь рассмотрения требуют лишь точки прямой $v = 0$. Для всех производных

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u, v)}{\partial u^i\,\partial v^k} \quad (1 \leqslant i + k \leqslant n) \qquad (5)$$

мы установим предельное равенство

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to -0}} \frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u, v)}{\partial u^i\,\partial v^k} = \frac{\partial^{i+k}\varphi(u_0, 0)}{\partial u^i\,\partial v^k}. \qquad (6)$$

---

*) Промежуток (a, b) может быть и бесконечным; точно так же и положительное число Δ может равняться $+\infty$.

С этой целью продифференцируем равенство (4) i раз по u, а затем k раз по v ($v<0$):

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u, v)}{\partial u^i \partial v^k}=(-1)^k\lambda_1\frac{\partial^{i+k}\varphi(u, -v)}{\partial u^i \partial v^k}+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u, -\frac{1}{2}v\right)}{\partial u^i \partial v^k}+\ldots$$
$$\ldots+\left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1}\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u, -\frac{1}{n+1}v\right)}{\partial u^i \partial v^k}$$

и перейдем к пределу при $u\to u_0$ и $v\to -0$. В результате, в силу равенства (3), мы и получим (6).

Таким образом, существование единого предельного значения для любой производной (5) как со стороны $v>0$, так и со стороны $v<0$ — обеспечено. Больше того, если за значение производной (5) в точках прямой $v=0$ принять это ее предельное значение, то получится непрерывная во всем $\mathcal{P}^*$ функция. Но точка $(u_0, 0)$ является для $\mathcal{P}^*$ внутренней точкой, и здесь нам нужна была бы производная в собственном смысле. В этом отношении мы имеем возможность сослаться на доказанное в предыдущем n°: упомянутое предельное значение будет в то же время и настоящей производной.

Функция φ^* и осуществляет искомое распространение функции φ на $\mathcal{P}^*$.

Лемма II. *Пусть функция $f(x, y)$ будет класса $\mathcal{C}^n$ в некоторой ограниченной открытой области $\mathcal{M}$* *). *Если каждую точку границы $\mathcal{L}$ этой области можно окружить окрестностью, в пределах которой допустимо распространение функции f с сохранением класса, то такое распространение возможно и на всю плоскость $\mathcal{E}$.*

Для любой точки M замкнутой области $\overline{\mathcal{M}}=\mathcal{M}+\mathcal{L}$ найдется **) либо окрестность, в которой функция f определена и принадлежит классу $\mathcal{C}^n$, либо же окрестность, на которую f может быть распространена с сохранением класса. Эту окрестность можно взять, например, в виде открытого круга $\bar{\sigma}=\mathcal{K}(M, 3r)$ с центром M и радиусом $3r$. Таким образом, вся замкнутая область $\overline{\mathcal{M}}$ покрывается не только системой $\overline{\Sigma}$, состоящей из этих кругов, $\bar{\sigma}$, но и системой Σ, состоящей из кругов $\sigma=\mathcal{K}(M, r)$ с втрое меньшими радиусами.

*) Мы не предполагаем этой области даже связной и пока ничего не говорим о виде ее границы.

**) В зависимости от того, принадлежит ли M открытой области $\mathcal{M}$ или ее границе $\mathcal{L}$.

Так как область $\mathcal{M}$, а с нею и $\overline{\mathcal{M}}$ ограничены, то к данному случаю применима лемма Бореля [175], и $\overline{\mathcal{M}}$ покроется конечной системой

$$\sum_m = \{ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m \},$$

извлеченной из $\sum$. Здесь

$$\sigma_i = \mathcal{K}(M_i, r_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

одновременно будем рассматривать и круги

$$\sigma'_i = \mathcal{K}(M_i, 2r_i), \quad \sigma''_i = \mathcal{K}(M_i, 3r_i).$$

Легко построить функцию $h_i(M) = h_i(x, y)$ класса $\mathcal{C}^n$ в $\mathcal{E}$, такую, что

$$h_i(M) = 0 \text{ в } \sigma_i \text{ и } h_i(M) = 1 \text{ в } \mathcal{E} - \sigma'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Можно, например, определить — методами n° **257** — функцию $h(t)$ класса $\mathcal{C}^n$ во всем промежутке $-\infty < t < +\infty$ так, чтобы было

$$h(t) = 0 \text{ для } t \leqslant 1 \text{ и } h(t) = 1 \text{ для } t \geqslant 2,$$

а затем положить

$$h_i(M) = h\left(\frac{\overline{MM_i}}{r_i}\right).$$

С помощью функций h_i составим функции

$$H_1 = H_1(M) = 1 - h_1,$$
$$H_i = H_i(M) = h_1 h_2 \ldots h_{i-1}(1 - h_i) \quad (1 < i \leqslant m);$$

они также принадлежат классу $\mathcal{C}^n$ в $\mathcal{E}$. Очевидно,

$$H_j = 0 \text{ в } \sigma_i \text{ (для всех } j > i), \tag{7}$$
$$H_i = 0 \text{ в } \mathcal{E} - \sigma'_i, \tag{8}$$

ибо в σ_i обращается в нуль множитель h_i, а в $\mathcal{E} - \sigma'_i$ — множитель $1 - h_i$. Так как

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_i = (1 - h_1) + h_1(1 - h_2) + \ldots$$
$$\ldots + h_1 h_2 \ldots h_{i-1}(1 - h_i) = 1 - h_1 h_2 \ldots h_i,$$

то

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_i = 1 \text{ в } \sigma_i, \tag{9}$$

потому что там обращается в нуль множитель h_i.

Пусть теперь φ_i в σ''_i совпадает с функцией f или с ее распространением, о котором упоминалось выше, а вне σ''_i пусть $\varphi_i = f$ в точках $\mathcal{M}$ и $= 0$ в прочих точках. Функция $\varphi_i H_i$ обращается в нуль в $\mathcal{E} - \sigma'_i$ [см. (8)] и, очевидно, во всей плоскости $\mathcal{E}$ принадлежит классу $\mathcal{C}^n$. Положим, наконец, во всех точках $\mathcal{E}$

$$f^* = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j H_j.$$

Этим равенством функция f^* определяется во всей плоскости и притом оказывается функцией класса $\mathscr{C}^n$.

Возьмем любую точку M из $\mathscr{M}$; она принадлежит некоторому кругу σ_i. Так как все $\varphi_j(M)=f(M)$ и, кроме того, в этой точке [ввиду (9) и (7)]

$$H_1+H_2+\ldots+H_i=1, \quad \text{а } H_j=0 \text{ для } j>i,$$

то $f^*(M)=f(M)$. Таким образом, функция f^* и есть искомая.

260. Основная теорема о распространении. Теперь мы в состоянии доказать и для случая функции двух переменных теорему о распространении, но налагая ограничения на контур области.

Условимся называть *гладкой кривой класса* $\mathscr{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ простую кривую без особых точек, выражаемую уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \tag{10}$$

где t изменяется в некотором промежутке $\mathscr{T}$, в предположении, что функции φ, ψ принадлежат в этом промежутке классу $\mathscr{C}^n$.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ в ограниченной замкнутой области $\mathscr{M}$, контур которой $\mathscr{L}$ состоит из одной или нескольких (непересекающихся) гладких кривых, тоже класса $\mathscr{C}^n$, то эта функция может быть распространена на всю плоскость $\mathscr{E}$ с сохранением класса.*

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ есть произвольная точка контура $\mathscr{L}$; для простоты будем считать $x_0=y_0=0$. Эта точка лежит на одной из кривых, входящих в состав $\mathscr{L}$, и является обыкновенной ее точкой. В таком случае, без умаления общности, можно допустить, что в окрестности точки M_0 кривая выражается явным уравнением

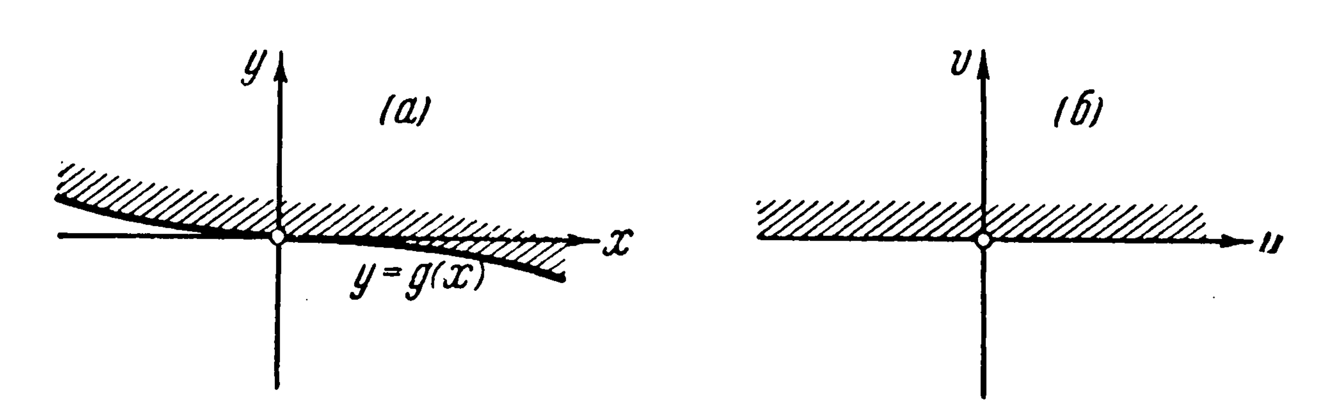


Рис. 166.

$y=g(x)$, где g — также класса $\mathscr{C}^n$, и что область $\mathscr{M}$ лежит вверх от нее, т. е. (вблизи M_0) определяется неравенством $y\geqslant g(x)$ (рис. 166, *а*).

Произведем преобразование переменных, полагая

$$x=u, \quad y=g(u)+v.$$

Функция $f(x, y)$ при этом перейдет в функцию

$$\varphi(u, v)=f(u, g(u)+v),$$

которая оказывается класса $\mathscr{C}^n$ вблизи точки $u=v=0$, именно, для $v\geqslant 0$ (рис. 166, *б*). Тогда, по лемме I, функцию φ можно распространить с сохранением класса и на значения $v<0$ (все время ограничивалась точками, достаточно близкими к начальной). Если это распространение осуществляется функцией $\varphi^*(u, v)$, то, возвращаясь к старым переменным, легко видеть, что функция

$$f^*(x, y)=\varphi^*(x, y-g(x))$$

дает распространение функции f на некоторую окрестность точки M_0.

На основании леммы II мы можем заключить теперь, что функция f, действительно, допускает распространение, с сохранением класса, на всю плоскость $\mathscr{E}$.

261. Обобщение. Однако полученный результат для практических надобностей все же недостаточен, поскольку часто приходится иметь дело с областями, контуры которых имеют «угловые точки». Условимся называть *кусочно-гладкой кривой класса* $\mathscr{C}^n$ — кривую, состоящую из нескольких гладких дуг класса $\mathscr{C}^n$, примыкающих одна к другой под углами (не равными ни 0, ни π!).

Теорема II. Заключение теоремы I *сохраняется, если контур $\mathscr{L}$ области $\mathscr{M}$ состоит из одной или нескольких непересекающихся кусочно-гладких кривых класса $\mathscr{C}^n$.*

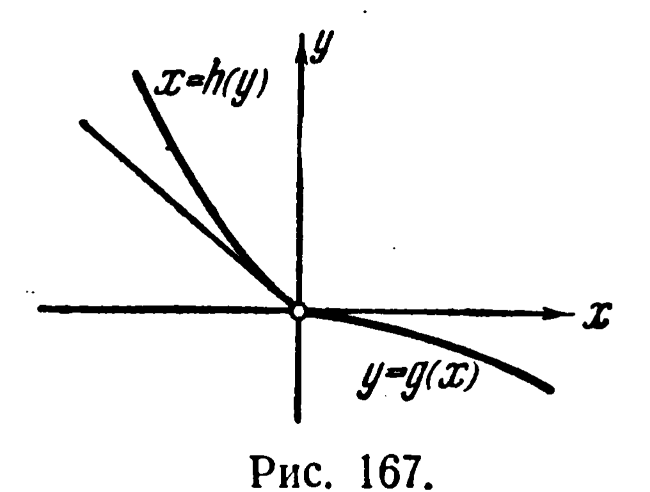


Рис. 167.

Мы уже видели, что любую точку контура $\mathscr{L}$, не являющуюся угловой, можно окружить окрестностью, в пределах которой допустимо распространение функции f с сохранением класса. Докажем теперь то же относительно угловой точки $M_0(x_0, y_0)$.

И здесь снова можно принять $x_0=y_0=0$; можно, не нарушая общности, предположить также, что смыкающиеся в начале дуги имеют в этой точке касательные, из которых одна совпадает с положительной частью оси x, а другая идет к ней под углом (рис. 167). В таком случае в достаточной близости к началу эти дуги выражаются, соответственно, уравнениями

$$y=g(x) \quad \text{и} \quad x=h(y),$$

причем $g'(0)=0$; функции g и h принадлежат обе классу $\mathscr{C}^n$.

Прибегнем к замене переменных

$$x=u+h(v), \quad y=g(u)+v. \tag{11}$$

Так как якобиан этих функций

$$J=\begin{vmatrix} 1 & h'(v) \\ g'(u) & 1 \end{vmatrix}=1-g'(u)\,h'(v)$$

в точке $u=v=0$ обращается в 1, то система (11) в окрестности нулевых значений всех аргументов допускает однозначное обращение:

$$u=\lambda(x, y), \quad v=\mu(x, y), \tag{12}$$

причем функции λ, μ также оказываются класса $\mathscr{C}^n$ [209].

При $v=0$ и $u \geqslant 0$ из (11) получаем $y=g(x)$ и $x \geqslant 0$, так что положительной части оси u отвечает первая из названных дуг; аналогично убеждаемся в том, что положительной части оси v отвечает вторая из дуг.

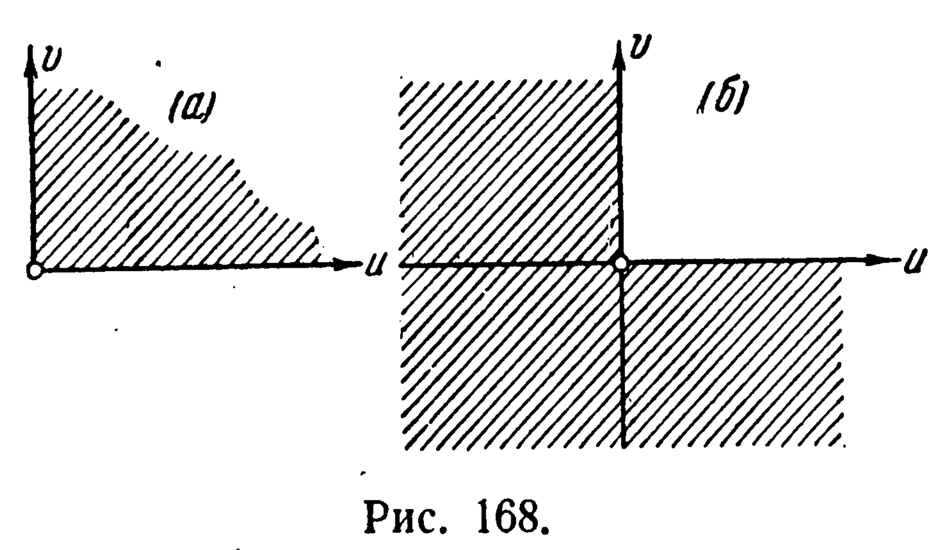


Рис. 168.

Очевидно, при этом преобразовании две угловые области, на которые этими дугами делится окрестность начальной точки на плоскости xy, отвечают тем двум — «входящему» и «выходящему» — прямым углам, на которые положительными частями осей u и v делится на плоскости uv окрестность начальной точки (рис. 168, *а* и *б*).

Подставляя в функцию f выражения (11), получим преобразованную функцию

$$\varphi(u, v)=f(u+h(v), \quad g(u)+v),$$

определенную и принадлежащую классу $\mathscr{C}^n$ в том или другом — смотря по случаю — из упомянутых только что прямых углов.

Если речь идет о «выходящем» угле (рис. 168, *а*), то, по лемме I, сначала функцию φ распространяют на IV координатный угол, а затем полученную функцию (меняя роли u и v) распространяют уже на II и III углы, т. е. на полную окрестность начала.

Сложнее обстоит дело, если речь идет о «входящем» угле (рис. 168, *б*). В этом случае поступают так. Прежде всего, опираясь на лемму I (но меняя знак u), распространяют функцию φ с левой полуплоскости на правую*) и получают, таким образом, функцию φ_1 — в полной окрестности начала. Затем рассматривают функцию $\psi=\varphi-\varphi_1$ в нижней полуплоскости и, *пользуясь указанным при доказательстве леммы I методом,* распространяют ее на верхнюю полуплоскость, что дает функцию ψ_1 — уже в полной окрестности начала. Но в III угле $\psi_1=\psi=\varphi-\varphi_1=0$, а тогда, по самому характеру упомянутого метода, ясно, что $\psi_1=0$ и во II угле. Если положить теперь в окрестности начала $\varphi^*=\psi_1+\varphi_1$, то во II и III углах $\psi_1=0$ и $\varphi_1=\varphi$, так что и $\varphi^*=\varphi$, и в IV угле $\psi_1=\psi=$ $=\varphi-\varphi_1$, и опять-таки $\varphi^*=(\varphi-\varphi_1)+\varphi_1=\varphi$. Таким образом, по-

*) Все время имея в виду лишь точки, близлежащие к началу.

строенная функция φ^* дает распространение φ на полную окрестность начала.

С помощью обратного преобразования (12) к старым переменным получается и распространение

$$f^*(x, y) = \varphi^*(\lambda(x, y), \mu(x, y))$$

функции f. Доказательство завершается, как и в теореме I, ссылкой на лемму II.

262. Заключительные замечания. Доказанная теорема о распространении функций имеет многообразные приложения. Мы ограничимся здесь указанием на обобщение с ее помощью ряда *локальных*, т. е. связанных с окрестностью определенной точки, формул и теорем анализа — на случай, когда упомянутая точка лежит *на границе* рассматриваемой области, а *не внутри* нее, как обычно предполагается.

Пусть, например, в замкнутой области $\mathcal{M}$, ограниченной контуром $\mathcal{L}$ (рассмотренного выше типа), определена функция $z = f(x, y)$, непрерывная вместе со своими производными f'_x и f'_y. Тогда, *если только точка* (x_0, y_0) *лежит внутри* $\mathcal{M}$, имеет место известная [**178**] формула для полного приращения функции:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{13}$$

где α и β стремятся к нулю вместе с Δx и Δy. Рассуждения, приведенные для доказательства этой формулы, вообще неприложимы, когда точка (x_0, y_0) оказывается лежащей на контуре. А между тем *формула верна и для этого случая*, если только связать Δx и Δy условием, чтобы точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не выходила за пределы $\mathcal{M}$. В этом легко убедиться, если написать сначала формулу для функции f^*, дающей распространение f на всю плоскость, а затем — ограничиваясь, как указано, точками области $\mathcal{M}$, — вернуться к исходной функции f.

Во всех случаях, когда в основе умозаключений лежала формула (13), мы получаем теперь существенное дополнение к прежним результатам.

Так, при сделанных относительно функции f предположениях она оказывается *дифференцируемой* [**179**] не только во внутренних точках области $\mathcal{M}$, но и в точках ее границы. Для поверхности, выражаемой уравнением $z = f(x, y)$, мы получаем возможность говорить о *касательной плоскости* [**180**] даже в точках ее контура.

На рассмотренной формуле, как мы знаем, основано также правило *дифференцирования сложной функции* [**181**]. Если

функции

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{14}$$

имеют производные, и точки $(\varphi(t),\ \psi(t))$ лежат все внутри области $\mathscr{M}$, то для сложной функции $z = f(\varphi(t),\ \psi(t))$ мы имели формулу

$$z'_t = f'_x\, x'_t + f'_y\, y'_t.$$

Теперь она распространяется и на случай, когда «кривая» (14) подходит вплотную к контуру области $\mathscr{M}$ и т. д., и т. п.

Не входя в подробности, укажем еще один важный пример. Пусть имеем систему функций

$$x = \varphi(u,\ v),\ y = \psi(u,\ v), \tag{15}$$

непрерывных вместе со своими производными в некоторой замкнутой области $\mathscr{P}$ на плоскости uv, с контуром $\mathscr{K}$, и пусть в некоторой точке $(u_0,\ v_0)$ этой области якобиан

$$J = \frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(u,\ v)}$$

отличен от 0. Если точка $(u_0,\ v_0)$ лежит внутри $\mathscr{P}$, то по теореме IV n° **208** система функций (15) допускает обращение, так что в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, где

$$x_0 = \varphi(u_0,\ v_0),$$
$$y_0 = \psi(u_0,\ v_0),$$

переменные u, v выражаются однозначными функциями от переменных x, y:

$$u = \lambda(x,\ y),\ v = \mu(x,\ y), \tag{15*}$$

непрерывными вместе со своими производными в упомянутой окрестности. Таким образом, ограничиваясь значениями u, v, x, y, достаточно близкими, соответственно, к u_0, v_0, x_0, y_0, можно сказать, что соотношения (15) и (15*) совершенно равносильны. Этим мы пользовались, например, при доказательстве утверждения, что поверхность

$$x = \varphi(u,\ v),$$
$$y = \psi(u,\ v),$$
$$z = \chi(u,\ v),$$

где $(u,\ v)$ изменяется в области $\mathscr{P}$, вблизи ее обыкновенной точки M_0 (отвечающей $u = u_0$, $v = v_0$) может быть выражена явным уравнением [**228**]. Но к точкам контура поверхности наши рассуждения были неприложимы, ибо в плоскости uv точка $(u_0,\ v_0)$ не могла лежать на контуре $\mathscr{K}$ области $\mathscr{P}$.

Теперь же, воспользовавшись распространениями φ^* и ψ^* функций φ и ψ, мы можем обобщить результат, относящийся к обращению системы функций, и на случай, когда точка (u_0, v_0) лежит на контуре $\mathscr{K}$. Примыкающей к точке (u_0, v_0) части области $\mathscr{P}$ отвечает на плоскости xy некоторая примыкающая к точке (x_0, y_0) область, в пределах которой все же о б р а щ е н и е допустимо.

Соответственным образом дополняется и упомянутый геометрический результат.

Приведенных примеров достаточно для того, чтобы читатель уяснил себе важность доказанных теорем как для самого математического анализа, так и для его приложений. Другие примеры применения теорем о распространении функций читатель найдет в последующих томах.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Григорий Михайлович Фихтенгольц

Курс дифференциального

и интегрального исчисления, том I.

М., 1969 г., 608 стр. с илл.

Редакторы *Г. П. Акилов, Ю. А. Горьков*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Е. А. Белицкая*

Печать с матриц. Подписано к печати 25/XI 1968 г. Бумага 60×90[1]/16. Физ. печ. л. 38. Условн. печ. л. 38. Уч.-изд. л. 39,89. Тираж 100 000 экз. Цена книги 1 р. 22 к. Заказ № 232.

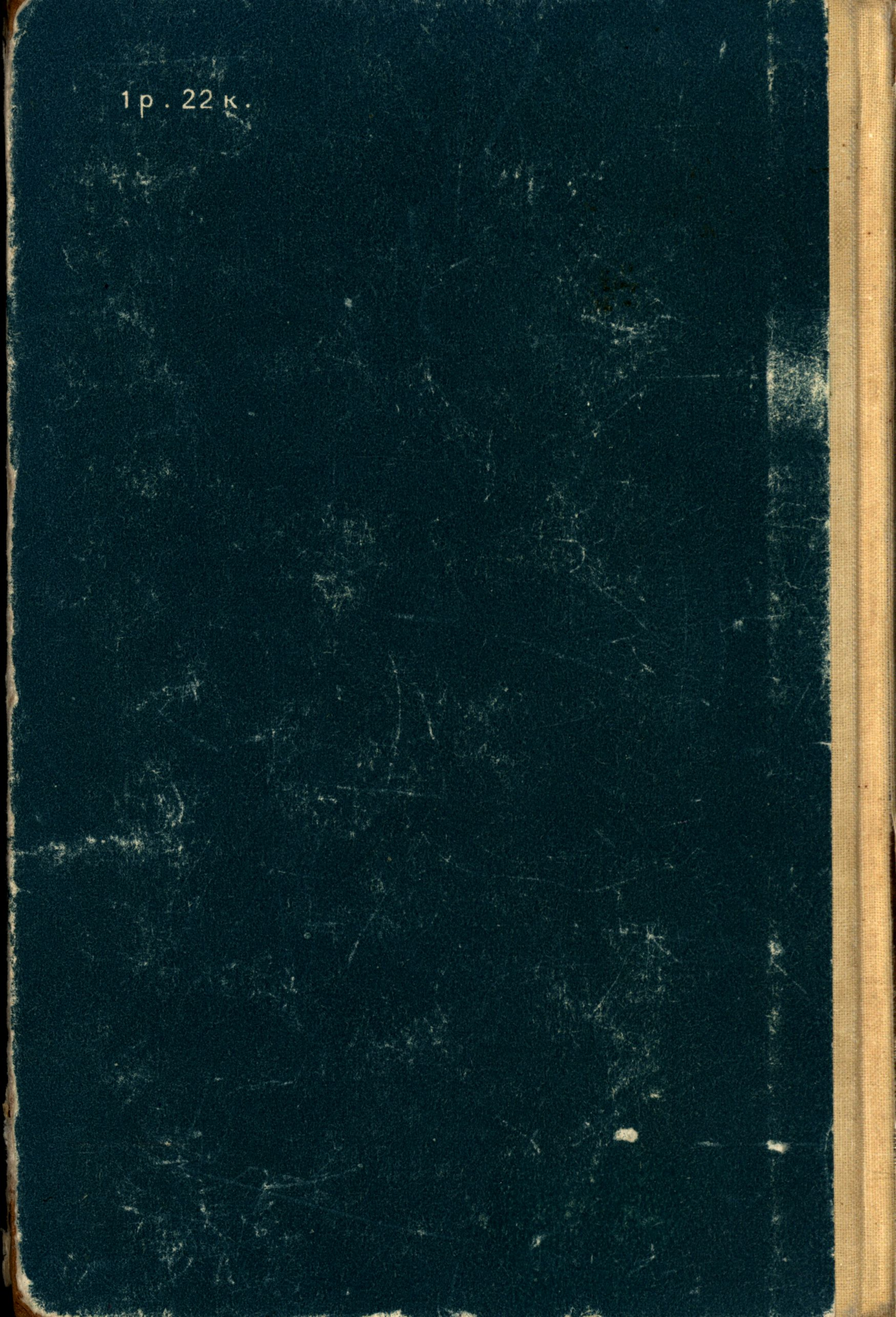
Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.


1 р. 22 к.